

# Le Sens de la Vie

## Essai sur les fondements épistémologiques et mathématiques d'une théorie de l'Information, de la Complexité et du Développement équilibré durable

Présentation résumée (actualisée en 2002)

Françoise Chaitin-Chatelin\*

CERFACS Technical Report TR/PA/99/20

*Dieu a créé le monde avec mesure, nombre et poids.*  
Jean Scot Erigène<sup>1</sup>, **Livre de la Sagesse** (XI,21)

## 1 Contexte

### Note liminaire

Cette réflexion théorique est l'aboutissement de mon parcours de recherche à l'Université (Grenoble, Paris et Toulouse) aussi bien que dans l'Industrie (IBM, Thales et CERFACS) sur le thème des **mécanismes du Calcul**.

Grâce à sa diversité, mon parcours professionnel m'a permis :

1. d'acquérir les outils mathématiques conceptuels nécessaires : Analyse Fonctionnelle, Analyse Numérique Théorique et Appliquée, Mathématiques Discrètes pour l'ordinateur,
2. d'étudier certains problèmes industriels-clé de fiabilité des simulations numériques aux frontières de l'instable, qui se rencontrent dans l'industrie de haute technologie en particulier (Aéronautique et Espace, Astronomie).

Ce lent approfondissement théorique et expérimental a été rendu possible par une mobilité géographique (nombreux séjours aux U.S.A.) et professionnelle (congrès de l'Université pour recherches dans l'Industrie, 9 ans au total).

\* \* \*

Le calcul est une transformation d'information d'implicite en explicite. Par exemple, résoudre une équation  $f(x) = g$ ,  $f$  et  $g$  connues, c'est chercher la solution  $x$ . Cette solution inconnue est "cachée" dans l'équation, et doit être "dévoilée" par la résolution pour devenir connue. En mathématiques, on dit que l'inconnue  $x$  est *implicite* dans  $f(x) = g$ , et qu'elle devient *explicite* par la résolution  $x = f^{-1}(g)$ . Cette résolution peut rarement se faire exactement. Par exemple,

---

\* Université Toulouse I et CERFACS, 42 av. G. Coriolis, 31057 Toulouse cedex 1.

Email : chatelin@cerfacs.fr - URL : <http://www.cerfacs.fr/~chatelin>

<sup>1</sup>Philosophe (9<sup>ème</sup> siècle). Né en Irlande, il vivait à la cour du roi Charles le Chauve en France.

seules les équations polynomiales à 1 variable de degré  $< 5$  sont résolubles explicitement par radicaux. Il faut donc très vite des techniques d'approximation (domaine de l'Analyse Mathématique).

Mais supposons que l'on sache calculer exactement  $x = f^{-1}(g)$ , est-ce toujours pertinent pour décrire le monde qui nous entoure ? Pas toujours. Dans certains phénomènes d'évolution très instable, la solution exacte du modèle peut être si peu stable qu'elle n'est pas réalisée dans le monde physique car les coefficients du modèle sont nécessairement des approximations de la réalité qui suffisent à modifier complètement les résultats. Cela se rencontre très couramment dans la prévision du temps en Météorologie, et limite, de manière fonctionnelle, notre capacité à prévoir avec précision le temps sur de longues périodes.

On peut citer un autre exemple d'évolution qui, à l'opposé de la prévision du temps météorologique journalier, est d'une grande importance théorique pour notre compréhension de la Vie, mais semble actuellement être sans aucun impact discernable sur notre vie quotidienne. Il s'agit de la connaissance de l'eau  $H_2O$ , indispensable à la Vie et qui est, les sondes spatiales l'ont montré, l'une des molécules les plus fréquentes du Système Solaire. L'eau se présente sur Terre sous 3 phases, liquide bien sûr, vapeur ou glace, le point triple étant à  $4^{\circ}C$ . Ceci est bien connu, mais il est moins connu qu'il existe plusieurs sortes de glace selon la pression et la température. Ces autres glaces ne se rencontrent pas naturellement sur Terre. Mais on pense actuellement que certains halos rares autour de la lune ou du soleil (à un angle de  $28^{\circ}$  au lieu des angles fréquents de  $22^{\circ}$  et  $46^{\circ}$ ) sont dûs à la présence dans la haute atmosphère de glaçons métastables dérogoatoires, bien qu'appartenant à la famille de la glace terrestre. Les autres familles (une dizaine) nécessitent des pressions élevées pour *tordre* très fortement l'angle entre les 2 liaisons hydrogène qui portent les 2 atomes d'hydrogène. Alors, les astronomes rêvent aux pressions élevées qui règnent dans les intérieurs des 4 planètes joviennes (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune) et de leurs gros satellites. Les glaces haute pression peuvent exister. Existent-elles ? Le savoir renseignerait précieusement ces chercheurs sur l'origine et l'évolution des corps gelés de notre système solaire.

Mais retournons sur Terre. Le problème central que le calcul scientifique pose aujourd'hui à ses utilisateurs est de savoir déterminer le degré de confiance qu'ils peuvent accorder aux résultats de simulation massivement produits par les stations de travail et les superordinateurs. Et ce problème se pose avec d'autant plus d'acuité que les équations à résoudre sont de plus en plus difficiles mathématiquement (non linéaires, de grande taille et souvent de type mal posé). Quels accidents peuvent survenir ? Tout d'abord les plus insidieux, car bien souvent imprévisibles, sont les accidents dus au caractère fini de l'information traitée par les ordinateurs. La précision limitée de l'arithmétique rend la plus courante des quatre opérations, l'addition flottante, potentiellement dangereuse au voisinage de zéro et de l'infini. Elle peut suffire à vider de son sens une longue suite de calculs par ailleurs très simples. Et la question de la fiabilité des calculs devient prédominante dans toutes les applications industrielles de pointe liées à la sécurité (missile Patriot de la guerre du Golfe, lanceur Ariane 5 par exemple), et dans beaucoup de simulations financières, compte-tenu des masses monétaires en jeu.

A côté de ces problèmes de fiabilité arithmétique des calculs, la qualité de la résolution approchée sur ordinateur dépend crucialement de la stabilité de la méthode numérique employée. La fiabilité arithmétique et la qualité numérique découlent toutes deux du degré de stabilité du problème mathématique exact à résoudre qui modélise le phénomène physique étudié. Ce sont les ordinateurs qui ont permis dans les années 70, de prendre conscience du rôle théorique du chaos

dans les phénomènes évolutifs régis par des équations non linéaires. Et c'est l'utilisation par les intermédiaires financiers de modèles de plus en plus fidèles à la volatilité des évolutions boursières qui favorise l'émergence de nouveaux types d'instabilités numériques, inconnus jusqu'alors, sauf de quelques mathématiciens. Connaître ces nouvelles instabilités est indispensable pour garantir la validité des simulations (financières, économiques ou physiques) sur ordinateur.

## 2 Information, Complexité et Harmonie du Vivant : une Théorie du Sens

Pour un ingénieur, un chercheur, un décideur, ou un responsable d'investissements (humains, financiers, technologiques), le degré de confiance qu'il peut avoir dans les résultats des grands codes de calcul et dans la robustesse des modèles qu'il utilise est cruciale. En effet, l'émergence des supercalculateurs a permis d'utiliser intensivement la simulation numérique comme substitut de l'expérimentation physique, ou comme outil de prévision financière stratégique.

Toutefois, rares sont les outils utilisés aujourd'hui dans l'industrie qui permettent d'obtenir des informations fiables sur la qualité et la validité des résultats numériques obtenus sur ordinateur. La principale raison en est le niveau très rudimentaire de la notion d'information utilisée en Science actuellement.

Il s'agit essentiellement de *l'information au sens de Shannon*, notion suffisante pour assurer la qualité des communications physiques sans se préoccuper du contenu sémantique de l'information transmise. Mais cette notion d'information ne peut prétendre aborder le problème crucial des phénomènes du Vivant : **l'émergence du Sens**.

Afin de construire une théorie de l'Information qui permette, sans hypothèse ad hoc et sans réduction, cette émergence du Sens, j'ai posé comme hypothèse de base que le **traitement naturel** de l'information est **optimal**. C'est-à-dire, le traitement réalisé par la Nature elle-même, au cours des phénomènes physiques, chimiques et biologiques nécessaires à la Vie, est le meilleur possible. Cette hypothèse peut être vue comme un axiome fondant les principes d'évolution en physique : principe de moindre temps de Fermat, principe de moindre action de Maupertuis, et d'Hamilton, et lois de conservation associées.

J'ai aussi supposé que toute information peut appartenir à l'une des 4 catégories : espace  $E$ , temps  $T$ , symbole  $\Sigma$  et sens  $S$ , qu'elle est une grandeur extensive (quantitative) ou intensive (qualitative), à valeurs réelles ou (hyper)complexes. Enfin elle peut être repérée dans un cadre de référence formé de 4 axes orthogonaux. Des 4 catégories  $E$ ,  $T$ ,  $\Sigma$  et  $S$ , seuls l'espace et le sens sont directement observables. L'existence des 2 autres catégories, temps ou symbole, ne peut qu'être inférée à partir de leurs effets.

Ces hypothèses conduisent au fait très important que l'information ne peut être traitée *sans réduction* dans un espace ayant *moins de 4 dimensions réelles*. Ces 4 dimensions représentent les 4 catégories de départ, Espace-Temps-Symbole-Sens. Mathématiquement, le cadre global est isomorphe à l'espace des quaternions, qui est une généralisation des nombres complexes (adaptée à la géométrie euclidienne à 3 dimensions), telle que le produit de 2 quaternions  $q$  et  $q'$  n'est pas

commutatif ( $qq' \neq q'q$ ).

La *structure* de tout système d'information non réduit évolue donc dans un cadre de dimension 4 au moins. Dans ce cadre, une information de dimension 1 est analogue à une *longueur* (ou mesure réelle<sup>2</sup>), pour la dimension 2 à une *surface* (ou sens), pour la dimension 3 à une information partielle imaginaire<sup>2</sup> et pour la dimension 4 à une information complète à une composante réelle<sup>2</sup> et 3 imaginaires<sup>2</sup>.

La *phénoménologie* d'un système d'information non réduit se déploie, elle, dans un cadre de dimension 16 au moins (4 dimensions pour chacune des 4 catégories).

Toute évolution requiert la mise en œuvre de 4 *principes naturels* qui sont abstraits du monde vivant qui nous entoure :

1. le **principe mécanique** ou loi absolue de l'équilibre, qui se fonde sur le calcul *exact* et *algorithmique* (avec un nombre *fini* de pas) sur les rationnels  $\mathbb{Q}$ .
2. le **principe chimique** de conservation de l'information : "Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme" (Lavoisier).  
Ce principe se fonde sur un calcul sur les nombres réels  $\mathbb{R}$ , réalisé à *précision finie*, c'est à dire en ne gardant qu'une quantité finie de l'information (sur ordinateur par exemple, ou en biologie).
3. le **principe économique** qui équilibre les échanges entre le système et son environnement.  
Ce principe se fonde sur le calcul *asymptotique* exact à la limite (par exemple, si  $|a| < 1$ ,  $1 + a + a^2 + \dots + a^n \rightarrow 1/(1 - a)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ ).
4. le **principe éthique** qui fonde la valeur par *dualité* espace  $\Sigma$ -sens  $S$ .

Chaque principe correspond à une évolution contrôlée par une catégorie donnée d'information : contrôle par le temps  $T$  (principe mécanique), contrôle par le symbole  $\Sigma$  (principe chimique), contrôle par l'espace  $E$  (principe économique), et contrôle par le sens  $S$  (principe éthique). Selon la finalité recherchée pour le système évolutif, ces 4 principes sont utilisés à tour de rôle d'une manière prescrite, ce qui permet d'arriver à la synthèse, finalisée par le but, des 4 catégories espace-temps-symbole-sens. C'est ce que j'appelle la **Synthèse Sémiotique** des 4 principes naturels : une *principe supérieur*, porteur de sens nouveau, est **créé** par la synthèse sémiotique. Cette synthèse est la propriété fondamentale du Vivant : elle permet l'enrichissement du Sens grâce à l'émergence continue de catégories nouvelles que réalise l'évolution de toute structure vivante.

**Remarque** : Il est à noter que les noms donnés aux 4 catégories  $E$ ,  $T$ ,  $\Sigma$  et  $S$  sont génériques. Dans les applications,  $E$ ,  $T$ ,  $\Sigma$  et  $S$  peuvent représenter tout ensemble d'informations classées au départ selon 4 catégories connues pour faire émerger de nouvelles catégories après évolution dans un but fixé. Le processus peut évidemment être répété.

L'émergence de sens nouveau est réalisée par le **Calcul** qui combine les 4 types : calcul exact, calcul algorithmique, calcul asymptotique et calcul à précision finie. La théorie du **Calcul Qualitatif** que j'ai développée depuis une quinzaine d'années est au cœur de ce mécanisme d'acquisition

---

<sup>2</sup>Les termes **réel** et **imaginaire** ont ici un sens mathématique précis conféré par la structure d'algèbre hypercomplexe dont  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^4$  peuvent être munis. La métaphore sémantique portée par ces adjectifs reste juste au niveau du langage non technique.

et de transformation de l'information par le Calcul.

Parce qu'elle n'est pas réductrice, cette théorie permet de modéliser, avec toute la précision désirable, les phénomènes du Vivant. Le Calcul Qualitatif est l'outil de choix pour le Calcul du Vivant. C'est, littéralement parlant, une théorie du “**Sens de la Vie**”, qui repose sur *deux composantes-clé de l'évolution* dans le temps :

1. une évolution *temporelle linéaire* selon une échelle métrique de complexité croissante,
2. une évolution *temporelle cyclique* par synchronisation d'horloges biologiques.

Cette théorie de l'Information et de la Complexité fournit le cadre conceptuel pour étudier l'actualisation grâce à  $E$ ,  $T$  et  $\Sigma$  du potentiel de Sens porté par  $S$ . Elle permet de planifier l'évolution optimale de toute structure vivante, ouverte sur son environnement, en vue de développer un potentiel de sens donné, par cohésion dynamique durable, grâce à une intégration continue des changements temporels et spatiaux et de leurs implications symboliques.

### 3 Originalité

La théorie du Sens qui vient d'être décrite est totalement novatrice et représente une avancée conceptuelle significative dans le domaine si universel de la Vie où l'information et la complexité sont des concepts-clé. Les aspects *radicalement nouveaux* de cette théorie sont :

1. considérer le quatuor (espace-temps-symbole-sens) et non pas le seul couple (espace-temps) comme il est habituel,
2. utiliser systématiquement les 4 principes naturels, abstraits de notre monde,
3. combiner les 4 types de calcul : exact, algorithmique, asymptotique et précision finie,
4. réaliser le cœur algorithmique par combinaison d'arithmétique, algèbre et analyse,
5. coupler le discret et le continu,
6. coupler l'échelle de complexité linéaire et les horloges biologiques,
7. calculer en variables réelles ou binaires dans les algèbres hypercomplexes et les espaces vectoriels de dimension finie, et non pas seulement dans l'ensemble des nombres complexes ou réels.

### 4 Domaines d'application

Cette théorie est conçue pour rendre compte, au degré de précision choisi, des phénomènes du Vivant. Les domaines d'application sont donc très variés, depuis la biologie jusqu'à l'économie du développement durable, en passant par les technologies de l'information.

Le développement même de la Théorie du Sens passe par 4 synthèses créatrices successives de complexité croissante, étapes nécessaires de la création naturelle d'une structure vivante. Ce sont 4 exemples de synthèse sémiotique qui diffèrent par le nombre de catégories en jeu. Ces nombres obéissent à des lois arithmétiques fixées par la règle de multiplication hypercomplexe dans les algèbres binaires multidimensionnelles (construites géométriquement à partir de 0,1).

- a) la **Synthèse Cartésienne** de **2** catégories en 1 seule émergente. Il s'agit d'une synthèse permettant de définir un axe *absolu* de création. L'évolution est contrôlée par la 1<sup>ère</sup> catégorie (le temps) et réalisée par le calcul *arithmétique* exact et la logique binaire complexe (à 2 dimensions). Le caractère absolu de l'axe de création assure que la vérité de la logique binaire  $y$  est absolue. La catégorie émergente des 2 catégories Temps-Symbole est une relation *d'ordre absolu* sur  $\mathbb{R}$  qui représente l'axe créateur réel, ordre qui fonde la *mesure du Temps*.
- b) la **Synthèse Rationnelle** de **4** catégories en 2 catégories émergentes, et en une seule, simultanément, selon *trois* axes créateurs.
- c) la **Synthèse Biologique** de **16** catégories en 4 catégories émergentes, pour le déploiement des phénomènes selon *quatre* axes créateurs.  
L'évolution est contrôlée par le couple (symbole  $\Sigma$ , temps  $T$ ), réalisée par calcul exact (pour  $T$ ) et algorithmique (pour  $\Sigma$ ). Cela implique 2 vitesses pour la transmission de l'information : vitesse infinie pour le calcul exact et vitesse finie pour le calcul algorithmique (temps d'exécution de l'algorithme *fini*). Le contrôle couplé  $\Sigma \times T$  se réalise à travers un calcul exact à 2 vitesses effectué grâce à une synchronisation, fondée sur l'*algèbre*, de 3 variables symboliques qui sont associées, pour l'une, à une échelle temporelle linéaire (correspondant à la vitesse infinie), assimilable à l'axe réel, et pour les 2 autres, à deux horloges cycliques (correspondant à la vitesse finie) assimilables globalement à la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . Le fait que le calcul algorithmique dans  $\Sigma$  soit réalisé en un temps  $T$  fini conduit naturellement à un cadre de *relativité restreinte*.

La synchronisation et la relativité du symbole (à 3 dimensions) et du temps (à 1 dimension), issues de la vitesse limitée du calcul algorithmique dans  $\Sigma$ , sont les deux mécanismes, non directement observables, du Vivant qui permettent d'*échapper à la limite de Sens* que finit par rencontrer tout système formel basé sur la logique binaire à 1 dimension, ainsi que le démontrent les célèbres théorèmes de Gödel–Turing–Chaitin (Chaitin, 1999). La logique binaire à deux dimensions de la synthèse cartésienne définit une vérité, qui est absolue pour tout  $T$ , mais pas nécessairement pour  $\Sigma$  où elle crée une vérité interne à la structure, qui peut être différente de la vérité externe portée par l'environnement.

Il reste donc une quatrième phase à réaliser pour harmoniser ces deux vérités qui peuvent être discordantes. C'est dans cette quatrième phase que l'espace  $E$  va jouer son rôle de créateur visible.

- d) la **Synthèse Harmonique**. Il s'agit de la synthèse *complète et visible de la structure vivante*, résultant de l'évolution contrôlée par le triplet (Temps-Symbole-Espace) et réalisée par les 4 types de calcul, les 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> types, calcul asymptotique et calcul en précision finie, étant liés au contrôle par l'espace  $E$ .

Dans les phases d'évolution a), b) et c), la structure est considérée en elle-même, elle est donc vue comme isolée car sans lien fonctionnel avec l'environnement  $E$ . La Synthèse Harmonique rend compte du développement harmonieux d'une structure *ouverte* fonctionnant en équilibre à chaque instant avec son environnement spatial.

Le *triple* contrôle  $T \times \Sigma \times E$  permet l'émergence d'une *échelle symbolique de Valeur* qui

harmonise les points de vue duaux (interne et externe) : les interactions entre la structure et son environnement permettent d'associer à toute activité d'échange (production-consommation) un prix-coût relatif à cette activité, qui symbolise l'accord des deux parties.

Toute **structure vivante naturellement harmonieuse** réalise, depuis son origine dans le temps et son centre dans l'espace, les 4 synthèses successives : création dans le temps  $T$  en a), création dans le sens  $S$  en b), création symbolique dans  $\Sigma$  en c), et création physique dans l'espace  $E$  en d). Seule la quatrième phase est visible en général, mais elle ne se développe qu'à partir de la réalisation des 3 autres phases, dans l'ordre immuable fixé par la Nature.

L'évolution du Vivant ne se limite pas, bien sûr, à la croissance équilibrée d'une seule structure ouverte sur son environnement. La suite de l'histoire comporte l'étude de sociétés (fourmis, abeilles) fondées sur des principes émergents de **coopération**. Le processus de négociation qui est à la base du mécanisme d'acquisition du sens de ce qui est juste par rapport à la collectivité est fondé sur le calcul asymptotique, exact à la limite infinie du temps. On comprend qu'il y aie là une **liberté** offerte pour que le contrôle triple  $T \times \Sigma \times E$  ne parle plus nécessairement d'une seule voix. Il peut y avoir découplage entre  $T$  et  $\Sigma \times E$ , ce qui permet l'émergence du **libre-arbitre** et de la **Conscience**. Mais ceci est vraiment une autre histoire . . . qui peut mener aussi bien à la liberté qu'au chaos<sup>3</sup>.

Néanmoins je voudrais encore citer un domaine important à mes yeux, celui du développement humain individuel. Car la théorie du Sens de la Vie s'applique tout aussi bien aux lois de la Pensée, qu'aux lois physiques et économiques contingentes du monde qui nous entoure. Elle propose une base théorique pour aborder la psychologie des profondeurs et la psychanalyse. La synthèse sémiotique décrit le phénomène d'intégration optimal du Soi pour fonctionner harmonieusement avec le monde extérieur au Soi. A contrario, divers types de dysfonctionnement peuvent être analysés, qui pourraient peut-être – c'est l'espoir que j'ai – fournir un cadre conceptuel utile à la réflexion des chercheurs et thérapeutes de ces domaines.

Avant de clore cette rapide présentation, il peut être éclairant de noter que la phrase de Jean Scot Erigène citée en exergue illustre parfaitement mon propos : mesure (du temps  $T$ ), nombre (à l'horloge du symbole  $\Sigma$ ) et poids (pour équilibrer la balance des échanges dans  $E$ ) réalisent la création harmonieuse du Sens de la Vie.

## Références

- [1] D. Andler, editor. *Introduction aux sciences cognitives*. Gallimard, 1992.
- [2] V. Arnold. *Equations différentielles ordinaires*. MIR, 1988.
- [3] D. Benest. *Les planètes*. Seuil, 1996.
- [4] H. Bergson (1889). *Essai sur les données immédiates de la conscience*. PUF, 1991. 4ème édition.
- [5] M. V. Berry. *Principles of cosmology and gravitation*. IUP Publ., 1989.
- [6] C. Brezinski. *Algorithmes d'accélération de la convergence*. Technip, 1978.

---

<sup>3</sup>au sens mathématique, tout autant qu'au sens courant.

- [7] C. Brezinski. *Padé-type approximation and general orthogonal polynomials*. Birkhauser, 1980.
- [8] J. Cardan. “*Ma vie*”. Belin, 1991. Traduit par J. Dayne, présenté par E. Wolf.
- [9] G. Cardano. “*Ars Magna*” or *the Rules of Algebra*. Dover, 1993. Trad. T. R. Witmer.
- [10] G. Chaitin. *The unknowable*. Springer Verlag, 1999.
- [11] F. Chaitin-Chatelin. Le calcul sur ordinateur à précision finie. Tech. Rep. TR/PA/94/05, CERFACS, February 1994. Rapport réalisé à la demande de l’Institut d’Expertise de l’Ecole Normale Supérieure pour le compte de la DGA / DRET.
- [12] F. Chaitin-Chatelin. Is finite precision arithmetic useful for Physics ? In C. Calude, editor, *The finite, the bounded and the infinite*, volume 2, pages 380–395. J. UCS, 1996. Proceedings of the Black Sea University.
- [13] F. Chaitin-Chatelin. Is nonnormality a serious computational difficulty in practice ? In R. Boisvert, editor, *The quality of Numerical Software*, pages 300–314. Chapman and Hall, 1997.
- [14] F. Chaitin-Chatelin. Nature et Calcul. Eléments d’une théorie naturelle de l’information, 1999. Notes de Cours de DEA, Université Toulouse I.
- [15] F. Chaitin-Chatelin. *Life’s Computation. A Theory of Qualitative Computing*. Book in progress. 2000.
- [16] F. Chaitin-Chatelin and V. Frayssé. *Lectures on Finite Precision Computations*. SIAM, Philadelphia, 1996.
- [17] J. Chaline. *Les horloges du vivant*. Hachette, 1999.
- [18] F. Chatelin. *Spectral approximation of linear operators*. Academic Press, New York, 1983.
- [19] F. Chatelin. *Valeurs propres de matrices*. Masson, Paris, 1988.
- [20] F. Chatelin. Résolution approchée d’équations sur ordinateur, 1989. Notes de DEA, Université Paris VI.
- [21] F. Chatelin. *Eigenvalues of matrices*. Wiley, Chichester, 1993. Enlarged Translation of the French Edition with Masson.
- [22] Ph. Chatelin. *Spécification et manipulation des programmes : cas d’un ensemble de formes bilinéaires*. Thèse d’état, Université Grenoble 1 et INP Grenoble, 1979.
- [23] J. H. Conway and R. K. Guy. *The book of Numbers*. Springer Verlag, 1996.
- [24] T. Dantzig. *Number, the language of Science*. Mc Millan Publ., 1954. 4th edition.
- [25] L. de Broglie. *Annales de la Fondation de Broglie*, 1, 1976.
- [26] M. Delarche. *Quelques outils infographiques pour l’analyse structurale des systèmes*. Thèse de docteur-ingénieur, Université Grenoble 1 et INP Grenoble, 1979.
- [27] J. Dieudonné. *Pour l’honneur de l’esprit humain*. Hachette, 1987.
- [28] T. Dvorak, I. Havel, J.-M. Laborde, and P. Liebl. Generalized hypercubes and graph embedding with dilation. *Romako*, 40(40-1), 1989.
- [29] P. Fermat. *Précis des œuvres mathématiques*. Edité par E. Brassine (1853). Gabay, 1989.
- [30] F. Gantmacher. *The theory of matrices (2 vol.)*. Chelsea, 1959.

- [31] G. H. Golub and C. Van Loan. *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press, 1989. Second edition.
- [32] S. Gratton. *Outils théoriques d'analyse du calcul à précision finie*. Ph.D. dissertation, Institut National Polytechnique de Toulouse, June 1998. TH/PA/98/30, CERFACS.
- [33] G. Th. Guilbaud. *Lecons d'à peu près*. Diderot ed., 1998.
- [34] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the Theory of Numbers*. Oxford Science Publisher, 1993. 5th edition.
- [35] A. Harrabi. *Pseudospectres d'opérateurs intégraux et différentiels. Application à la Physique mathématique*. Ph.D. dissertation, Université Toulouse I, May 1998. TH/PA/98/29, CERFACS.
- [36] N. J. Higham. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. SIAM, Philadelphia, 1996.
- [37] A. Ilahi. *Validation du calcul sur ordinateur : application de la théorie des singularités algébriques*. Ph.D. dissertation, Université Toulouse I, June 1998. TH/PA/98/31, CERFACS.
- [38] J. Itard. Matériaux pour l'histoire des nombres complexes. *Bibl. Info. Enseign. Math.*, 2, 1969.
- [39] B. Klarès. Numerical invariants and Jordan form of a matrix. In M. Chipot and J. Saint-Paulin, editors, *Progress in PDE's : the Metz surveys*. Pitman Research Notes, 1991.
- [40] F. Klein. *Leçons sur certaines questions de Géométrie Élémentaire*. Diderot ed., 1997.
- [41] J.-M. Laborde. *Un développement algébrique de l'algorithme d'exclusion et quelques problèmes géométriques en algèbre de Boole*. Thèse d'état, Université Grenoble 1 et INP Grenoble, 1977.
- [42] J.-M. Laborde. Le plongement dans l'hypercube des arbres d'au plus 16 sommets. Technical Report RR 755-I, IMAG, 1989.
- [43] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The theory of matrices*. Academic Press, New York, second edition with applications edition, 1985.
- [44] F. Le Lionnais. *Les nombres remarquables*. Hermann, 1983.
- [45] S. Levy. *Artificial life*. 1st Vintage Books, 1993.
- [46] E. Meichelbeck. *Un avenir possible*. Sophon, 1994.
- [47] J. M. Muller. *Arithmétique des ordinateurs*. Masson, 1989.
- [48] I. Newton. *Principes mathématiques de la philosophie*, 1990. Traduction de la Marquise de Chatelet, augmentée des commentaires de Clairaut.
- [49] F. Potra and V. Ptak. *Nondiscrete induction and iterative processes*. Pitman, 1984.
- [50] F. Reinhardt and H. Soeder. *Atlas des Mathématiques*. Le livre de poche, 1997.
- [51] F. Robert. Encore un opérateur discret avec des cycles courts II. Technical Report RR 938-M, IMAG, 1994.
- [52] F. Robert. *Les systèmes dynamiques discrets*. Springer, 1995.
- [53] D. Ruelle. *Hasard et Chaos*. Odile Jacob, 1991.
- [54] E. Schrödinger. *Qu'est-ce que la vie ?* Seuil, 1986.
- [55] F. Varela. *Autonomie et connaissance*. Seuil, 1989.
- [56] T. Vicsek. *Fractal growth phenomena*. World Scientific, 1989.
- [57] M. L. von Franz. *Nombre et Temps*. La Fontaine de Pierre, 1983.