Défaut de Normalité

A. Harrabi *

CERFACS Technical Report TR/PA/98/36

Résumé

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice d'ordre n, et λ une valeur propre de A. Une majoration de la norme de A^{-1} est donnée dans le cas où A est inversible. Dans un second temps, une quantification de la sensibilité de λ à une perturbation ΔA est donnée en fonction de l'indice l de λ, de $\|\Delta A\|$, de la distance entre λ, et chacune des autres valeurs propres de A et des normes des puissances successives de la matrice formée par le module de la partie triangulaire supérieure stricte de la forme de Schur de A.

En troisième lieu, une majoration du conditionnement Hölderien $C_{1/l}(\lambda)$ est fournie en fonction des facteurs cités auparavant.

Il est montré que $C_{1/l}(\lambda) = \lim_{z\to\lambda} |z-\lambda| \, \|(z-A)^{-1}\|_2^{\frac{1}{l}}$.

1 Introduction

Dans ce papier, une majoration de la norme de la résolvante d'une matrice est donnée. Comme application, nous donnons une majoration de $\|A^{-1}\|_2$ qui fait intervenir toutes les valeurs propres de A avec leurs indices, et pas seulement la plus petite d'entre elles en module. On note que cette application est en grande partie motivée par le travail de Henrici [9, théorème 3] sur ce même sujet.

On s'intéresse ensuite à l'instabilité spectrale d'une matrice A quelconque donnée. Cette instabilité est liée au défaut de normalité de A, dans la mesure où l'on montre que la variation $|\Delta\lambda|$ d'une valeur propre λ d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et d'indice l, causée par une perturbation ΔA, est inférieure à $c\|\Delta A\|_2^{1/l}$, où c est une constante qui dépend de l'indice l de λ, de la distance entre λ

*Université des Sciences Sociales de Toulouse (UT1) et CERFACS, 42 Avenue G. Coriolis, 31057 Toulouse Cedex, France, (harrabi@cerfacs.fr).

et chacune des autres valeurs propres de A, et des normes des puissances successives du module de la partie triangulaire supérieure stricte de la forme de Schur de A.
Dans un second temps, nous donnons une majoration fine du conditionnement Hölderien $C_{1/l}(\lambda)$ dont l'avantage réside dans le fait qu'elle dépend de la forme de Schur de A et non de sa forme de Jordan. L'intérêt d'utiliser la forme de Schur et non celle de Jordan est que cette dernière est instable dans l'espace des matrices.

Pour finir, nous montrons comment la norme de la résolvante est une grandeur fortement liée à l'instabilité spectrale, en établissant que $C_{1/l}(\lambda) = \lim_{z\to\lambda} |z-\lambda| \, \|(z-A)^{-1}\|_2^{\frac{1}{l}}$, où l est l'indice de λ et où $\| \, . \, \|_2$ dénote la norme spectrale sur $\mathbb{C}^{n\times n}$, grâce à un résultat dû à Moro, Burke et Overton [12] [1].

Ce travail montre bien que les éléments qui entrent en jeu dans l'instabilité spectrale d'une matrice A sont : l'indice l_i de chacune des valeurs propres λ_i de A, leurs distances mutuelles, et les normes des puissances successives du module de la partie triangulaire supérieure stricte de la forme de Schur de A et non la forme de Jordan de celle-ci.

Tout le long de ce document, on va se restreindre au cas de la norme spectrale sur $\mathbb{C}^{n\times n}$, c'est-à-dire $\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$ où $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$ est la norme euclidienne de $x \in \mathbb{C}^n$. On précisera dans les remarques faites à la fin de ce document, les extensions qui peuvent être, éventuellement, faites pour d'autres normes, y compris les normes unitairement invariantes et satisfaisant une hypothèse supplémentaire. [2] La norme $\|A\|$ d'une matrice A dénote une norme quelconque de A sauf indication contraire.

2 Majoration de la norme de la résolvante

Dans cette partie, nous établissons quelques résultats servant à majorer la norme de la résolvante $(z-A)^{-1}$ d'une matrice A en un point z donné. Ces résultats nous serviront pour la suite de notre travail. Ils font intervenir la forme de Schur de A et non sa forme de Jordan. Notre insistance à ne pas utiliser la forme de Jordan est motivée par le fait que celle-ci est instable par

[1] Pour alléger l'écriture, on note $z-A$ au lieu de $zI-A$ où I est l'identité de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

[2] Une norme $\| \, . \, \|$ sur $\mathbb{C}^{n\times n}$ est unitairement invariante si pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et pour toute matrice unitaire $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, on a : $\|A\| = \|Q\,A\,Q^*\|$ où Q^* est la matrice transposée conjuguée de Q et $Q\,Q^* = Q^*\,Q = I$, où I est la matrice identité de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

perturbation, et donc difficile à calculer numériquement.

Avant d'aller plus loin, nous donnons les notations suivantes que nous garderons au long de ce papier.
Notations : Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice complexe d'ordre n, ayant r valeurs propres distinctes notées par $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. On note par $l_1, \ldots, l_r$ leurs indices respectifs et par $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives. Soit $A = XJX^{-1}$ où X est la base de Jordan de A et J sa forme de Jordan. On suppose que $J = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_r)$, où J_i est la "boîte" de Jordan associé à λ_i. On peut donc écrire $J_i = \lambda_i I_{m_i} + K_i$ où I_{m_i} dénote l'identité de taille m_i et K_i est une matrice sur-diagonale d'éléments égaux à 1 ou 0. La factorisation QR de X donne $X = QR$, où Q est unitaire et R une matrice triangulaire supérieure. On aura $A = QRJR^{-1}Q^* = QSQ^* = Q(D + N)Q^*$. La matrice D est diagonale, d'éléments égaux aux valeurs propres de A, et N est une matrice triangulaire supérieure stricte. La matrice $S = D + N$ est la forme de Schur de A ; la matrice Q contient les vecteurs de Schur.

On note par $\sigma(A)$ le spectre de A. Soit $z \notin \sigma(A)$. On s'intéresse à la norme de la résolvante $(z - A)^{-1}$ de A en z. Un calcul simple nous donne la majoration suivante de la norme de la résolvante en z :

$$\|(z - A)^{-1}\|_2 \;\; \leq \;\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|N\|_2^k}{d^{k+1}}, \tag{2.1}$$

où $d = \min_{1\leq i\leq r} |z - \lambda_i|$ est la distance de z au spectre $\sigma(A)$ de A.

La borne donnée par (2.1) est équivalente à $(\|N\|_2/d)^n$ dans le cas où le $\|N\|_2/d$ quotient est grand. Le but du théorème suivant est d'améliorer (2.1) en diminuant l'exposant de $1/d$, et en changeant $\|N\|_2^k$ par $\||N|^k\|_2$. La norme $\||N|^k\|_2$ de $|N|^k$ est, généralement, plus modérée que $\|N\|_2^k$ pour $k < n$ suffisamment grand. En effet, les puissances $\|N\|_2^k$ de $\|N\|_2$ augmentent rapidement avec k, si $\|N\|_2$ est grand, à l'inverse de $\||N|^k\|_2$ qui peut rester modérée même pour k grand. Nous illustrons ces notions à l'aide de l'exemple suivant.

Exemple 2.1 *Soit R la matrice compagne du polynôme $p(x) = (x-1)^3(x-2)^3(x-3)^3(x-4)$. Cette matrice de taille $n = 10$ est appelée la Rose [1]. Le tableau 1 contient respectivement les normes spectrales des puissances successives du module $N|$ de la partie triangulaire supérieure stricte de la forme de Schur N de R et les puissances successives de la norme euclidienne de N. On constate que, dès que $k \geq 2$, $\|N\|_2^k \gg \||N|^k\|_2$.*

Le théorème suivant améliore la borne donnée par (2.1).

k	1	2	3	4	5
$\||N|^k\|_2$	3×10^4	5×10^5	3×10^6	1×10^7	3×10^7
$\|N\|_2^k$	3×10^4	9×10^8	3×10^{13}	8×10^{17}	2×10^{22}
k	6	7	8	9	10
$\||N|^k\|_2$	6×10^7	6×10^7	4×10^7	10^7	0
$\|N\|_2^k$	7×10^{26}	2×10^{31}	7×10^{35}	2×10^{40}	6×10^{44}

Tableau 1: $\||N|^k\|_2$ *et* $\|N\|_2^k$ *pour* $k \leq 10$. *La matrice* N *est la partie triangulaire supérieure stricte de la forme de Schur de la matrice la Rose.*

Théorème 2.1 *Soit* $z \notin \sigma(A)$. *Alors*

$$\|(z-A)^{-1}\|_2 \;\leq\; \sum_{k=0}^{\nu-1}\left(\max_{\substack{\sum_{i=1}^r \delta_i = k+1;\\ 0\leq\delta_i\leq l_i}} \prod_{i=1}^r |z-\lambda_i|^{-\delta_i}\right)\||N|^k\|_2, \qquad (2.2)$$

où $\nu = \sum_{i=1}^r l_i$.

Avant de démontrer le théorème 2.1, nous allons donner un exemple pour mieux comprendre la formule 2.2. Puis nous donnerons deux lemmes et trois corollaires, dont on aura besoin pour la démonstration du théorème.
Supposons que $|z-\lambda_{\sigma_1}| \leq |z-\lambda_{\sigma_2}| \leq \cdots \leq |z-\lambda_{\sigma_r}|$, où $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ est une permutation de $\{1, \ldots, r\}$. Et soit pour k fixé, $0 \leq k \leq \nu-1$, un entier i_k tel que $l_{\sigma_1}+\cdots+l_{\sigma_{i_k}} \leq k+1 < l_{\sigma_1}+\cdots+l_{\sigma_{i_k+1}}$. Alors

$$\max_{\substack{\sum_{i=1}^r \delta_i = k+1;\\ 0\leq\delta_i\leq l_i}} \prod_{i=1}^r |z-\lambda_i|^{-\delta_i} \;=\; |z-\lambda_{\sigma_{i_k+1}}|^{-\delta} \prod_{j=1}^{i_k} |z-\lambda_{\sigma_j}|^{-l_{\sigma_j}},$$

où $\delta = k+1-(l_{\sigma_1}+\cdots+l_{\sigma_{i_k}})$.

Exemple 2.2 *Soit* $A_0 \in C^{12\times12}$, *ayant deux valeurs propres 0 et 1, où*

- *la valeur propre* 0 *admet un bloc de Jordan d'ordre* 3 *et un bloc d'ordre* 2, *et*
- *la valeur propre* 1 *admet deux blocs de Jordan d'ordre* 2 *et trois blocs d'ordre* 1.

Soit N_0 *la partie triangulaire supérieure stricte de la forme de Schur de* A_0. *Alors, le théorème 2.1 s'exprime ainsi :*

- *si la partie réelle de z est inférieure à $1/2$, on a*

$$\|(z-A_0)^{-1}\|_2 \;\leq\; \frac{1}{|z|}+\frac{\||N_0|\|_2}{|z|^2}+\frac{1}{|z|^3}\left(\||N_0|^2\|_2+\frac{\||N_0|^3\|_2}{|z-1|}+\frac{\||N_0|^4\|_2}{|z-1|^2}\right).$$

- *si la partie réelle de z est supérieure à $1/2$, on a*

$$\|(z-A_0)^{-1}\|_2 \;\leq\; \frac{1}{|z-1|}+ \frac{1}{|z-1|^2}\left(\||N_0|\|_2+\frac{\||N_0|^2\|_2}{|z|}+\frac{\||N_0|^3\|_2}{|z|^2}+\frac{\||N_0|^4\|_2}{|z|^3}\right).$$

$\triangle$

Dans les deux lemmes et les deux corollaires suivants, nous utilisons une partition par bloc des matrices telles que le $i^{ième}$ bloc diagonal soit d'ordre m_i la multiplicité de λ_i. Par exemple, on a : $N=(N_{ij})_{i\leq j\leq r}$, $R=(R_{ij})_{i\leq j\leq r}$, $D=(D_i)_{1\leq i\leq r}$ et $R^{-1}=(\tilde{R}_{ij})_{i\leq j\leq r}$ où N_{ij}, R_{ij}, $\tilde{R}_{ij}\in\mathbb{C}^{m_i\times m_j}$ et $D_i=\lambda_i I_{m_i}$ pour tout i et j tel que $i\leq j\leq r$. On note que $\tilde{R}_{ii}=R_{ii}^{-1}$, $N_{ii}=R_{ii}K_iR_{ii}^{-1}$, et $N_{ii}^{l_i}=0$ puisque $N_{ii}^{l_i}=R_{ii}K_i^{l_i}R_{ii}^{-1}=0$.

Le but du lemme suivant est de montrer que $\sum_{i=1}^r l_i$ est un majorant de l'indice de nilpotence de N (resp., de $(z-D)^{-1}N$). On rappelle que *l'indice de nilpotence* ν_0 d'une matrice B est le plus petit entier vérifiant $B^{\nu_0}=0$.

Lemme 2.2 *Soit $\nu=\sum_{i=1}^r l_i$. Alors*

$$N^\nu \;=\; 0, \tag{2.3}$$

et

$$((z-D)^{-1}N)^\nu \;=\; 0. \tag{2.4}$$

Démonstration

- Pour démontrer l'égalité (2.3), on peut supposer, sans perte de généralité, que $l_1\leq l_2\leq\cdots\leq l_r$. Sinon, on peut trouver une matrice unitaire U telle que les valeurs propres de UJU^* admettent des indices croissants; on travaille alors avec la forme de Schur correspondante. On a $N^\nu=N^{l_1}N^{l_2}\cdots N^{l_r}$. De plus les i premiers blocs diagonaux de N^{l_i} sont nuls, car $(N^k)_{ii}=N_{ii}^k$ (voir Lemme 2.3) et $N_{ii}^{l_i}=0$ pour tout i inférieur ou égal à r. Pour conclure la preuve, il suffit de constater que, pour les k matrices triangulaires supérieures par bloc $(M_s)_{s\leq k}$ tel que

$M_s = (M_{ij}^{(s)})_{i\leq j\leq k}$ et $M_{ii}^{(s)} = 0$ pour tout s et i tel que $i \leq s \leq k$, $\prod_{s=1}^{k} M_s = 0$. [3]

- Pour la preuve de l'égalité (2.4), il suffit de remarquer que, dans la démonstration de l'égalité (2.3), on a utilisé seulement le fait que $N_{ii}^{n_j} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq r$. On note que $((z-D)^{-1}N)_{ii} = (z-\lambda_i)^{-1}N_{ii}$. On procède alors comme pour l'égalité (2.3). Ceci achève la démonstration du lemme. □

Le lemme suivant est destiné à donner la forme de $(N^k)_{ij}$ et $(((z-D)^{-1}N)^k)_{ij}$.

Lemme 2.3 *Soit $S = D + N$, la forme de Schur de A. Pour tout entier $k \geq 1$, on a les égalités suivantes :* [4]

$$(N^k)_{ii} \quad = \quad (N_{ii})^k, \tag{2.5}$$

$$(N^k)_{ij} \quad = \quad \sum_{s=0}^{\inf(k,l_i)-1} N_{ii}^s \sum_{l=i+1}^{j} N_{il}(N^{k-s-1})_{lj} \ \textit{si } 1+i \leq j \leq r, \tag{2.6}$$

$$(((z-D)^{-1}N)^k)_{ii} \quad = \quad \frac{1}{(z-\lambda_i)^k}(N_{ii})^k. \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} &(((z-D)^{-1}N)^k)_{ij} \\ &\quad = \sum_{s=0}^{\inf(k,l_i)-1} \frac{1}{(z-\lambda_i)^{s+1}} N_{ii}^s \sum_{l=i+1}^{j} N_{il}(((z-D)^{-1}N)^{k-s-1})_{lj} \\ &\qquad \textit{si } 1+i \leq j \leq r. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Démonstration

- Les deux égalités (2.5) et (2.7) sont évidentes, car N est triangulaire supérieure.

[3]Ceci peut être montré par récurrence sur k. En effet, la démonstration revient toujours au cas où $k = 2$. On utilise, alors, le fait que $\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ où X, Y et Z représentent des blocs non-nuls.

[4]Les résultats des Lemmes 2.3 et 2.5 et du Corollaire 2.4 peuvent être vus comme des cas de représentation des fonctions de matrices. Le lecteur est référé à Golub and Von Loan [7, pp. 555-562] et les papiers qui y sont cités en référence pour plus d'information sur les fonctions de matrices.

- On procède par récurrence, pour démontrer l'égalité (2.6). Pour k=1, on a

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\inf(1,l_i)-1} N_{ii}^s \sum_{h=i+1}^{j} N_{ih}(N^{-s})_{hj} &= N_{ii}^0 \sum_{h=i+1}^{j} N_{ih}(N^0)_{hj}, \\ &= N_{ij},\end{aligned}$$

car $(N^0)_{hj} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad h < j \\ I_{m_i} & \text{si} \quad h = j \end{cases}$, ce qui prouve la formule pour $k = 1$. Supposons que l'égalité est vérifiée jusqu'à l'ordre k. Nous allons le démontrer pour l'ordre $k + 1$.

$$\begin{aligned}(N^{k+1})_{ij} &= (N\,N^k)_{ij}, \\ &= \sum_{p=0}^{r} N_{ip}(N^k)_{pj}, \quad (N \text{ et } N^k \text{ sont triangulaires supérieures}) \\ &= \sum_{p=i}^{j} N_{ip}(N^k)_{pj}, \\ &= N_{ii}(N^k)_{ij} + \sum_{p=i+1}^{j} N_{ip}(N^k)_{pj}, \quad \text{(par récurrence)}, \\ &= \sum_{s=0}^{\inf(k,l_i)-1} N_{ii}^{s+1} \sum_{h=i+1}^{j} N_{ih}(N^{k-s-1})_{hj} + \sum_{p=i+1}^{j} N_{ip}(N^k)_{pj}, \\ &= \sum_{s=1}^{\inf(k,l_i)} N_{ii}^{s} \sum_{h=i+1}^{j} N_{ih}(N^{k-s})_{hj} + \sum_{p=i+1}^{j} N_{ip}(N^k)_{pj}, \\ &= \sum_{s=0}^{\inf(k,l_i)} N_{ii}^{s} \sum_{h=i+1}^{j} N_{ih}(N^{k-s})_{hj}.\end{aligned}$$

Le fait que $\inf(k, l_i) = \inf(k + 1, l_i) - 1$ si $k \leq l_i - 1$, et $(N_{ii})^k = 0$ si $k \geq l_i$ prouve la formule du récurrence.

- Pour la formule (2.8), il suffit de constater que $((z - D)^{-1}N)_{ij} = (z - \lambda_i)^{-1}N_{ij}$, et que $(((z - D)^{-1}N)^{k-s-1})_{hj}$ n'admet pas de pôle en λ_i si $h \geq i + 1$ (évident d'après la forme triangulaire supérieure par bloc de N). □

Le but du corollaire suivant est de donner la forme explicite des blocs $\left((((z - D)^{-1}N)^k)(z - D)^{-1}\right)_{ij}$ de la matrice $\left(((z - D)^{-1}N)^k\right)(z - D)^{-1}$.

Corollaire 2.4

- $$\Big((((z-D)^{-1}N)^k)(z-D)^{-1}\Big)_{ii} = \begin{cases} 0 & si \quad l_i \leq k, \\ \frac{(N_{ii})^k}{(z-\lambda_i)^{k+1}} & si \quad k \leq l_i - 1. \end{cases} \tag{2.9}$$

- $$\Big((((z-D)^{-1}N)^k)(z-D)^{-1}\Big)_{ij}$$
$$= \frac{1}{z-\lambda_j} \sum_{s=0}^{\inf(k,l_i)-1} \frac{1}{(z-\lambda_i)^{s+1}} N_{ii}^s \sum_{h=i+1}^{j} N_{ih}(((z-D)^{-1}N)^{k-s-1})_{hj}$$
$$si\ 1+i \leq j \leq r. \tag{2.10}$$

- *Les éléments de* $(((z-D)^{-1}N)^k)(z-D)^{-1}$ *admettent des pôles en* λ_i *d'ordre inférieur ou égal à* l_i.

Démonstration

- L'égalité (2.9) est évidente.

- L'égalité (2.10) est une conséquence directe de (2.8) : il suffit de constater que multiplier à gauche par $(z-D)^{-1}$ revient à multiplier les blocs colonnes d'indice j par $(z-\lambda_j)^{-1}$.

- Sans perte de généralité, on va montrer que $((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}$ admet en λ_1 un pôle d'ordre inférieur ou égal à l_1.
Pour les autres λ_i, on peut trouver une matrice unitaire U telle que $(UJU^*)_{11}$ $=J_{ii}$ et donc cela nous ramène au cas de λ_1. On a

$$\Big((((z-D)^{-1}N)^k)(z-D)^{-1}\Big)_{1j} = \frac{1}{z-\lambda_j} \sum_{s=0}^{\inf(k,l_1)-1} \frac{1}{(z-\lambda_1)^{s+1}} N_{11}^s$$
$$\sum_{h=2}^{j} N_{1h}(((z-D)^{-1}N)^{k-s-1})_{hj}.$$

Il suffit alors de constater que $(((z-D)^{-1}N\ )^{k-s-1})_{hj}$ n'admet pas de pôle en λ_1 pour tout $h \geq 2$, puisque N est triangulaire supérieure.
Ceci termine la démonstration du corollaire. □

Soient α_{ij}, $\alpha_{ij}^{(k)}$ et $\tilde{\alpha}_{ij}^{(k)}$ les éléments respectifs de N, N^k et $((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}$ pour tout i et j tel que $i+1 \leq j \leq n$. Le but du lemme suivant est de donner les expressions de $\alpha_{ij}^{(k)}$ et $\tilde{\alpha}_{ij}^{(k)}$ en fonction de α_{ij}, de z et des valeurs propres de A.

Lemme 2.5 *Pour tout entier $k \geq 1$, on a :*

$$\alpha_{ij}^{(k)} = \sum_{i=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_k<j} \alpha_{i\sigma_2}\alpha_{\sigma_2\sigma_3}\ldots\alpha_{\sigma_k j}, \tag{2.11}$$

$$\tilde{\alpha}_{ij}^{(k)} = \frac{1}{z-\lambda_j} \sum_{i=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_k<j} \frac{\alpha_{i\sigma_2}}{(z-\lambda_i)}\frac{\alpha_{\sigma_2\sigma_3}}{(z-\lambda_{\sigma_2})}\cdots\frac{\alpha_{\sigma_k j}}{(z-\lambda_{\sigma_k})}. \tag{2.12}$$

Démonstration

- On procède par récurrence pour démontrer la formule (2.11).
  Pour $k = 1$, on a

  $$\alpha_{ij}^{(1)} = \sum_{i=\sigma_1<j} \alpha_{ij} = \alpha_{ij},$$

  ce qui prouve la formule pour $k = 1$.
  On suppose que la formule (2.11) est vérifiée jusqu'à l'ordre k. Nous allons le démontrer pour l'ordre $k+1$.

  $$\begin{aligned}
  \alpha_{ij}^{(k+1)} &= (NN^k)_{ij}, \\
  &= \sum_{p=i+1}^{j} \alpha_{ip}\alpha_{pj}^{(k)}, \ (N \text{ et } N^k \text{ triangulaires supérieures strictes}) \\
  &= \sum_{p=i+1}^{j} \alpha_{ip} \sum_{p=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_k<j} \alpha_{p\sigma_2}\alpha_{\sigma_2\sigma_3}\ldots\alpha_{\sigma_k j}, \quad \text{(par récurrence)}, \\
  &= \sum_{\sigma_1=i+1}^{j} \alpha_{i\sigma_1} \sum_{\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_k<j} \alpha_{\sigma_1\sigma_2}\alpha_{\sigma_2\sigma_3}\cdots\alpha_{\sigma_k j}, \\
  &= \sum_{(i=\sigma_0<\sigma_1<j)} \sum_{(\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_k<j)} \alpha_{i\sigma_1}\alpha_{\sigma_1\sigma_2}\alpha_{\sigma_2\sigma_3}\cdots\alpha_{\sigma_k j}, \\
  &= \sum_{i=\sigma_0<\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_k<j} \alpha_{i\sigma_1}\alpha_{\sigma_1\sigma_2}\alpha_{\sigma_2\sigma_3}\cdots\alpha_{\sigma_k j}, \\
  &= \sum_{i=\delta_1<\delta_2<\delta_3<\cdots<\delta_{k+1}<j} \alpha_{i\delta_2}\alpha_{\delta_2\delta_3}\cdots\alpha_{\delta_{k+1} j}.
  \end{aligned}$$

  Cela prouve la formule (2.11).

- Pour la preuve de la formule (2.12), il suffit de constater que $((z-D)^{-1}N)_{ij} = \alpha_{ij}/(z-\lambda_i)$ et que la multiplication par $(z-D)^{-1}$ à droite d'une matrice M quelconque revient à diviser le $j^{ième}$ vecteur colonne de M par $(z-\lambda_j)$.
  Ce qui finit la démonstration. □

Remarque 1 : Même si dans la formule (2.12), la somme est prise sur tous les termes possibles tels que $i = \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_k < j$, on peut montrer que cette somme porte seulement sur les termes faisant intervenir des produit $1/(z-\lambda_s)^{k_s}$ ayant un exposant k_s inférieur ou égal à l_s.

En effet, on va montrer cela pour λ_1 pour faciliter l'écriture. Pour les autres λ_i, cela revient au même.
Si $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_1$ alors $j \leq m_1$. Par suite on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{z-\lambda_j} \sum_{i=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_k<j} \frac{\alpha_{i\sigma_2}}{(z-\lambda_i)} \frac{\alpha_{\sigma_2\sigma_3}}{(z-\lambda_{\sigma_2})} \cdots \frac{\alpha_{\sigma_k j}}{(z-\lambda_{\sigma_k})}, \\
&= \frac{1}{(z-\lambda_1)^{k+1}} \sum_{i=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_k<j} \alpha_{i\sigma_2}\alpha_{\sigma_2\sigma_3}\cdots\alpha_{\sigma_k j}, \\
&= \frac{1}{(z-\lambda_1)^{k+1}} (N_{11}^k)_{ij}, \\
&= 0, \quad \text{si } k \geq l_1 - 1 \text{ car } N_{11}^{l_1} = 0.
\end{aligned}$$

Si $\lambda_j \neq \lambda_1$, cela implique que $j > m_1$ et par suite

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{z-\lambda_j} \sum_{i=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_k<j} \frac{\alpha_{i\sigma_2}}{(z-\lambda_i)} \frac{\alpha_{\sigma_2\sigma_3}}{(z-\lambda_{\sigma_2})} \cdots \frac{\alpha_{\sigma_k j}}{(z-\lambda_{\sigma_k})}, \\
&= \frac{1}{z-\lambda_j} \sum_{h=1}^{k} \sum_{i=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_h\leq m_1<\sigma_{h+1}<\cdots<\sigma_k<j} \frac{\alpha_{i\sigma_2}\cdots\alpha_{\sigma_h\sigma_{h+1}}}{(z-\lambda_1)^h} \\
&\qquad \frac{\alpha_{\sigma_{h+1}\sigma_{h+2}}}{z-\lambda_{h+1}} \cdots \frac{\alpha_{\sigma_k j}}{(z-\lambda_{\sigma_k})}, \\
&= \frac{1}{z-\lambda_j} \sum_{h=1}^{k} \sum_{i=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_h\leq m_1} \sum_{m_1<\sigma_{h+1}<\cdots<\sigma_k<j} \frac{\alpha_{i\sigma_2}\cdots\alpha_{\sigma_h\sigma_{h+1}}}{(z-\lambda_1)^h} \\
&\qquad \frac{\alpha_{\sigma_{h+1}\sigma_{h+3}}}{z-\lambda_{h+1}} \cdots \frac{\alpha_{\sigma_k j}}{(z-\lambda_{\sigma_k})}, \\
&= \frac{1}{z-\lambda_j} \sum_{h=1}^{k} \sum_{m_1<\sigma_{h+1}<\cdots<\sigma_k<j} \frac{\alpha_{\sigma_{h+1}\sigma_{h+3}}}{z-\lambda_{h+1}} \cdots \frac{\alpha_{\sigma_k j}}{(z-\lambda_{\sigma_k})} \\
&\qquad \sum_{i=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_h\leq m_1} \frac{\alpha_{i\sigma_2}\cdots\alpha_{\sigma_h\sigma_{h+1}}}{(z-\lambda_1)^h}, \\
&= \frac{1}{z-\lambda_j} \sum_{h=1}^{\inf(k,l_1)} \sum_{m_1<\sigma_{h+1}<\cdots<\sigma_k<j} \frac{\alpha_{\sigma_{h+1}\sigma_{h+3}}}{z-\lambda_{h+1}} \cdots \frac{\alpha_{\sigma_k j}}{(z-\lambda_{\sigma_k})} \\
&\qquad \frac{1}{(z-\lambda_1)^h} \sum_{i=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_h\leq m_1} \alpha_{i\sigma_2}\cdots\alpha_{\sigma_h\sigma_{h+1}}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que pour $h \geq l_1 + 1$, on a $\sum_{i=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_h \leq m_1} \alpha_{i\sigma_2} \cdots \alpha_{\sigma_h \sigma_{h+1}} = 0$, indépendemment de σ_{h+1}.
En effet, soit $p = \sigma_{h+1} > m_1$ fixé et $h \geq l_1 + 1$. On définit

$$\alpha_{(h,i,p)} \quad = \sum_{i=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_h \leq m_1} \alpha_{i\sigma_2} \cdots \alpha_{\sigma_h p}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \alpha_{(h,i,p)} &= \sum_{g=i+h}^{m_1} \Big(\sum_{i=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_{h-1}<g} \alpha_{i\sigma_2} \cdots \alpha_{\sigma_{h-1} g} \Big) \alpha_{gp}, \\ &= \sum_{g=i+h}^{m_1} \alpha_{ig}^{(h-1)} \alpha_{gp}. \end{aligned}$$

On a $\alpha_{(h,i,p)} = 0$ puisque $\alpha_{ig}^{(h-1)} = (N_{11}^{(h-1)})_{ig}$, et $N_{11}^{(h-1)} = 0$ pour toute $h-1 \geq l_1$.

On note et on définit $\mathcal{D}_{k,i,j}$ l'ensemble de toutes les permutations σ tel que $i = \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_k < j$ et tel que pour tout entier s entre i et j, l'ordre de $z - \lambda_s$ est inférieur ou égal à l_s dans le produit $(z-\lambda_i)(z-\lambda_{\sigma_2})\cdots(z-\lambda_{\sigma_k})(z-\lambda_j)$. Le corollaire suivant donne la forme explicite de $\alpha_{ij}^{(k)}$ et $\tilde{\alpha}_{ij}^{(k)}$.

Corollaire 2.6 *Pour tout entier $k \geq 1$, on a :*

$$\alpha_{ij}^{(k)} \quad = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_{k,i,j}} \alpha_{i\sigma_2} \alpha_{\sigma_2\sigma_3} \cdots \alpha_{\sigma_k j}. \tag{2.13}$$

$$\tilde{\alpha}_{ij}^{(k)} \quad = \quad \frac{1}{z-\lambda_j} \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_{k,i,j}} \frac{\alpha_{i\sigma_2}}{z-\lambda_i} \frac{\alpha_{\sigma_2\sigma_3}}{z-\lambda_{\sigma_2}} \cdots \frac{\alpha_{\sigma_k j}}{z-\lambda_{\sigma_k}}. \tag{2.14}$$

Démonstration

Le corollaire se déduit directement du lemme 2.5 et de la Remarque 1. $\square$

Avant de commencer la preuve de théorème 2.1, on rappelle que la norme spectrale, utilisée ici, satisfait les propriétés suivantes :

1. *Elle est absolue :* pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ donnée, on a [5]

$$\|A\|_2 \quad \leq \quad \| \, |A| \, \|_2 \tag{2.15}$$

[5] De la même manière, Horn and Johnson [10] définissent des normes vectorielles monotones et absolues, et prouvent l'équivalence entre ces deux notions dans le cas des normes vectorielles.

où $|A| = (|a_{ij}|)_{1\le i,j\le n}$ est la matrice formée par le module des coefficients de A.
En effet, soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. La norme euclidienne de x est $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$. Donc $\|x\|_2 = \|\,|x|\,\|_2$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$. Le fait que la norme spectrale est induite par la norme euclidienne sur un espace de dimension finie implique qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x\|_2 = 1$ et $\|A\|_2 = \|Ax\|_2$. Le transposé du vecteur Ax est $(Ax)^T = (\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j)$. Le fait que $\|Ax\|_2 = (\sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j|^2)^{1/2}$, et $|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| \le \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j|$ pour tout i, $1 \le i \le n$ prouvent que $\|A\|_2 = \|Ax\|_2 \le \|\,|A|\,|x|\,\|_2 \le \|\,|A|\,\|_2$.
Ceci prouve l'inégalité (2.15).

2. *Elle est monotone :* pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, et $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ données, telles que $0 \le b_{ij} \le a_{ij}$ pour tout i et j, $1 \le i,\, j \le n$, on a[6]

$$\|B\|_2 \;\le\; \|A\|_2. \tag{2.16}$$

En effet, ceci est dû au fait que pour une matrice réelle B d'éléments positifs donnés, la norme spectrale $\|B\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2}$ de B est atteinte pour un vecteur réel positif x, c'est-à-dire qu'il existe $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ tel que $\|x\|_2 = 1$, $x_i \in \mathbb{R}$ et $x_i \ge 0$ pour tout i, $1 \le i \le n$ et $\|B\|_2 = \|Bx\|_2$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_2 = 1$ et $x_i \ge 0$ pour tout i, $1 \le i \le n$, et $\|B\|_2 = \|Bx\|_2$. Le fait que $0 \le b_{ij} \le a_{ij}$ pour tout i et j, $1 \le i,\, j \le n$, implique que $\|Bx\|_2 \le \|Ax\|_2$. Or, le fait que $\|B\|_2 = \|Bx\|_2$ implique que $\|B\|_2 = \|Bx\|_2 \le \|Ax\|_2 \le \|A\|_2$.
Ceci prouve l'inégalité (2.16).[7]

Démonstration du théorème 2.1

On a

$$\begin{aligned}(z-A)^{-1} &= Q\left(\sum_{k=0}^{n-1}((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}\right)Q^*,\\ &= Q\left(\sum_{k=0}^{\nu-1}((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}\right)Q^*.\end{aligned}$$

[6]Dans ce que suit, on note $B \le A$ si $b_{ij} \le a_{ij}$ pour tout i et j, $1 \le i,\, j \le n$.

[7]Soit $\|\,.\,\|$ une norme vérifiant $\|x\| = \|\,|x|\,\|$, $\forall x \in \mathbb{C}$. Il est facile de montrer que la norme induite par $\|\,.\,\|$ est monotone et absolue. Les normes vectorielles $\|\,.\,\|_2$, $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^n$ vérifient cette condition, donc les normes induites respectives vérifient les propriétés (2.15) et (2.16).

En effet $((z-D)^{-1}N)^{\nu}=0$, d'après la formule (2.4). D'où

$$\begin{aligned}
\|(z-A)^{-1}\|_2 &= \|Q\left(\sum_{k=0}^{\nu-1}((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}\right)Q^*\|_2,\\
&= \|\left(\sum_{k=0}^{\nu-1}((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}\right)\|_2\\
&\quad \text{(puisque } \|\,.\,\|_2 \text{ est une norme unitairement invariante),}\\
&\leq \sum_{k=0}^{\nu-1}\|((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}\|_2.
\end{aligned}$$

Pour achever la preuve, il faut montrer que

$$\|((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}\|_2 \leq \left(\max_{\substack{\sum_{i=1}^r \delta_i=k+1;\\ 0\leq\delta_i\leq l_i}} \prod_{i=1}^r |z-\lambda_i|^{-\delta_i}\right)\||N|^k\|_2. \quad (2.17)$$

Pour cela, il suffit de regarder les coefficients $\left(((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}\right)_{ij}$ de la matrice $((z-D)^{-1}N)^k\,(z-D)^{-1}$. On définit

$$\mathcal{P}_k = \max_{\substack{\sum_{i=1}^r \delta_i=k+1;\\ 0\leq\delta_i\leq l_i}} \prod_{i=1}^r |z-\lambda_i|^{-\delta_i}.$$

Le but de ce que suit est de démontrer que le module du coefficient $\left(((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}\right)_{ij}$ de la matrice $((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}$ est plus petit que le produit de $\mathcal{P}_k$ par le coefficient $(|N|^k)_{ij}$ de la matrice $|N|^k$, pour tout i, j tel que $1\leq i,\ j\leq n$. En effet, soit i et j donnés, on a

$$\begin{aligned}
&|(((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1})_{ij}|\\
&= |\frac{1}{z-\lambda_j}\sum_{\sigma\in\mathcal{D}_{k,i,j}}\frac{\alpha_{i\sigma_2}}{z-\lambda_i}\frac{\alpha_{\sigma_2\sigma_3}}{z-\lambda_{\sigma_2}}\cdots\frac{\alpha_{\sigma_k j}}{z-\lambda_{\sigma_k}}|,\\
&\leq \mathcal{P}_k\sum_{\sigma\in\mathcal{D}_{k,i,j}}|\frac{1}{\mathcal{P}_k(z-\lambda_j)}\frac{\alpha_{i\sigma_2}}{z-\lambda_i}\frac{\alpha_{\sigma_2\sigma_3}}{z-\lambda_{\sigma_2}}\cdots\frac{\alpha_{\sigma_k j}}{z-\lambda_{\sigma_k}}|,\\
&\leq \mathcal{P}_k\sum_{\sigma\in\mathcal{D}_{k,i,j}}|\alpha_{i\sigma_2}\alpha_{\sigma_2\sigma_3}\cdots\alpha_{\sigma_k j}|,\\
&\leq \mathcal{P}_k\sum_{i=\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_k<j}|\alpha_{i\sigma_2}\alpha_{\sigma_2\sigma_3}\cdots\alpha_{\sigma_k j}|,\\
&\leq \mathcal{P}_k(|N|^k)_{ij}.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que pour tout i et j tel que $1 \leq i,\ j \leq n$, on a $|(((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1})_{ij}| \leq \mathcal{P}_k(|N|^k)_{ij}$.

L'inégalité (2.17) est une conséquence directe de deux propriétés de la norme spectrale et du fait que $|((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}| \leq \mathcal{P}_k|N|^k$. En effet

$$\begin{aligned}
\|((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}\|_2 &\leq \|\,|((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}|\,\|_2, \text{ (d'après (2.15))} \\
&\leq \left(\max_{\substack{\sum_{i=1}^r \delta_i = k+1; \\ 0 \leq \delta_i \leq l_i}} \prod_{i=1}^r |z-\lambda_i|^{-\delta_i} \right) \||N|^k\|_2.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est due au fait que $|((z-D)^{-1}N)^k(z-D)^{-1}| \leq \mathcal{P}_k|N|^k$ et à (2.16). Ceci prouve l'inégalité (2.17), et achève la démonstration du théorème 2.1. $\square$

Le corollaire suivant donne une majoration de la norme de la résolvante $\|(z-A)^{-1}\|_2$ de la matrice A en un point z proche d'une valeur propre λ_1 de A.

Corollaire 2.7 *Soient $d_i = |\lambda_i - \lambda_1|$ pour tout i tel que $2 \leq i \leq r$. Les d_i sont supposés tels que $d_2 \leq \cdots \leq d_r$. Soit z tel que $0 < |z-\lambda_1| \leq s$ avec $0 \leq s \leq d_2/2$. Alors*

$$\begin{aligned}
\|(z-A)^{-1}\|_2 &\leq \sum_{k=0}^{l_1-2} \frac{\||N|^k\|_2}{|z-\lambda_1|^{k+1}} + \frac{1}{|z-\lambda_1|^{l_1}}(\||N|^{l_1-1}\|_2 + \\
&\quad \sum_{j=2}^{r} \sum_{\sigma=0}^{l_j-1} \frac{\||N|^{l_1+\sigma+\sum_{k=2}^{j-1} l_k}\|_2}{(d_j-s)^{\sigma+1}\prod_{k=2}^{j-1}(d_k-s)^{l_k}}).
\end{aligned}$$

Démonstration

C'est une conséquence directe du théorème 2.1, et du fait que le terme de droite de l'inégalité (2.2) soit inférieur ou égal à celui de l'inégalité du corollaire. En effet

$$\begin{aligned}
\|(z-A)^{-1}\|_2 &\leq \sum_{k=0}^{l_1-2} \frac{\||N|^k\|_2}{|z-\lambda_1|^{k+1}} + \frac{1}{|z-\lambda_1|^{l_1}}(\||N|^{l_1-1}\|_2 + \\
&\quad \sum_{k=l_1}^{\nu-1} (\max_{\substack{\sum_{i=2}^r \delta_i = k+1-l_1; \\ 0 \leq \delta_i \leq l_i}} \prod_{i=2}^r |z-\lambda_i|^{-\delta_i}) \||N|^k\|_2).
\end{aligned}$$

Soient les entiers $\sigma_2, \ldots, \sigma_r$ tel que $|z-\lambda_{\sigma_2}| \leq \cdots \leq |z-\lambda_{\sigma_r}|$, alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=l_1}^{\nu-1} \left(\max_{\substack{\sum_{i=2}^{r} \delta_i = k+1-l_1;\\ 0\leq\delta_i\leq l_i}} \prod_{i=2}^{r} |z-\lambda_i|^{-\delta_i} \right) \| |N|^k \|_2 \\
&= \sum_{j=2}^{r} \sum_{\sigma=0}^{l_{\sigma_j}-1} \frac{\| |N|^{l_1+\sigma+\sum_{k=2}^{j-1} l_{\sigma_k}} \|_2}{|z-\lambda_{\sigma_j}|^{\sigma+1} \prod_{k=2}^{j-1} |z-\lambda_{\sigma_k}|^{l_{\sigma_k}}}, \\
&\leq \sum_{j=2}^{r} \sum_{\sigma=0}^{l_{\sigma_j}-1} \frac{\| |N|^{l_1+\sigma+\sum_{k=2}^{j-1} l_{\sigma_k}} \|_2}{(d_{\sigma_j}-s)^{\sigma+1} \prod_{k=2}^{j-1} (d_{\sigma_k}-s)^{l_{\sigma_k}}}, \\
&\leq \sum_{j=2}^{r} \sum_{\sigma=0}^{l_j-1} \frac{\| |N|^{l_1+\sigma+\sum_{k=2}^{j-1} l_k} \|_2}{(d_j-s)^{\sigma+1} \prod_{k=2}^{j-1} (d_k-s)^{l_k}},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la démonstration. □

3 Application : norme de l'inverse d'une matrice

En s'appuyant sur le théorème 2.1, on peut avoir une approximation raisonnable de la norme de l'inverse de A dans le cas où A est inversible.

Corollaire 3.1 *Si A est inversible, et si l'on ordonne les valeurs propres de sorte que $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_r|$, alors*

$$\|A^{-1}\|_2 \leq \sum_{i=1}^{r} \sum_{\sigma=1}^{l_i} \frac{\| |N|^{l_1+\cdots+l_{i-1}+\sigma} \|_2}{|\lambda_1|^{l_1} \cdots |\lambda_{i-1}|^{l_{i-1}} |\lambda_i|^{\sigma}}. \tag{3.1}$$

Démonstration

C'est une conséquence directe du Théorème 2.1, obtenue en prenant $z = 0$ et en utilisant le fait que $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_r|$. □

A notre connaissance, la seule majoration existant pour la norme de l'inverse d'une matrice A inversible est due à Henrici [9, p. 30].

$$\|A^{-1}\|_2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|N\|_2^k}{|\lambda_1|^{k+1}}.$$

La différence entre notre résultat et celui dû à Henrici est que le nôtre utilise $|\lambda_1|^{l_1}$ où l_1 est l'indice de λ_1 et fait intervenir les autres λ_i. En revanche, Henrici n'utilise que $|\lambda_1|^n$. De plus, nous utilisons $\||N|^k\|_2$ au lieu de $\|N\|_2^k$, ce qui affine la borne car généralement $\||N|^k\|_2 \leq \|N\|_2^k$ pour k suffisamment grand (voir l'Exemple 2.1 étudié précédemment).

La majoration (3.1) donne un résultat meilleur que celui de Henrici ou du même ordre de grandeur :

Exemple 3.1 *Prenons pour A_0 une matrice de taille* 12 *et de type défini dans l'exemple 2.2. Pour $\delta > 0$, on considère $A_\delta = A_0 + \delta I$ où I est la matrice identité, A_δ est inversible de valeurs propres δ et $1+\delta$. La majoration* (3.1) *donne*

$$\|A_\delta^{-1}\|_2 \quad \leq \quad \frac{1}{\delta} + \frac{\||N_0|\|_2}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^3}(\||N_0|^2\|_2 + \frac{\||N_0|^3\|_2}{1+\delta} + \frac{\||N_0|^4\|_2}{(1+\delta)^2}).$$

Si l'on utilise le résultat de Henrici, on obtient alors

$$\|A_\delta^{-1}\|_2 \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{11} \frac{\|N_0\|_2^k}{\delta^{k+1}}.$$

La majoration de Henrici peut être rendue arbitrairement plus grande que la nôtre si $\delta \ll 1$. En effet, la majoration de Henrici fait intervenir $1/\delta^{11}$ par contre la notre ne fait intervenir que $1/\delta^3$. △

4 Variation des valeurs propres

Dans cette partie, nous donnons une approximation de la variation $|\Delta\lambda_i|$ d'une valeur propre λ_i de A résultant d'une perturbation $\Delta A = (\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de A. Dans un premier temps, nous rappelons les principaux résultats qui existent dans la littérature.

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. On considère le groupe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. On note $k = \max_{1\leq i,j\leq m} |\lambda_i - \lambda_j|$ soit $k_j = \min_{i\leq m} |\lambda_i - \lambda_j|$. Les k_j sont supposés tel que $0 < k_{m+1} \leq k_{m+2} \leq \cdots \leq k_n$. Alors pour tout réel positif q tel que $q < k_{m+1}$, on pose $\sigma^2 = (\|N\|_F + q)^2 + (m-1)q^2$ et $k'_j = k_j - q$, $j > m$. Van der Sluis a prouvé que si $\|\Delta A\|_F \leq q^m/\beta$, on a pour tout i, $1 \leq i \leq m$,

$$|\Delta\lambda_i| \quad \leq \quad k + (\|\Delta A\|_F \beta)^{1/m}, \tag{4.1}$$

où $\beta = \exp(\frac{1}{2}(\sigma/k'_2)^2)$ si $m = 1$, et $\beta = \frac{1}{\prod_{m+1}^{s} k'_j}(\frac{\sum_{m+1}^{s} {k'}_j^2 + \sigma^2}{s-1})^{\frac{s-1}{2}}$ sinon, et où $s = n$ ou $s \geq m$ tel que $\sum_{m+1}^{s} {k'_j}^2 + \sigma^2 \leq (s-1){k'_{s+1}}^2$.

En résumé, si λ est une valeur propre de multiplicité m située suffisamment loin des autres valeurs propres, alors $|\Delta\lambda| \leq (\|\Delta A\|_F \beta)^{1/m}$.

Dans ce paragraphe, nous proposons une majoration raisonnable de $|\Delta\lambda|$, qui fait intervenir l'indice l de la valeur propre λ et non sa multiplicité, à l'inverse de (4.1), soit : $|\Delta\lambda| \leq c\|\Delta A\|_2^{1/l}$ où c est une constante qui dépend de l, de la distance entre λ et les autres valeurs propres de A et des normes des puissances successives de $|N|$.

Nous reprenons les notations du théorème 2.1. Les quantités $d_i = |\lambda_i - \lambda_1|$, pour tout i tel que $2 \leq i \leq r$, sont supposées ordonnées de sorte que $d_2 \leq \cdots \leq d_r$. Soit $s \leq d_2/2$. On considère $\Delta A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $z = \lambda_1 + \Delta\lambda_1$ une valeur propre de $A + \Delta A$ telle que $|z - \lambda_1| \leq s$. Le théorème suivant propose une majoration de $|\Delta\lambda_1|$.

Théorème 4.1

$$\begin{aligned}|\Delta\lambda_1| \quad \leq \quad & \|\Delta A\|_2^{\frac{1}{l_1}} (s^{l_1-1} + s^{l_1-2}\||N|\|_2 + \cdots + s\||N|^{l_1-2}\|_2 + \\ & \||N|^{l_1-1}\|_2 + \sum_{j=2}^{r}\sum_{\sigma=0}^{l_j-1} \frac{\||N|^{l_1+\sigma+\sum_{k=2}^{j-1} l_k}\|_2}{(d_j - s)^{\sigma+1}\prod_{k=2}^{j-1}(d_k - s)^{l_k}})^{\frac{1}{l_1}}. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

Démonstration

Soit $z = \lambda_1 + \Delta\lambda_1$ une valeur propre de $A + \Delta A$. Alors $0 = \det(z - A - \Delta A) = \det(z - A)\det(I - (z - A)^{-1}\Delta A)$. Or $\det(z - A) \neq 0$. Cela implique que $\det(I - (z - A)^{-1}\Delta A) = 0$. Par suite $1 \in \sigma((z - A)^{-1}\Delta A)$, donc $\|(z - A)^{-1}\|_2 \, \|\Delta A\|_2 \geq \|(z - A)^{-1}\Delta A\|_2 \geq 1$. En utilisant le théorème 2.1 et le fait que $|z - \lambda_1| \leq s$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|\Delta A\|_2} \quad & \leq \quad \|(z - A)^{-1}\|_2, \\ & \leq \quad \frac{1}{|z-\lambda_1|} + \frac{\||N|\|_2}{|z-\lambda_1|^2} + \cdots + \frac{\||N|^{l_1-2}\|_2}{|z-\lambda_1|^{l_1-1}} + \frac{1}{|z-\lambda_1|^{l_1}} \\ & \quad \left(\||N|^{l_1-1}\|_2 + \sum_{k=l_1}^{\nu-1} \||N|^k\|_2 \max_{\substack{\sum_{i=2}^r \delta_i = k+1-l_1; \\ 0\leq\delta_i\leq l_i}} \prod_{i=1}^{r} |z-\lambda_i|^{-\delta_i}\right), \\ & \leq \quad \frac{1}{|z-\lambda_1|} + \frac{\||N|\|_2}{|z-\lambda_1|^2} + \cdots + \frac{\||N|^{l_1-2}\|_2}{|z-\lambda_1|^{l_1-1}} + \frac{1}{|z-\lambda_1|^{l_1}} \\ & \quad \left(\||N|^{l_1-1}\|_2 + \sum_{j=2}^{r}\sum_{\sigma=0}^{l_j-1} \frac{\||N|^{l_1+\sigma+\sum_{k=2}^{j-1} l_k}\|_2}{(d_j - s)^{\sigma+1}\prod_{k=2}^{j-1}(d_k - s)^{l_k}}\right).\end{aligned}$$

La dernière inégalité est due au corollaire 2.7. On pose

$$\alpha_{l_1} = \||N|^{l_1-1}\|_2 + \sum_{j=2}^{r}\sum_{\sigma=0}^{l_j-1} \frac{\||N|^{l_1+\sigma+\sum_{k=2}^{j-1} l_k}\|_2}{(d_j-s)^{\sigma+1}\prod_{k=2}^{j-1}(d_k-s)^{l_k}}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\Delta A\|_2} &\leq \frac{1}{|z-\lambda_1|} + \frac{\||N|\|_2}{|\lambda-\lambda_1|^2} + \cdots + \frac{\||N|^{l_1-2}\|_2}{|z-\lambda_1|^{l_1-1}} + \frac{\alpha_{l_1}}{|z-\lambda_1|^{l_1}}, \\
&= \frac{1}{|\Delta\lambda_1|^{l_1}}(|\Delta\lambda_1|^{l_1-1} + |\Delta\lambda_1|^{l_1-1}\||N|\|_2 + \cdots \\
&\qquad + |\Delta\lambda_1|^2\||N|^{l_1-1}\|_2 + \alpha_{l_1}), \\
&\leq \frac{1}{|\Delta\lambda_1|^{l_1}}(s^{l_1-1} + s^{l_1-1}\||N|\|_2 + \cdots + s^2\||N|^{l_1-1}\|_2 + \alpha_{l_1}).
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$|\Delta\lambda_1| \leq \|\Delta A\|_2^{1/l_1}(s^{l_1-1} + s^{l_1-1}\||N|\|_2 + \cdots + s^2\||N|^{l_1-1}\|_2 + \alpha_{l_1})^{1/l_1}.$$

Ce qui achève la démonstration. □

5 Conditionnement des valeurs propres

Dans ce paragraphe, nous rappelons les résultats existants sur le conditionnement d'une valeur propre simple et sur le conditionnement Hölderien d'une valeur propre défective λ d'une matrice A.

Notre but est d'obtenir une majoration raisonnable du conditionnement Hölderien $C_{1/l}(\lambda)$ dans le cas où λ est une valeur propre d'indice l : comme pour les résultats établis précédemment cette majoration fera intervenir l, les normes des puissances successives de $|N|$ et la distance entre λ et chacune des autres valeurs propres de A. Nous montrerons ensuite que $\left(C_{1/l}(\lambda)\right)^l = \lim_{z\to\lambda}|z-\lambda|^l\|(z-A)^{-1}\|_2$.

Soient $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, λ une valeur propre de A, et x et y sont respectivement le vecteur propre droit et gauche de A associés à λ. Dans le cas où λ est simple, le conditionnement $C_W(\lambda)$ de la valeur propre λ, définie comme la borne supérieure des modules de la perturbation du premier ordre de λ au sens de Wilkinson [16], est

$$C_W(\lambda) = \frac{\|x\|_2\,\|y\|_2}{|y^*x|}. \tag{5.1}$$

Dans Chaitin-Chatelin and Frayssé [1], le conditionnement d'une valeur propre simple λ est définie par : $C(\lambda) = \lim_{\delta\to 0}\sup_{\|\Delta A\|\leq\delta}\frac{|\Delta\lambda|}{\|\Delta A\|}$ où $\lambda + \Delta\lambda$ est la valeur propre de $A+\Delta A$ approchant λ, et $\|\,.\,\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{C}^{n\times n}$. On note $\|\,.\,\|_*$ la norme duale de $\|\,.\,\|$. On vérifie que $C(\lambda) = \frac{\|x\|\,\|y\|_*}{|y^*x|}$ [1, p. 47].

Avant de poursuivre, nous donnons la définition du δ-conditionnement Hölderien et du conditionnement Hölderien d'une valeur propre multiple λ d'indice l d'une matrice A. [8]
Soit $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, et λ une valeur propre d'indice l. Soit $\tilde\lambda = \lambda+\Delta\lambda$ une valeur propre de $A+\Delta A$ rapprochant λ quand $\Delta A\to 0$. Il est facile de remarquer que $|\Delta\lambda| = |\tilde\lambda-\lambda| \leq c\|\Delta A\|^{\frac{1}{l}}$ pour une petite perturbation ΔA et que λ est une fonction hölderienne de A d'ordre $1/l$.

Définition 5.1 *a. le δ-conditionnement Hölderien de λ est*

$$C_{\delta(1/l)}(\lambda) \quad = \sup_{\Delta A,\, 0<\|\Delta A\|\leq\delta}\frac{|\Delta\lambda|}{\|\Delta A\|^{\frac{1}{l}}}. \tag{5.2}$$

b. le conditionnement Hölderien de λ est

$$C_{1/l}(\lambda) \quad = \quad \lim_{\delta\to 0} C_{\delta(1/l)}(\lambda) \quad = \quad \lim_{\delta\to 0}\sup_{\Delta A,\, 0<\|\Delta A\|\leq\delta}\frac{|\Delta\lambda|}{\|\Delta A\|^{\frac{1}{l}}}. \tag{5.3}$$

Il y a eu plusieurs travaux pour estimer le conditionnement d'une valeur propre multiple λ d'une matrice A et de fournir une relation entre celui-ci et le conditionnement de la base de Jordan de A ou de la norme de la matrice N. Nous allons, dans un premier temps, rappeler les trois résultats que nous estimons les plus intéressants. Le premier est dû à Smith dans le cas d'une valeur propre simple. Le deuxième est dû à Chatelin dans le cas d'une valeur propre multiple. Le troisième, dû à Moro, Burke et Overton donne le conditionnement d'une valeur propre multiple en fonction de certains vecteurs propres à gauche et à droite choisis à partir de la base de Jordan de A. Ce conditionnement revient au résultat de Wilkinson (5.1) dans le cas d'une valeur propre simple ; il est valable seulement pour le cas d'une norme unitairement invariante normalisée. [9] On note que Moro, Burke et Overton utilisent une définition du conditionnement Hölderien analogue à celle utilisée par Wilkinson dans le cas d'une valeur propre simple et non celle de la

[8] La définition générale du δ-conditionnement Hölderien et du conditionnement Hölderien d'une application Hölderienne est donnée dans Chaitin-Chatelin and Frayssé [1, p. 58].

[9] Une norme $\|\,.\,\|$ unitairement invariante est normalisée si $\|e_1e_1^T\| = 1$ où e_1 est le premier vecteur de la base canonique (voir Stewart et Sun [15, pp. 74-89] pour plus de détails).

Définition 5.1.

Smith [14] a prouvé que si λ_j est une valeur propre simple de A, alors

$$C(\lambda_j) \quad \leq \quad (1 + \frac{1}{n-1}(\frac{\|N\|_F}{d_j})^2)^{\frac{n-1}{2}} = C_S(\lambda_j), \tag{5.4}$$

où $\| \,.\, \|_F$ est la norme de Frobenius, $d_j = \min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|$, et N est la matrice triangulaire supérieure stricte de la forme de Schur de A.

Soient $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, λ une valeur propre de A d'indice l et de multiplicité m. On note M (resp., M_*) le sous-espace invariant à droite (resp., gauche) de A associé à λ de dimension m. Soit W une base orthonormale de M, X_* une base de M_* normalisée par $W^* X_* = I$. Chatelin [2] a donné une majoration du conditionnement Hölderien de λ par

$$C_{1/l}(\lambda) \quad \leq \quad 2(\mathrm{cond}_2(V) \|X_*\|_2)^{1/l}, \tag{5.5}$$

où $\mathrm{cond}_2(V) = \|V\|_2 \, \|V^{-1}\|_2$ et V est la base de Jordan de $A_{|M}$.

Soit X (resp., J) la base (resp., forme) de Jordan de la matrice A. Soit λ une valeur propre multiple de A d'indice $l \geq 1$. Soit r le nombre de blocs de Jordan distincts de taille l associés à λ. Soit $U \in \mathbb{C}^{n \times r}$ la matrice dont les r colonnes sont les r vecteurs propres à droite associés à λ qui correspondent aux colonnes de X associées aux chaînes de Jordan de taille l. De la même manière soit $V \in \mathbb{C}^{r \times n}$ la matrice dont les r lignes sont les r vecteurs propres à gauche associés à λ qui correspondent aux lignes de X^{-1} associées aux chaînes de Jordan de taille l.

Moro, Burke et Overton [12] définissent le conditionnement Hölderien d'une valeur propre λ d'indice $l \geq 1$ par

$$C_{1/l}(\lambda) \quad = \quad \max_{B \neq 0} \lim_{t \to 0} \frac{|\lambda(t) - \lambda|}{|t|^{\frac{1}{l}} \|B\|^{\frac{1}{l}}} \tag{5.6}$$

où $\lambda(t)$ est une valeur propre de $A + tB$ qui tend vers λ quand $t \to 0$. Il faut noter que, pour des fonctions à régularité hölderienne quelconques, les définitions (5.6) et (5.3) sont différentes, et peuvent amener à deux résultats différents (voir Harrabi [8]). Néanmoins, dans le cas de valeurs propres les définitions (5.3) et (5.6) conduisent à une unique valeur du conditionnement (5.6).

Dans les notations introduites ci-dessus et grâce à un théorème dû à Lidskii, les auteurs de papier montrent que le conditionnement Hölderien donné par la formule (5.6) de λ est

$$C_{1/l}(\lambda) \;=\; \max_{\|B\|\leq 1} \{|z| : z \text{ est une valeur propre de } VBU\}$$

Dans le cas d'une norme unitairement invariante normalisée, on montre alors que : [10]

$$C_{1/l}(\lambda) \;=\; \|UV\|_2^{\frac{1}{l}}. \tag{5.7}$$

On vérifie que la formule (5.7) donne bien le conditionnement Hölderien au sens de la définition (5.3) d'une valeur propre multiple défective λ d'indice l dans le cas de la norme spectrale, $\| \,.\, \|_2$ [11] (voir, aussi, Harrabi [8] pour plus d'informations).

L'égalité (5.7) utilise des informations contenues dans la base de Jordan de A, ce qui rend le conditionnement difficile à évaluer numériquement. C'est pourquoi nous donnons une majoration du conditionnement Hölderien d'une valeur propre basée sur la forme de Schur de la matrice A.

Théorème 5.1 *Les quantités $d_i = |\lambda_i - \lambda_1|$ sont supposées telles que $d_2 \leq \cdots \leq d_r$. Soit $0 < s \leq d_2/2$. Soit $\delta > 0$ tel que pour toute perturbation $\Delta A \in C^{n\times n}$ où $\|\Delta A\|_2 \leq \delta$ et pour tout $z \in \sigma(A + \Delta A)$ tendant vers λ_1 quand δ tend vers 0, on a $0 < |z - \lambda_1| \leq s$. Alors*

$$C_{\delta(1/l_1)}(\lambda_1) \;\leq\; (\sum_{k=1}^{l_1-1} s^{l_1-k}\||N|^{k-1}\|_2 + \alpha_{l_1})^{1/l_1}, \tag{5.8}$$

où $\alpha_{l_1} = \||N|^{l_1-1}\|_2 + \sum_{j=2}^{r} \sum_{\sigma=0}^{l_j-1} \frac{\||N|^{l_1+\sigma+\sum_{k=2}^{j-1} l_k}\|_2}{(d_j-s)^{\sigma+1}\prod_{k=2}^{j-1}(d_k-s)^{l_k}}$. *De plus,*

$$C_{1/l_1}(\lambda_1) \;\leq\; \left(\||N|^{l_1-1}\|_2 + \sum_{j=2}^{r}\sum_{\sigma=0}^{l_j-1} \frac{\||N|^{l_1+\sigma+\sum_{k=2}^{j-1} l_k}\|_2}{d_j^{\sigma+1}\prod_{k=2}^{j-1} d_k^{l_k}}\right)^{1/l_1}. \tag{5.9}$$

Remarque

On note que le théorème précédent et en particulier la borne supérieure du conditionnement Hölderien (5.9) restent valables pour le cas de la norme de

[10] Même si Moro, Burke et Overton [12] n'indiquent pas si la norme choisie est normalisée ou pas, malheureusement, leur démonstration est valable seulement dans le cas d'une norme unitairement invariante *normalisée*.

Frobenius ($\| . \|_F$), puisque cette dernière norme comme la norme spectrale est unitairement invariante et vérifie les deux inégalités (2.15) et (2.16) utilisées pour la démonstration du théorème 2.1 (voir les remarques à la fin pour plus de détails).

Démonstration

- L'inégalité (5.8) est une conséquence directe du théorème 4.1.
- Pour prouver l'inégalité (5.9), il suffit de constater que $s \to 0$ si $\delta \to 0$. Ce qui prouve le théorème. $\square$

Chatelin a montré que $C(\lambda) = \lim_{z \to \lambda_1} |z - \lambda| \, \|(z - A)^{-1}\|$, dans le cas où λ est une valeur propre simple ou semi-simple [1, p. 70]. Dans ce troisième paragraphe, nous généralisons ce dernier résultat dans le cas d'une valeur propre multiple défective. Dans le cas où la norme spectrale est utilisée, nous prouverons grâce à (5.7) que $C_{1/l}(\lambda) = \lim_{z \to \lambda} |z - \lambda| \, \|(z - A)^{-1}\|_2^{1/l}$.

Théorème 5.2 *Soit λ une valeur propre de A d'indice l. Alors*

$$(C_{1/l}(\lambda))^l \;=\; \lim_{z \to \lambda} |z - \lambda|^l \|(z - A)^{-1}\|_2. \tag{5.10}$$

On note que la formule (5.10) donne une bonne information sur la relation entre l'instabilité spectrale et la norme de la résolvante. En effet, la formule (5.10) montre que la norme de la résolvante se comporte comme $1/(z-\lambda)^l$ au voisinage de la valeur propre λ. De plus, le quotient $\|(z-A)^{-1}\|_2/(1/|z-\lambda|^l)$ est d'autant plus grand que le conditionnement hölderien de λ l'est.

Démonstration

On garde les notations utilisées auparavant. Soit $A = XJX^{-1}$. On pose $Y = X^{-1}$. Alors $|z - \lambda|^l \|(z - A)^{-1}\|_2 = \|X(z - \lambda)^l (z - J)^{-1} Y\|_2$. Soit $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = \lim_{z \to \lambda} (z - \lambda)^l (z - J)^{-1}$. On suppose, sans perte de généralité, que la forme de Jordan J de A est telle que les r premiers blocs de Jordan sont ceux associés à λ et de taille l. Alors $b_{il\,1+(i-1)l} = (-1)^{l-1}$ et $b_{ij} = 0$ sinon. Ceci implique que $\lim_{z \to \lambda} |z - \lambda|^l \|(z - A)^{-1}\|_2 = \|XBY\|_2$. Il est simple de vérifier que $XBY = (-1)^{l-1} UV$. Or d'après (5.7), on a $C_{1/l}(\lambda) = \|UV\|_2^{1/l}$. Ceci finit la démonstration du théorème. $\square$

La forme de Jordan est instable et difficile à calculer. La comparaison numérique est donc difficile en général entre (5.5), (5.7) et (5.9) dans le cas d'une valeur propre multiple.

L'exemple suivant donne les conditionnements et les majorants des conditionnements des valeurs propres de la matrice de Ruhe pour laquelle les forme et base de Jordan sont connues explicitement.

valeur propre λ	1	2	3
Indice l de λ	1	3	2
$C_{1/l}(\lambda)$: (5.7)	28	2	8
majoration (5.5)	28	10	40
majoration (5.9)	887	11	34

Tableau 2: *Le conditionnement et les bornes du conditionnement des trois valeurs propres* 1, 2 *et* 3 *de la matrice de Ruhe.*

Exemple 5.1 *Soit R la matrice définie par :*

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -2 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -4 & 2 & -2 & 4 & -4 & 8 & -6 \\ -1 & 0 & 5 & -5 & 3 & -3 & 6 & -6 & 12 & -9 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 4 & -4 & 8 & -8 & 16 & -12 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 5 & -4 & 10 & -10 & 20 & -15 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -2 & 12 & -12 & 24 & -18 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -5 & 15 & -13 & 28 & -21 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -5 & 12 & -11 & 32 & -24 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -5 & 12 & -14 & 37 & -26 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -5 & 12 & -14 & 36 & -25 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice, due à Ruhe, admet 1, 2 *et* 3 *comme valeurs propres. La valeur propre* 1 *est simple, la valeur propre* 2 *admet deux blocs de Jordan d'ordre* 3 *et* 2, *et la valeur propre* 3 *admet deux blocs de Jordan d'ordre* 2. *Le tableau* 2 *rapporte le conditionnement des valeurs propres* 1, 2 *et* 3 *et les majorations de ces conditionnements. On note que le conditionnement de la valeur propre* 1 *donné par Smith $C_S(1)$ est de l'ordre de 10^{14} en norme de Frobenius. Par contre, la majoration du conditionnement donnée par* (5.9) *pour la même valeur propre* 1 *en norme de Frobenius est de l'ordre de* 887.

Le calcul de (5.10) est difficile parce qu'il fait intervenir l'inverse d'une matrice proche d'une matrice singulière.

Par suite, le seul cas de comparaison numérique possible est celui entre l'inégalité (5.9) et le résultat de Smith (5.4) dans le cas d'une valeur propre simple. Il est facile de voir que (5.9) donne de meilleurs résultats que ceux fournis par (5.4), car le résultat de Smith est de l'ordre de $(\|N\|_F/d_j)^{n-1}$ dans le cas où ce terme est grand, alors que le nôtre fait intervenir la quantité minimale possible du $1/d_j = \min_{i\neq j} |\lambda_i - \lambda_j|$. De plus, la norme $\||N|^k\|$ de $|N|$ dans (5.9) et est généralement modérée devant $\|N\|^{n-1}$ pour tout k suffisamment grand (voir Exemple 2.1).

L'exemple suivant donne les conditionnements et les valeurs de leurs majorants pour les valeurs propres de la matrice de Wilkinson de taille 20.

Exemple 5.2 *Soit $W_{20} = (w_{ij})_{i\leq j\leq i+1}$ la matrice bidiagonale de Wilkinson d'ordre $n = 20$, composée d'éléments diagonaux allant de 1 à 20 et d'éléments sur-diagonaux égaux à 20. Alors, la borne supérieure du conditionnement donnée par Smith est constante pour toutes les valeurs propres et est de l'ordre de 10^{24} en norme de Frobenius. Par contre, $C_W(\lambda_i) = \frac{\|x_i\|_2\|y_i\|_2}{|y_i^T x_i|}$ ne dépasse pas 10^{12}. De plus $C_W(\lambda_i) = C_W(\lambda_{n-i+1})$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq 20$. La borne majorant du conditionnement $C(\lambda_i)$ donnée par (5.9) vérifie aussi $C(\lambda_i) = C(\lambda_{n-i+1})$ dans ce cas. Le tableau 3 rapporte les valeurs des ces bornes pour les valeurs propres de W_{20} en utilisant la norme euclidienne. On note que la valeur donnée par la majoration (5.9) ne dépasse pas non plus 10^{13} si on utilise la norme de Frobenius. (Tous ces calculs sont fournis par le logiciel Matlab.)* $\triangle$

valeurs propres λ	1, 20	2, 19	3, 18	4, 17	5, 16
$\|x_i\|_2\|y_i\|_2/\|y_i^T x_i\|$	2×10^6	8×10^8	7×10^9	4×10^{10}	1×10^{11}
majoration (5.9)	2×10^8	4×10^9	3×10^{10}	1×10^{11}	5×10^{11}
valeurs propres λ	6, 15	7, 14	8, 13	9, 12	10, 11
$\|x_i\|_2\|y_i\|_2/\|y_i^T x_i\|$	5×10^{11}	1×10^{12}	2×10^{12}	3×10^{12}	4×10^{12}
majoration (5.9)	1×10^{12}	3×10^{12}	5×10^{12}	7×10^{12}	8×10^{12}

Tableau 3: *Le conditionnement et les majorants du conditionnement des valeurs propres de la matrice de Wilkinson W_{20} d'ordre 20.*

Remarques

Ici, on va donner quelques remarques et commentaires sur la possibilité de l'extension des résultats fournis le long de ce document.

1. Tous les résultats donnés dans ce document qui sont basés sur l'inégalité (2.2) de théorème 2.1 sont valables pour toute norme, $\| \, . \, \|$, unitairement invariante satisfaisant les deux inégalités (2.15) et (2.16) c'est-à-dire que $\|A\| \leq \||A|\|$ pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, et $\|B\| \leq \|A\|$ pour toutes matrices A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que $B \leq A$.
   En particulier, tous les résultats sont valables pour la norme de Frobenius puisqu'elle est unitairement invariante et satisfait les inégalités de monotonicité et absolucité (2.15) et (2.16).

2. Une autre extension intéressante des résultats cités auparavant est pour toutes les normes vérifiant la propriété de sous-multiplicativité (c'est-à-dire que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, pour toutes matrices A et B dans $\mathbb{C}^{n\times n}$, les normes matricielles induites vérifient la propriété de sous-multiplicativité), et satisfaisant les inégalités (2.15) et (2.16). Dans ce cas, pour toute norme satisfaisant les propriétés citées auparavant, l'inégalité (2.2) sera légèrement changée en multipliant sa partie droite par $\|Q\|\|Q^*\|$ où Q est la matrice unitaire formée par la base de Schur de A comme suit :

$$\|(z-A)^{-1}\| \quad \leq \quad \|Q\|\|Q^*\| \sum_{k=1}^{\nu-1} \left(\max_{\substack{\sum_{i=1}^{r} \delta_i = k+1; \\ 0 \leq \delta_i \leq l_i}} \prod_{i=1}^{r} |z-\lambda_i|^{-\delta_i} \right) \||N|^k\|. \quad (5.11)$$

   Il faut multiplier par la norme de Q et Q^* dans le reste de toutes les inégalités basées sur le résultat de théorème 2.1. Il faut noter que la multiplication de $\|Q\|\|Q^*\|$ ne constitue pas vraiment un grand affaiblissement des résultats cités auparavant puisque ce terme, $\|Q\|\|Q^*\|$, reste généralement modéré pour des dimensions n de A pas trop large. On note, en particulier, que la norme infinie, $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, et la norme 1, $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, vérifient les propriétés citées auparavant. Par suite, l'inégalité (5.11) précédente est vérifie pour ces deux normes.

3. Dans le cas où la matrice admet une unique valeur propre λ d'indice $l \geq 1$, et pour toute norme unitairement invariante $\| \, . \, \|$ ne satisfaisant pas nécessairement les deux inégalités (2.15) et (2.16), la majoration de la norme de la résolvante (2.2) de A en un point $z \neq \lambda$ peut être simplifié comme suit :

$$\|(z-A)^{-1}\| \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\|N^k\|}{|z-\lambda|^{k+1}}. \quad (5.12)$$

En effet, il est facile de remarquer, dans ce cas, que l'inégalité (2.2) est égale à

$$\|(z-A)^{-1}\| \;\leq\; \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\||N|^k\|}{|z-\lambda|^{k+1}},$$

puisque il existe qu'une seule valeur propre. De plus, il faut utiliser le fait que dans l'inégalité (2.17) dans la démonstration du théorème 2.1, on a $D = \lambda I$ et

$$\left((z-D)^{-1}N\right)^k (z-D)^{-1} \;=\; \frac{N^k}{(z-\lambda)^{k+1}},$$

ce qui prouve l'inégalité (5.12) où intervient N^k et non plus $|N|^k$. Le lecteur intéressé peut en utilisant (5.12) obtenir une majoration de $|z-\lambda|$ plus fine que celle proposée dans Cho and Ipsen [3, 4]. Ces articles contiennent néanmoins des résultats intéressants traitant la sensibilité d'une valeur propre dans ce cas de figure, c'est-à-dire le cas où la matrice A admet une seule valeur propre, résultats qui sont proches des résultats donnés ici.
L'inégalité (5.12) est valable pour toute norme satisfaisant la propriété de sous-multiplicativité tout en multipliant sa partie droite par $\|Q\|\|Q^*\|$.

4. Dans le cas où la matrice A admet une seule valeur propre λ, la majoration (5.9) du conditionnement hölderien de λ se simplifie comme suit :

$$C_{1/l}(\lambda) \;\leq\; \sqrt[l]{\|N^{l-1}\|}. \tag{5.13}$$

Cette majoration est valable pour toute norme, $\|\,.\,\|$, unitairement invariante, et due en particulier à l'inégalité (5.12).

5. On rappelle que l'entier $\nu = \sum_{i=1}^{r} l_i$ qui apparaît dans l'inégalité (2.2) est un majorant de l'indice de nilpotence ν_0 de N, comme il est montré par le lemme 2.2. Ceci étant, on peut changer dans le théorème 2.1 l'entier $\nu = \sum_{i=1}^{r} l_i$ par l'indice de nilpotence, ν_0, de N. Ceci ne constitue pas un réel affaiblissement pour les résultats cités auparavant. En effet, dans la plupart des cas, l'indice de nilpotence de N est le même que celui de $|N|$. En effet, l'indice de nilpotence d'une matrice triangulaire supérieure stricte dont les entrées non-nulles sont toutes algébriquement indépendantes sur le corps des nombres rationnels $\boldsymbol{Q}$ est indépendante du signe de ces entrées. Ceci, en effet, peut se déduire

facilement d'un travail plus général dû à Gansner [6, 5] qui fait associer une matrice nilpotente à un digraphe acyclique de telle manière que la dimension des blocs de Jordan de la matrice corresponde à la taille maximum de certaines familles des pathes dans le digraphe.

Conclusion

Dans ce document, on s'est intéressé à l'instabilité spectrale des matrices. On a vu que cette instabilité est liée aux indices des valeurs propres, de leurs distances mutuelles, et des normes des puissances de module de la partie triangulaire supérieure stricte de la forme de Schur de la matrice à étudier.

Nos résultats cités auparavant sur la variation des valeurs propres sont dans le même esprit que les résultats obtenus par Henrici [9] et ceux obtenus auparavant par Ostrowski [13] sur la variation spectrale d'une matrice. Malheureusement, même si nos résultats forment une amélioration des ceux existants dans la littérature, ils apparaissent un peu plus compliqués et demandent plus d'informations sur la matrice à étudier. On espère les simplifier dans un travail ultérieur et les rendre plus compréhensifs, et plus faciles à calculer.

On a étudié aussi le conditionnement des valeurs propres. On a donné une majoration de ce conditionnement et on l'a lié à la norme spectrale de la résolvante au voisinage de la valeur propre à étudier.

Remerciements

Tous mes sincères remerciements vont au Professeur F. Chaitin-Chatelin pour l'aide et les conseils qu'elle m'a apportés, ainsi qu'au Docteur Valerie Frayssé et toutes les personnes qui ont contribué à approfondir ce travail.

Références

[1] F. Chaitin-Chatelin and V. Frayssé. *Lectures on Finite Precision Computations.* SIAM, Philadelpha, 1996.

[2] F. Chatelin. *Valeurs Propres de Matrice.* Masson, Paris, 1988.

[3] G. E. Cho and I. C. F. Ipsen. If a matrix has only a single eigenvalue, how sensitive is this eigenvalue? under review for SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1998.

[4] G. E. Cho and I. C. F. Ipsen. If a matrix has only a single eigenvalue, how sensitive is this eigenvalue? *II*. submitted to SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1998.

[5] A. Edelman, E. Elmroth, and B. Kågström. A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. part II: A stratifications-enhanced staircase algorithm. Report UMINF 96.13, Departement of Computing Science, Umeå University, Sweden, 1995.

[6] E. R. Gansner. Acyclic digraphs, young tableaux, and nilpotent matrix. *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, 2: 429–440, 1981.

[7] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations.* The Johns Hopkins University Press, Baltimore and Londan, third edition edition, 1986.

[8] A. Harrabi. Note on the condition number and the hölder-condition number. to appear as a Technical report at CERFACS, 1998.

[9] P. Henrici. Bounds for iterates, inverses, spectral variation and field of values of nonnormal matrices. *Numer. Math.*, 4: 24–40, 1962.

[10] R. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.

[11] A. Ilahi. *Validation du Calcul sur Ordinateur : Application de la Théorie de Singularités.* PhD thesis, Université des Sciences Sociales de Toulouse (UT1), Toulouse, France, Juin 1998.

[12] J. Moro, J. V. Burke, and M. L. Overton. On the Lidskii-Vishik-Lyusternik perturbation theory for eigenvalues of matrices with arbitrary Jordan structure. *SIAM J. Matrix Anal. Appl*, 18: 793–817, 1997.

[13] A. Ostrowski. Über die Stetigkeit von charakteristischen Wurzeln in Abhängigkeit von den Matrizenelementen. *Jahresber. Dtsch. Math. Verein.*, 60: 40–42, 1957.

[14] R. A. Smith. The condition numbers of the matrix eigenvalue problem. *Numerische Mathematik*, 10: 232–240, 1967.

[15] G. W. Stewart and J.-G. Sun. *Matrix Perturbation Theory.* Academic Press, New York, 1990.

[16] J. H. Wilkinson. *The Algebraic Eigenvalue Problem.* Oxford University Press, Oxford, 1965.