Résolution géométrique d'une équation de degré 4 : Partie 1

F. Chaitin-Chatelin, E. Traviesas et A. Ilahi

CERFACS Working Notes : WN/PA/01/01

En s'inspirant du livre de F. Klein [1], nous avons découvert une méthode utilisée par les anciens afin de résoudre géométriquement des problèmes dont la forme analytique est une équation du $3^{ième}$ degré ou de degré supérieur. Nous choisissons ici d'effectuer l'étude de la résolution géométrique d'une équation du $4^{ième}$ degré.

1 Description du procédé

Nous considérons l'équation en x à coefficients réels de degré 4 suivante

(1) $$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Posons $y = x^2$. L'équation (1) devient

(2) $$y^2 + axy + by + cx + d = 0.$$

Les racines de l'équation (1) sont donc les abscisses des points communs à la parabole d'équation $y = x^2$ et à l'hyperbole d'équation $y^2 + axy + by + cx + d = 0$.

2 Étude de l'hyperbole

2.1 Ensemble de définition de l'hyperbole

Étudions l'équation (2). Cette équation est une équation de degré 2 en y dont les coefficients dépendent de la variable x. En effet, $y^2 + axy + by + cx + d = y^2 + (ax+b)y + cx + d$.
La natude des racines de cette équation dépendent du signe de la fonction $\Delta(x)$ suivante :

$$\Delta(x) = (ax+b)^2 - 4(cx+d).$$

2.1.1 Étude du signe de $\Delta(x)$

La fonction $\Delta(x)$ est un polynôme de degré 2 en x à coefficients réels. Cette fonction peut également s'écrire

$$\Delta(x) = a^2x^2 + (2ab-4c)x + b^2 - 4d.$$

Nous allons différencier deux cas, le cas où $a \neq 0$ du cas où $a = 0$.

Cas où $a \neq 0$

Calculons le discriminant de $\Delta(x)$. Il est égal à

$$\delta = (2ab-4c)^2 - 4a^2(b^2-4d) = 16(a^2d - abc + c^2).$$

1. Si $\delta > 0$.
   Les racines de $\Delta(x)$ sont

- $x_1 = \frac{-ab+2c-2\sqrt{a^2d-abc+c^2}}{a^2}$
- $x_2 = \frac{-ab+2c+2\sqrt{a^2d-abc+c^2}}{a^2}$.

Par conséquent, $\Delta(x)$ est strictement positif ($a^2 > 0$) si $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$. Dans ce cas là, les solutions de l'équation (2) sont réelles et sont les suivantes :

- $y_1(x) = \frac{-(ax+b)-\sqrt{(ax+b)^2-4(cx+d)}}{2}$
- $y_2(x) = \frac{-(ax+b)+\sqrt{(ax+b)^2-4(cx+d)}}{2}$.

Ainsi,

$$\text{si } a^2d - abc + c^2 > 0, \text{ alors l'hyperbole est définie sur }]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[.$$

2. Si $\delta = 0$.
La racine de $\Delta(x)$ est double et est égale à

$$x_d = \frac{-ab+2c}{a^2}.$$

Par conséquent, $\Delta(x)$ peut s'écrire de la façon suivante

$$\Delta(x) = a^2(x - x_d)^2.$$

Dans ce cas là, $\Delta(x)$ est positif quelque soit x et les solutions de l'équation (2) sont

- $\frac{-(ax+b)-|a||x-x_d|}{2}$
- $\frac{-(ax+b)+|a||x-x_d|}{2}$.

Les valeurs de $y_1(x)$ et $y_2(x)$ dépendent du signe de a et de la position de x par rapport à celle de x_d. Ainsi,

- Si $a > 0$,
$$\begin{array}{rcll} y_1(x) & = & -\frac{c}{a} & \text{pour} \quad x \leq x_d \\ & = & -ax - b + \frac{c}{a} & \text{pour} \quad x \geq x_d \\ y_2(x) & = & -ax - b + \frac{c}{a} & \text{pour} \quad x \leq x_d \\ & = & -\frac{c}{a} & \text{pour} \quad x \geq x_d \end{array}$$
- Si $a < 0$,
$$\begin{array}{rcll} y_1(x) & = & -ax - b + \frac{c}{a} & \text{pour} \quad x \leq x_d \\ & = & -\frac{c}{a} & \text{pour} \quad x \geq x_d \\ y_2(x) & = & -\frac{c}{a} & \text{pour} \quad x \leq x_d \\ & = & -ax - b + \frac{c}{a} & \text{pour} \quad x \geq x_d \end{array}$$

Si $a^2d - abc + c^2 = 0$, indépendemment du signe de a, l'hyperbole est définie sur l'ensemble des réels tout entier. De plus, les deux branches de l'hyperbole sont réduites à deux droites qui se coupent au point critique x_d. Dans les figures 1 et 2, nous avons mis sur un même graphe, pour tout x, les valeurs de $y_1(x)$ en traits continus rouges et les valeurs de $y_2(x)$ en traits continus verts dans les cas où $a > 0$ et $a < 0$. Ce cas est à noter car c'est le cas où l'hyperbole est dite dégénérée.

3. Si $\delta < 0$.
Les racines de $\Delta(x)$ sont complexes. Par conséquent, étant donné que a^2 est positif, alors quelque soit x, $\Delta(x)$ est positif. Ainsi, quelque soit x, l'équation (2) admet deux racines réelles.

$$\text{Si } a^2d - abc + c^2 < 0, \text{ l'hyperbole est donc définie pour tout } x \text{ réel.}$$

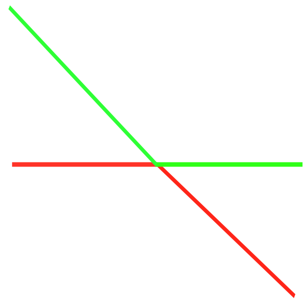

Figure 1: *Cas où $a > 0$, $\delta = 0$, y_1 (rouge), y_2 (vert)*

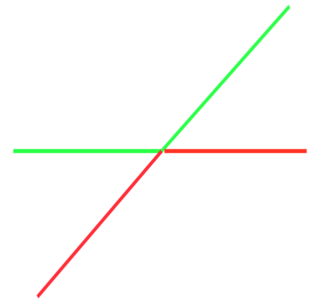

Figure 2: *Cas où $a < 0$, $\delta = 0$, y_1 (rouge), y_2 (vert)*

Cas où $a = 0$

L'équation (2) devient
$$y^2 + by + cx + d = 0.$$
Le discriminant associé vaut $\Delta(x) = b^2 - 4(cx + d)$. Par conséquent, $\Delta(x) \geq 0$ si $cx \leq \frac{b^2-4d}{4}$. Dans ce cas, l'équation admet deux solutions réelles

- $y_1(x) = \frac{-b-\sqrt{b^2-4(cx+d)}}{2}$
- $y_2(x) = \frac{-b+\sqrt{b^2-4(cx+d)}}{2}$.

Dans le cas où $\Delta(x) < 0$, l'équation n'admet pas de solution.
Si $\Delta(x) \geq 0$, l'ensemble de définition de $y_1(x)$ et $y_2(x)$ dépend de c.

Pour discuter cette dépendance en c, nous allons étudier séparément le cas où $c \neq 0$ et le cas où $c = 0$.

Cas où $c \neq 0$

On note $\xi = \frac{b^2-4d}{4c}$. Si $c > 0$, $\Delta(x) \geq 0$ sur $]-\infty;\xi]$. Ainsi, $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont définies sur $]-\infty;\xi]$.
Par contre, si $c < 0$, $\Delta(x) \geq 0$ sur $[\xi;+\infty[$. Ainsi, $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont définies sur $[\xi;+\infty[$.
Dans ce cas particulier où $a = 0$, dépendement du signe de c, l'hyperbole est définie soit sur $]-\infty;\xi]$ soit sur $[\xi;+\infty[$. Par conséquent, indépendemment du signe de c, l'hyperbole est réduite à une parabole.

Cas où $c = 0$

La quantité $\Delta(x)$ est réduite à $b^2 - 4d$. Si $b^2 - 4d \geq 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles

- $y_1(x) = \frac{-b-\sqrt{b^2-4d}}{2}$
- $y_2(x) = \frac{-b+\sqrt{b^2-4d}}{2}$

qui forment deux droites parallèles à l'axe des abscisses, symétriques par rapport à la droite d'équation $y = -\frac{b}{2}$. Ces deux droites sont confondues avec la droite d'équation $y = -\frac{b}{2}$ si $\Delta = 0$. Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution. Par conséquent, l'hyperbole est soit réduite à deux droites parallèles qui peuvent être confondues, soit n'est pas définie sur l'ensemble des réels.

2.1.2 Conclusion

Il existe des cas, comme le cas où $a = 0$ et $c = 0$, où l'ensemble de définition et l'allure de l'hyperbole sont établis de manière claire (deux droites parallèles). Il est nécessaire à présent d'effectuer une étude asymptotique des branches de l'hyperbole pour les autres cas où l'hyperbole n'est pas réduite à des droites.

2.2 Étude asymptotique de l'hyperbole

Les cas où une étude asymptotique est nécessaire sont les cas suivants :

- cas 1 : $a \neq 0$ et $\delta > 0$,
- cas 2 : $a \neq 0$ et $\delta < 0$,
- cas 3 : $a = 0$ et $c \neq 0$.

2.2.1 Étude asymptotique de l'hyperbole dans le cas 1

Si $a \neq 0$ et $\delta > 0$, alors l'équation 2 admet deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ définies sur l'intervalle $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ avec

- $x_1 = \frac{-ab+2c-2\sqrt{a^2d-abc+c^2}}{a^2}$
- $x_2 = \frac{-ab+2c+2\sqrt{a^2d-abc+c^2}}{a^2}$.

Nous allons faire une étude asymptotique des fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Étude asymptotique de $y_1(x)$ en $-\infty$

Rappelons la formule de $y_1(x)$:

$$y_1(x) = \frac{-(ax+b) - \sqrt{(ax+b)^2 - 4(cx+d)}}{2}.$$

Nous pouvons écrire $y_1(x)$ de cette forme, en supposant que a et b sont des quantités finies,

$$y_1(x) = \frac{-(ax+b) - \mid ax+b \mid \sqrt{1 - \frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}}}{2}.$$

- Si $a > 0$.
  Lorsque x tend vers $-\infty$, alors $ax+b < 0$. Ainsi,

  $$y_1(x) = \frac{-(ax+b) + (ax+b)\sqrt{1 - \frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}}}{2}.$$

  Si x tend vers $-\infty$, alors $\frac{cx+d}{(ax+b)^2}$ tend vers 0. Nous pouvons donc faire un développement limité de $\sqrt{1 - \frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}}$ lorsque x tend vers $-\infty$. Ainsi,

  $$\sqrt{1 - \frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}} \sim 1 - \frac{1}{2}\frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{16(cx+d)^2}{(ax+b)^4}.$$

Donc, lorsque x tend vers $-\infty$ et que $a>0$,

$$\begin{array}{lcl} y_1(x) & \sim & \frac{-(ax+b)+(ax+b)(1-\frac{2(cx+d)}{(ax+b)^2}-\frac{2(cx+d)^2}{(ax+b)^4})}{2} \\ y_1(x) & \sim & -\frac{cx+d}{ax+b}-\frac{(cx+d)^2}{(ax+b)^3} \\ y_1(x) & \sim & -(\frac{c}{a}+\frac{1}{x}\frac{ad-bc}{a^2})-\frac{c^2}{a^3}\frac{1}{x} \\ y_1(x) & \sim & -\frac{c}{a}+\frac{1}{x}\frac{abc-a^2d-c^2}{a^3}. \end{array}$$

Une asymptote à l'hyperbole en $-\infty$ lorsque $a>0$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses et d'équation $y=-\frac{c}{a}$. La position relative de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le terme $\frac{abc-a^2d-c^2}{a^3}=-\frac{\delta}{16a^3}$. Comme $\delta>0$, l'hyperbole sera définie sur $]-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty[$ et la courbe décrite par $y_1(x)$ sera située au dessus de l'asymptote.

- Si $a<0$.
  Lorsque x tend vers $-\infty$, alors $ax+b>0$. Ainsi,

$$y_1(x)=\frac{-(ax+b)-(ax+b)\sqrt{1-\frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}}}{2}.$$

Si x tend vers $-\infty$, alors $\frac{cx+d}{(ax+b)^2}$ tend vers 0. De la même façon que précédemment, nous pouvons écrire que lorsque x tend vers $-\infty$ et que $a<0$,

$$\begin{array}{lcl} y_1(x) & \sim & \frac{-(ax+b)-(ax+b)(1-\frac{2(cx+d)}{(ax+b)^2}-\frac{2(cx+d)^2}{(ax+b)^4})}{2} \\ y_1(x) & \sim & -(ax+b)+\frac{(cx+d)}{(ax+b)}+\frac{(cx+d)^2}{(ax+b)^3} \\ y_1(x) & \sim & -(ax+b)+(\frac{c}{a}+\frac{1}{x}\frac{ad-bc}{a^2}+\frac{1}{x}\frac{c^2}{a^3} \\ y_1(x) & \sim & -(ax+b)+\frac{c}{a}+\frac{1}{x}\frac{a^2d-abc+c^2}{a^3}. \end{array}$$

Une asymptote à l'hyperbole en $-\infty$ lorsque $a<0$ est une droite d'équation $y=-ax-b+\frac{c}{a}$. La position relative de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le terme $\frac{a^2d-abc+c^2}{a^3}=\frac{\delta}{16a^3}$. Comme $\delta>0$, alors l'hyperbole est définie sur $]-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty[$ et la courbe décrite par $y_1(x)$ est située au dessus de l'asymptote.

Étude asymptotique de $y_1(x)$ en $+\infty$

Comme précédemment, nous écrivons $y_1(x)$ sous la forme suivante :

$$y_1(x)=\frac{-(ax+b)-\mid ax+b\mid\sqrt{1-\frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}}}{2}.$$

- Si $a>0$.
  Lorsque x tend vers $+\infty$, alors $ax+b>0$. Ainsi,

$$y_1(x)=\frac{-(ax+b)-(ax+b)\sqrt{1-\frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}}}{2}.$$

Si x tend vers $+\infty$, alors $\frac{cx+d}{(ax+b)^2}$ tend vers 0. Donc, lorsque x tend vers $+\infty$ et que $a>0$,

$$\begin{array}{lcl} y_1(x) & \sim & \frac{-(ax+b)-(ax+b)(1-\frac{2(cx+d)}{(ax+b)^2}-\frac{2(cx+d)^2}{(ax+b)^4})}{2} \\ y_1(x) & \sim & -(ax+b)+\frac{c}{a}+\frac{1}{x}\frac{a^2d-abc+c^2}{a^3} \end{array}$$

qui a été démontré dans la section précédente. Une asymptote à l'hyperbole en $+\infty$ lorsque $a > 0$ est une droite d'équation $y = -ax - b + \frac{c}{a}$. La position relative de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le terme $\frac{a^2d - abc + c^2}{a^3} = \frac{\delta}{16a^3}$. Comme $\delta > 0$, l'hyperbole est définie sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et la courbe décrite par $y_1(x)$ est située au dessus de l'asymptote.

- Si $a < 0$.
  Lorsque x tend vers $+\infty$, alors $ax + b < 0$. Ainsi,

$$y_1(x) = \frac{-(ax+b) + (ax+b)\sqrt{1 - \frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}}}{2}.$$

  Si x tend vers $+\infty$, alors $\frac{cx+d}{(ax+b)^2}$ tend vers 0. Donc, lorsque x tend vers $+\infty$ et que $a < 0$,

$$\begin{array}{lcl} y_1(x) & \sim & \frac{-(ax+b)+(ax+b)(1-\frac{2(cx+d)}{(ax+b)^2} - \frac{2(cx+d)^2}{(ax+b)^4})}{2} \\ y_1(x) & \sim & -\frac{c}{a} + \frac{1}{x}\frac{abc - da^2 - c^2}{a^3}. \end{array}$$

  Une asymptote à l'hyperbole en $+\infty$ lorsque $a < 0$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = -\frac{c}{a}$. La position relative de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le terme $\frac{abc - a^2d - c^2}{a^3} = -\frac{\delta}{16a^3}$. Comme $\delta > 0$, l'hyperbole est définie sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et la courbe décrite par $y_1(x)$ est située au dessus de l'asymptote.

Étude asymptotique de $y_2(x)$ en $-\infty$

Pour étudier $y_2(x)$, nous nous inspirons de ce qui vient d'être établi. Rappelons la formule de $y_2(x)$:

$$y_2(x) = \frac{-(ax+b) + \sqrt{(ax+b)^2 - 4(cx+d)}}{2}.$$

Nous pouvons écrire $y_2(x)$ de cette forme :

$$y_2(x) = \frac{-(ax+b) + \mid ax+b \mid \sqrt{1 - \frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}}}{2}.$$

- Si $a > 0$.
  Lorsque x tend vers $-\infty$, alors $ax + b < 0$. Ainsi,

$$y_2(x) = \frac{-(ax+b) - (ax+b)\sqrt{1 - \frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}}}{2}.$$

  Si x tend vers $-\infty$, alors $\frac{cx+d}{(ax+b)^2}$ tend vers 0. Donc, lorsque x tend vers $-\infty$ et que $a > 0$,

$$\begin{array}{lcl} y_2(x) & \sim & \frac{-(ax+b)-(ax+b)(1-\frac{2(cx+d)}{(ax+b)^2} - \frac{2(cx+d)^2}{(ax+b)^4})}{2} \\ y_2(x) & \sim & -(ax+b) + \frac{c}{a} + \frac{1}{x}\frac{a^2d - abc + c^2}{a^3}. \end{array}$$

  Une asymptote à l'hyperbole en $-\infty$ lorsque $a > 0$ est une droite d'équation $y = -ax - b$. La position relative de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le terme $\frac{a^2d - abc + c^2}{a^3} = \frac{\delta}{16a^3}$. Comme $\delta > 0$, l'hyperbole est définie sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et la courbe décrite par $y_1(x)$ est située en dessous de l'asymptote.

- Si $a < 0$.
  Lorsque x tend vers $-\infty$, alors $ax+b > 0$. Ainsi,

$$y_2(x) = \frac{-(ax+b)+(ax+b)\sqrt{1-\frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}}}{2}.$$

  Si x tend vers $-\infty$, alors $\frac{cx+d}{(ax+b)^2}$ tend vers 0. Donc, lorsque x tend vers $-\infty$ et que $a < 0$,

$$\begin{array}{lcl} y_2(x) & \sim & \frac{-(ax+b)+(ax+b)(1-\frac{2(cx+d)}{(ax+b)^2}-\frac{2(cx+d)^2}{(ax+b)^4})}{2} \\ y_2(x) & \sim & -\frac{c}{a}+\frac{1}{x}\frac{abc-da^2-c^2}{a^3}. \end{array}$$

  Une asymptote à l'hyperbole en $-\infty$ lorsque $a < 0$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = -\frac{c}{a}$. La position relative de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le terme $\frac{abc-a^2d-c^2}{a^3} = -\frac{\delta}{16a^3}$. Comme $\delta > 0$, l'hyperbole est définie sur $]-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty[$ et la courbe décrite par $y_2(x)$ est située en dessous de l'asymptote.

Étude asymptotique de $y_2(x)$ en $+\infty$

Comme précédemment, nous écrivons $y_2(x)$ sous la forme suivante :

$$y_2(x) = \frac{-(ax+b)+\mid ax+b \mid \sqrt{1-\frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}}}{2}.$$

- Si $a > 0$.
  Lorsque x tend vers $+\infty$, alors $ax+b > 0$. Ainsi,

$$y_2(x) = \frac{-(ax+b)+(ax+b)\sqrt{1-\frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}}}{2}.$$

  Si x tend vers $+\infty$, alors $\frac{cx+d}{(ax+b)^2}$ tend vers 0. Donc, lorsque x tend vers $+\infty$ et que $a > 0$,

$$\begin{array}{lcl} y_2(x) & \sim & \frac{-(ax+b)-(ax+b)(1-\frac{2(cx+d)}{(ax+b)^2}-\frac{2(cx+d)^2}{(ax+b)^4})}{2} \\ y_2(x) & \sim & -\frac{c}{a}+\frac{1}{x}\frac{abc-da^2-c^2}{a^3}. \end{array}$$

  Une asymptote à l'hyperbole en $+\infty$ lorsque $a < 0$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = -\frac{c}{a}$. La position relative de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le terme $\frac{abc-da^2-c^2}{a^3} = -\frac{\delta}{16a^3}$. Comme $\delta > 0$, l'hyperbole est définie sur $]-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty[$ et la courbe décrite par $y_2(x)$ est située en dessous de l'asymptote.

- Si $a < 0$.
  Lorsque x tend vers $+\infty$, alors $ax+b < 0$. Ainsi,

$$y_2(x) = \frac{-(ax+b)-(ax+b)\sqrt{1-\frac{4(cx+d)}{(ax+b)^2}}}{2}.$$

  Si x tend vers $+\infty$, alors $\frac{cx+d}{(ax+b)^2}$ tend vers 0. Donc, lorsque x tend vers $+\infty$ et que $a < 0$,

$$\begin{array}{lcl} y_2(x) & \sim & \frac{-(ax+b)-(ax+b)(1-\frac{2(cx+d)}{(ax+b)^2}-\frac{2(cx+d)^2}{(ax+b)^4})}{2} \\ y_2(x) & \sim & -(ax+b)+\frac{c}{a}+\frac{1}{x}\frac{a^2d-abc+c^2}{a^3}. \end{array}$$

Une asymptote à l'hyperbole en $+\infty$ lorsque $a > 0$ est une droite d'équation $y = -ax - b$. La position relative de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le terme $\frac{a^2d-abc+c^2}{a^3} = \frac{\delta}{16a^3}$. Comme $\delta > 0$, l'hyperbole est définie sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et la courbe décrite par $y_2(x)$ est située en dessous de l'asymptote.

2.2.2 Étude asymptotique de l'hyperbole dans le cas 2

Si $a \neq 0$ et $\delta < 0$, alors l'équation 2 admet deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ définies sur l'ensemble des réels. Nous pouvons effectuer la même analyse que dans le cas 1 et obtenir ainsi que l'hyperbole admet les mêmes asymptotes que dans le cas 1, c'est à dire la droite d'équation $y = -\frac{c}{a}$ et la droite d'équation $y = -ax - b + \frac{c}{a}$.

2.2.3 Étude asymptotique de l'hyperbole dans le cas 3

Dans le cas 3, les équations $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deviennent :

- $y_1(x) = \frac{-b-\sqrt{b^2-4(cx+d)}}{2}$
- $y_2(x) = \frac{-b+\sqrt{b^2-4(cx+d)}}{2}$.

Ces deux fonctions sont définies sur $]-\infty; \xi]$ si c est positif et sur $[\xi; +\infty[$ si c est négatif. Nous remarquons que ces deux fonctions n'admettent pas d'asymptote.

2.3 Conclusion de l'étude de l'hyperbole

Rappelons que

- $x_1 = \frac{-ab+2c-2\sqrt{a^2d-abc+c^2}}{a^2}$
- $x_2 = \frac{-ab+2c+2\sqrt{a^2d-abc+c^2}}{a^2}$
- $x_d = \frac{-ab+2c}{a^2}$
- $\xi = \frac{b^2-4d}{4c}$

Donnons à présent l'ensemble des formes géométriques que peut admettre l'équation (2).

1. Cas de l'hyperbole : discontinuité de y_1 (rouge) par rapport à y_2 (vert)

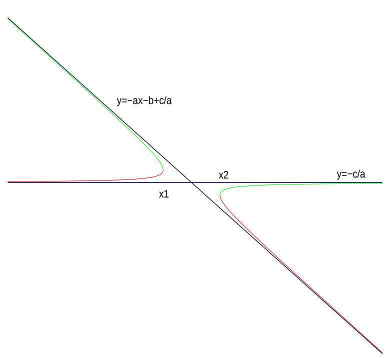

Figure 3: $\delta > 0$ *et* $a > 0$

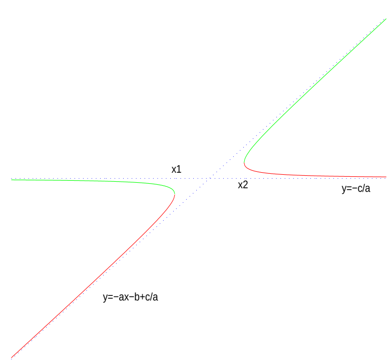

Figure 4: $\delta > 0$ *et* $a < 0$

2. Cas de l'hyperbole : continuité de y_1 (rouge) par rapport à y_2 (vert) admettant un point double

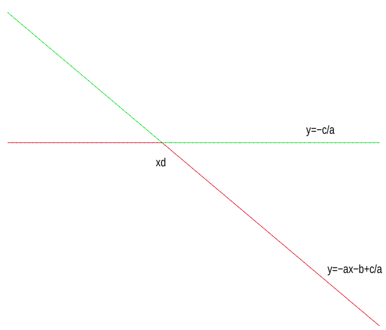

Figure 5: $\delta = 0$ *et* $a > 0$

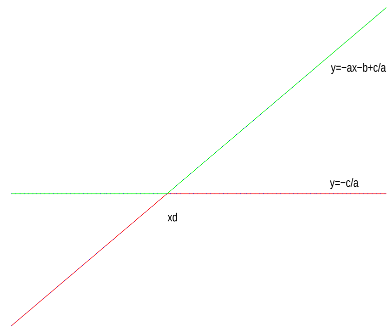

Figure 6: $\delta = 0$ *et* $a < 0$

3. Cas de l'hyperbole : continuité lisse de y_1 (rouge) par rapport à y_2 (vert)

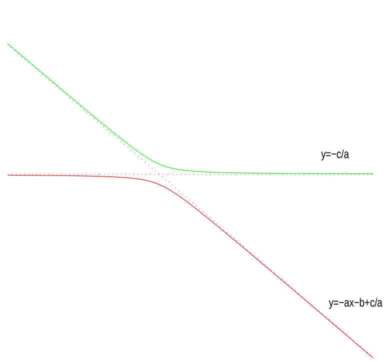

Figure 7: $\delta < 0$ *et* $a > 0$

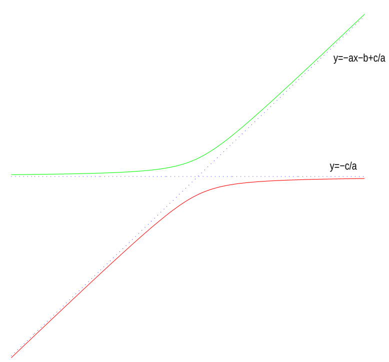

Figure 8: $\delta < 0$ *et* $a < 0$

4. Cas de la parabole ($a = 0$, y_1 en rouge et y_2 en vert)

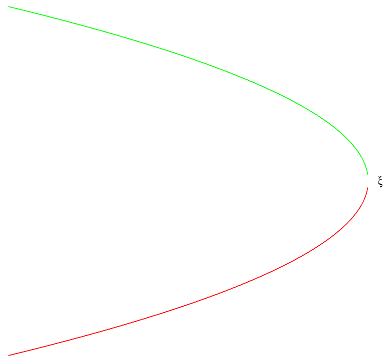

Figure 9: $a = 0$ *et* $c > 0$

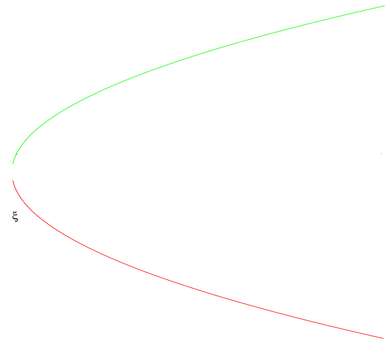

Figure 10: $a = 0$ *et* $c < 0$

5. Cas de la parabole dégénérée

- Sommet à l'infini (y_1 en rouge et y_2 en vert)

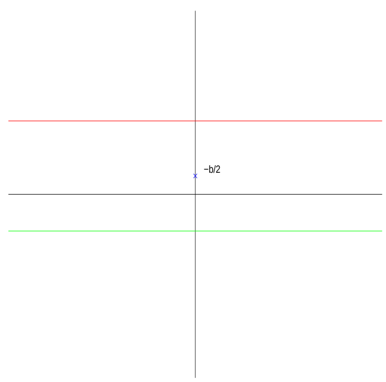

Figure 11: $a = 0$, $c = 0$ *et* $b^2 - 4d > 0$

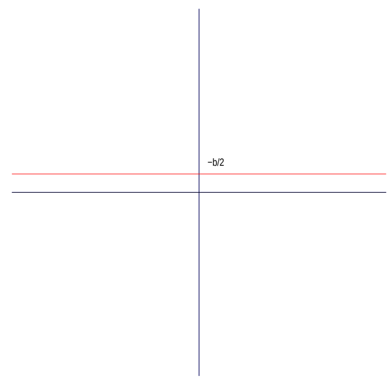

Figure 12: $a = 0$, $c = 0$ *et* $b^2 - 4d = 0$ *: une droite double*

- Pas de racines réelles pour y_1 et y_2 lorque $a = 0$, $c = 0$ et $b^2 - 4d < 0$

Dressons le tableau résumant tous les cas de figures rencontrés.

Hyperbole générique	$a \neq 0$	$\delta > 0$	$a > 0$ $a < 0$	figure 3 figure 4	Discontinuité
		$\delta = 0$	$a > 0$ $a < 0$	figure 5 figure 6	Continuité
		$\delta < 0$	$a > 0$ $a < 0$	figure 7 figure 8	Continuité lisse
Parabole singulière	$a = 0$	$c \neq 0$	$c > 0$ $c < 0$	figure 9 figure 10	Discontinuité
Point dégénéré	$a = 0$	$c = 0$	$b^2 - 4d > 0$ $b^2 - 4d = 0$ $b^2 - 4d < 0$	figure 11 figure 12	

3 Étude de l'évolution de l'hyperbole en fonction des paramètres

Nous avons ainsi des cas d'hyperboles dégénérées et génériques. Nous allons étudier l'évolution de l'hyperbole des cas génériques vers les cas dégénérés.

3.1 Cas où $a \neq 0$ et $\delta > 0$ vers le cas où $a = 0$ et $c \neq 0$

Si a tend vers 0 et c est fixe non nul, alors $\delta = 16(a^2d - abc + c^2) \sim 16c^2$ donc δ est positif. Ainsi, les solutions de l'équation 2 forment l'hyperbole de la figure 3 ou 4. A la limite, lorsque $a = 0$, les solutions de l'équation 2 sont sur une hyperbole représentées par la figure 9 ou 10.
Comment évoluent les figures 3 et 4 lorsque a tend vers 0? A la limite, seront-elles comme l'une des figures 9 ou 10?

Étudions à présent les comportements des deux valeurs x_1 et x_2 lorsque a tend vers 0. Nous allons nous situer dans le cas limite où a est proche de 0 mais non nul et que c est non nul. Dans ce cas là, nous savons que $\sqrt{a^2d - abc + c^2}$ peut s'écrire $\mid c \mid \sqrt{\frac{a^2d-abc}{c^2} + 1}$.
Comme a tend vers 0, nous pouvons faire un développement limité au voisinage de 0 et ainsi écrire

$$\sqrt{a^2d - abc + c^2} \sim \mid c \mid (1 + \frac{1}{2}\frac{a^2d - abc}{c^2} - \frac{1}{8}\frac{(a^2d - abc)^2}{c^4}).$$

Comme on suppose que a tend vers 0, on peut donc écrire

$$x_1 \sim \frac{-ab+2c-2|c|(1+\frac{1}{2}\frac{a^2d-abc}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{(a^2d-abc)^2}{c^4})}{a^2}.$$

Afin de déterminer les comportement des extrémités des hyperboles x_1 et x_2 quand a tend vers 0, nous différencions les deux cas : le cas où $c > 0$ et le cas où $c < 0$.

- Si $c > 0$.
  Dans ce cas précis,

  $$\begin{aligned} x_1 &\sim \frac{-ab+2c-2c(1+\frac{1}{2}\frac{a^2d-abc}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{(a^2d-abc)^2}{c^4})}{a^2} \\ x_1 &\sim -\frac{d}{c} + \frac{1}{4}\frac{b^2}{c} + \frac{1}{4}\frac{a^2d^2-abcd}{c^3}, \end{aligned}$$

  et

  $$\begin{aligned} x_2 &\sim \frac{-ab+2c+2c(1+\frac{1}{2}\frac{a^2d-abc}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{(a^2d-abc)^2}{c^4})}{a^2} \\ x_2 &\sim -\frac{2b}{a} + \frac{4c}{a^2} - \frac{1}{4}\frac{b^2c^2}{c^3} + \frac{d}{c} - \frac{1}{4}\frac{a^2d^2}{c^3} + \frac{1}{2}\frac{abd}{c^2}. \end{aligned}$$

  Ainsi, lorsque a tend vers 0 et que $c > 0$, x_1 tend vers $\xi = -\frac{d}{c} + \frac{1}{4}\frac{b^2}{c}$ et x_2 tend vers $+\infty$. On retrouve la parabole de la figure 9.

- Si $c < 0$. Dans ce cas précis,

  $$\begin{aligned} x_1 &\sim \frac{-ab+2c+2c(1+\frac{1}{2}\frac{a^2d-abc}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{(a^2d-abc)^2}{c^4})}{a^2} \\ x_1 &\sim -\frac{2b}{a} + \frac{4c}{a^2} - \frac{1}{4}\frac{b^2}{c} + \frac{d}{c} - \frac{1}{4}\frac{a^2d^2}{c^3} + \frac{1}{2}\frac{abd}{c^2} \end{aligned}$$

  et

  $$\begin{aligned} x_2 &\sim \frac{-ab+2c+2c(1+\frac{1}{2}\frac{a^2d-abc}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{(a^2d-abc)^2}{c^4})}{a^2} \\ x_2 &\sim -\frac{d}{c} + \frac{1}{4}\frac{b^2}{c} + \frac{1}{4}\frac{a^2d^2-abcd}{c^3}. \end{aligned}$$

  Ainsi, lorsque a tend vers 0 et que $c < 0$, x_1 tend vers $-\infty$ et x_2 tend vers $\xi = -\frac{d}{c} + \frac{1}{4}\frac{b^2}{c}$. On retrouve la parabole de la figure 10.

Dans le cas où c est fixe non nul, lorsque a tend vers 0, une branche de l'hyperbole des figures 3 et 4 s'éloigne à l'infini alors que la seconde branche évolue pour être de la forme d'une parabole comme celle représentée par la figure 9 ou 10.
Le cas de la figure 9 ou 10 ne peuvent provenir que du cas de la figure 3 ou 4. En effet, lorsque on fait tendre a vers 0 et on garde c fixe non nul, à partir d'une certaine valeur de a la quantité δ est de l'ordre de $16c^2$ donc strictement positive.

3.2 Cas des figures où $a \neq 0$ et $c \neq 0$ vers les cas des figures où $a = 0$ et $c = 0$

On rappelle que $\delta = 16(a^2d - abc + c^2) = 16a^2(d - b\frac{c}{a} + (\frac{c}{a})^2)$. Notons par t l'élément $\frac{c}{a}$. Ainsi, δ est du même signe que $d - bt + t^2$. Donc, à première vue,

- si $b^2 - 4d < 0$, alors $\delta > 0$ indépendemment de $t = \frac{c}{a}$. Donc, en faisant tendre a et c vers 0, la quantité δ sera toujours positive. Ainsi, les solutions de l'équation forment toujours l'hyperbole représentée par la figure 3 ou 4. A la limite, on a $a = 0$, $c = 0$ et $b^2 - 4d < 0$. Donc, les solutions de l'équation 2 sont l'ensemble vide. Comment évoluent les figures 3 et 4 lorsque $(a, c) \to (0, 0)$?
- si $b^2 - 4d = 0$, alors $\delta > 0$ quelque soit $t \neq \frac{b}{2}$.
  - En faisant tendre a et c vers 0 tel que $\frac{c}{a} \neq \frac{b}{2}$, la quantité δ sera toujours strictement positive. Ainsi, les solutions de l'équation forment toujours l'hyperbole représentée par la figure 3 ou 4. A la limite, on a $a = 0$, $c = 0$ et $b^2 - 4d = 0$. Donc, les solutions de l'équation 2 forment l'ensemble représenté par la figure 12. Comment évoluent les figures 3 et 4 lorsque $(a, c) \to (0, 0)$ et $b^2 - 4d = 0$? A la limite, sont-elles comme la figure 12?
  - En faisant tendre a et c vers 0 tel que $\frac{c}{a} = \frac{b}{2}$, la quantité δ sera toujours nulle. Ainsi, les solutions de l'équation forment toujours l'hyperbole représentée par les figures 5 ou 6. A la limite, on a $a = 0$, $c = 0$ et $b^2 - 4d = 0$. Donc, les solutions de l'équation 2 forment l'ensemble représenté par la figure 12. Comment évoluent les figures 5 et 6 lorsque $(a, c) \to (0, 0)$, $\frac{c}{a} = \frac{b}{2}$ et $b^2 - 4d = 0$? A la limite, sont-elles comme la figure 12?
- si $b^2 - 4d > 0$, alors, quelque soit x appartenant à l'intervalle
  $]-\infty; \frac{b-\sqrt{b^2-4d}}{2}[\cup]\frac{b+\sqrt{b^2-4d}}{2}; +\infty[$, on a $\delta > 0$.
  - En faisant tendre a et c vers 0, tout en gardant $\frac{c}{a}$ dans l'intervalle $]-\infty; \frac{b-\sqrt{b^2-4d}}{2}[\cup]\frac{b+\sqrt{b^2-4d}}{2}; +\infty[$, la quantité δ sera toujours positive. Ainsi, les solutions de l'équation forment toujours l'hyperbole représentée par la figure 3 ou 4. A la limite, on a $a = 0$, $c = 0$ et $b^2 - 4d > 0$. Donc, les solutions de l'équation 2 forment l'ensemble représenté par la figure 11. Comment évoluent les figures 3 et 4 lorsque $(a, c) \to (0, 0)$, $\frac{c}{a} \in]-\infty; \frac{b-\sqrt{b^2-4d}}{2}[\cup]\frac{b+\sqrt{b^2-4d}}{2}; +\infty[$ et $b^2 - 4d > 0$? A la limite, sont-elles comme la figure 11?
  - En faisant tendre a et c vers 0, tout en gardant $\frac{c}{a}$ égal à $\frac{b-\sqrt{b^2-4d}}{2}$ ou à $\frac{b+\sqrt{b^2-4d}}{2}$, la quantité δ sera nulle. Ainsi, les solutions de l'équation forment toujours l'hyperbole représentée par la figure 5 ou 6. A la limite, on a $a = 0$, $c = 0$ et $b^2 - 4d > 0$. Donc, les solutions de l'équation 2 forment l'ensemble représenté par la figure 11. Comment évoluent les figures 5 et 6 lorsque $(a, c) \to (0, 0)$, $\frac{c}{a} = \frac{b-\sqrt{b^2-4d}}{2}$ ou $\frac{c}{a} = \frac{b+\sqrt{b^2-4d}}{2}$ et $b^2 - 4d > 0$? A la limite, sont-elles comme la figure 11?
  - En faisant tendre a et c vers 0, tout en gardant $\frac{c}{a}$ dans l'intervalle $]\frac{b-\sqrt{b^2-4d}}{2}; \frac{b+\sqrt{b^2-4d}}{2}[$, la quantité δ sera toujours négative. Ainsi, les solutions de l'équation forment toujours l'hyperbole représentée par la figure 7 ou 8. A la limite, on a $a = 0$, $c = 0$ et $b^2 - 4d > 0$. Donc, les solutions de l'équation 2 forment l'ensemble représenté par la figure 11. Comment évoluent les figures 7 et 8 lorsque $(a, c) \to (0, 0)$, $\frac{c}{a} \in]\frac{b-\sqrt{b^2-4d}}{2}; \frac{b+\sqrt{b^2-4d}}{2}[$? A la limite, sont-elles comme la figure 11?

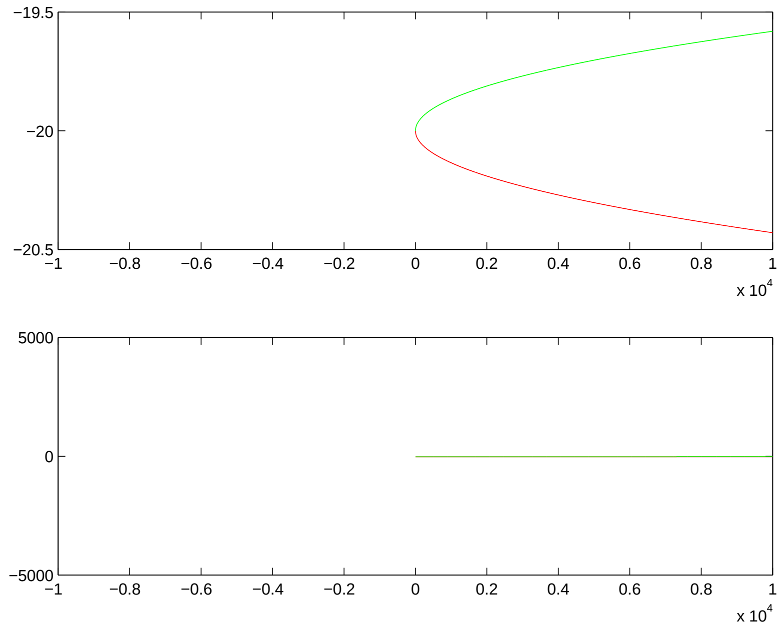

Figure 13: $(a,b,c,d) = (10^{-6}, 40, 2.10^{-6}, 400)$

Nous allons maintenant essayer de vérifier analytiquement les différents cas d'évolution cités précédement tout en fournissant des réponses aux questions posées.

- Cas où $b^2 - 4d < 0$.
  Dans ce cas, on obtient que $\delta = (2ab-4c)^2 - 4a^2(b^2-4d) > 0$. Les valeurs de x_1 et x_2 sont les suivantes

  - $x_1 = \frac{-(2ab-4c)-\sqrt{\delta}}{2a^2}$
  - $x_2 = \frac{-(2ab-4c)+\sqrt{\delta}}{2a^2}$.

  Alors lorsque (a,c) tend vers $(0,0)$ x_1 tend vers $-\infty$ et x_2 tend vers $+\infty$. L'ensemble de définition de l'hyperbole est alors vide. Les branches de l'hyperbole de la figure 3 ou 4 s'écartent au fur et à mesure que a et c tendent vers 0. On obtient alors le cas où l'équation (2) est réduit l'ensemble vide.

- Cas où $b^2 - 4d = 0$. Nous avons vu précédement qu'il faut distinguer les deux cas suivants : $\frac{c}{a} \neq \frac{b}{2}$ et $\frac{c}{a} = \frac{b}{2}$.

  - Si $\frac{c}{a} \neq \frac{b}{2}$.
    Si $b^2 - 4d = 0$, alors $\delta = (2ab-4c)^2$. Lorsque a tend vers 0, les valeurs de x_1 et x_2 peuvent varier d'une des façons suivantes :

    * x_1 est égal à 0 et x_2 tend vers $+\infty$, et l'hyperbole sera définie sur $]0, +\infty[$, soit
    * x_1 tend vers $-\infty$ et x_2 est égal à 0, et l'hyperbole sera définie sur $]-\infty, 0[$.

    Dans ces cas de figures, l'hyperbole de la figure 3 ou 4 évolue de la façon suivante : l'une des branches s'écarte à l'infini tandis que l'autre aura toujours le sommet en 0 et évolue pour prendre la forme d'une demi-droite comme le montre la figure 13 en prenant comme exemple $(a,b,c,d) = (10^{-6}, 40, 2.10^{-6}, 400)$.

    Lorsque a et c tendent vers 0, l'hyperbole évolue vers une forme qui est différente de celle où $(a,c) = (0,0)$. L'hyperbole évolue vers une demi-droite d'équation $y = -\frac{b}{2}$ définie sur $\mathbb{R}^-$ ou sur $\mathbb{R}^+$ alors

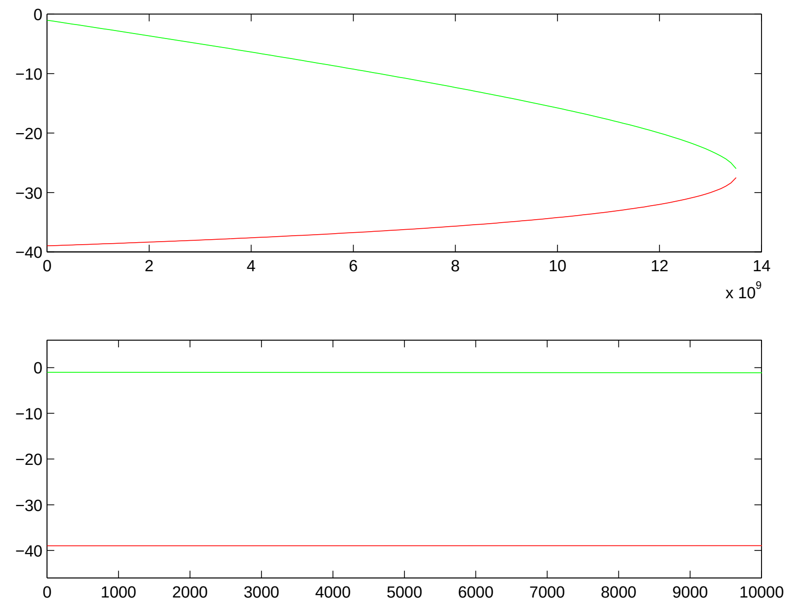

Figure 14: $(a,b,c,d) = (10^{-9}, 40, 5.10^{-8}, 40)$

que lorsque a et c sont égaux à 0, on a une droite d'équation $y = -\frac{b}{2}$. Ce phénomène est semblable à celui rencontré lors de l'étude de la convergence de la méthode d'Arnoldi en fonction du vecteur initial développée dans [2].

– Si $\frac{c}{a} = \frac{b}{2}$.
  Dans ce cas, la valeur de δ est nulle. L'hyperbole est alors représentée par la figure 5 ou 6. Comme $\frac{c}{a} = \frac{b}{2}$, la valeur de x_d est nulle. Les asymptotes sont les suivantes : une droite d'équation $y = -\frac{c}{a} = -\frac{b}{2}$ et une autre d'équation $y = -ax - \frac{b}{2}$. Lorsque a tend vers 0, les deux asymptotes tendent à devenir confondues et d'équation $y = -\frac{b}{2}$, comme le montre la figure 12.

– Cas où $b^2 - 4d > 0$

  * Si $t = \frac{c}{a} \in]-\infty; \frac{b-\sqrt{b^2-4d}}{2}[\cup]\frac{b+\sqrt{b^2-4d}}{2}; +\infty[$, alors $\delta > 0$. Mais indépendement du signe de a, x_1 et x_2 tendent ensemble vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ si a et c tendent vers 0 tout en gardant $t = \frac{c}{a} \in]-\infty; \frac{b-\sqrt{b^2-4d}}{2}[\cup]\frac{b+\sqrt{b^2-4d}}{2}; +\infty[$. L'hyperbole de la figure 3 ou 4 évolue de la façon suivante : une branche de l'hyperbole s'éloigne à l'infini tandis que l'autre devient définie sur tout $\mathbb{R}$. De plus, le point d'intersection des deux asymptotes tend vers l'infini. Comme de plus, l'angle entre les deux asymptotes devient de plus en plus petit, la branche de l'hyperbole définie sur tout $\mathbb{R}$ évolue pour devenir deux droites parallèles comme le montre la figure suivante 14 en prenant comme exemple $(a,b,c,d) = (10^{-9}, 40, 5.10^{-8}, 40)$. Lorsque a et c tendent vers 0, les figures 3 et 4 évoluent vers la forme de la figure 11.

  * Si $t = \frac{c}{a} = \frac{b-\sqrt{b^2-4d}}{2}$ ou si $t = \frac{c}{a} = \frac{b+\sqrt{b^2-4d}}{2}$, alors $\delta = 0$ et on est dans le cas de l'hyperbole de la figure 5 ou 6. Donc, $x_d = \frac{\sqrt{b^2-4d}}{a}$ si $t = \frac{c}{a} = \frac{b-\sqrt{b^2-4d}}{2}$ et $x_d = -\frac{\sqrt{b^2-4d}}{a}$ si $t = \frac{c}{a} = \frac{b+\sqrt{b^2-4d}}{2}$. Lorsque a et c tendent vers 0, x_d tend alors vers l'infini. Une droite de la figure 5 ou 6 reste toujours parallèle à l'axe des abscisses et d'équation $y = -t$ où t est fixe. L'autre droite de la figure 5 ou 6 admet un coefficient directeur qui tend vers 0 et une ordonnée à l'origine (quand $x = 0$) constante $\frac{-3b \pm \sqrt{b^2-4d}}{2}$. Lorsque a et c tendent vers 0, l'hyperbole de la figure 5 ou 6 évolue vers la forme de la figure 11. En particulier, l'hyperbole de la figure 5 ou 6 évolue vers deux droites

parallèles d'équation $y_1(x) = -t$ et $y_2(x) = -b+t$. Si $t = \frac{b-\sqrt{b^2-4d}}{2}$, alors $y_1(x) = \frac{-b+\sqrt{b^2-4d}}{2}$ et $y_2(x) = \frac{-b-\sqrt{b^2-4d}}{2}$. Si $t = \frac{b+\sqrt{b^2-4d}}{2}$, alors $y_1(x) = \frac{-b-\sqrt{b^2-4d}}{2}$ et $y_2(x) = \frac{-b+\sqrt{b^2-4d}}{2}$.

∗ Si $t \in]\frac{b-\sqrt{b^2-4d}}{2}; \frac{b+\sqrt{b^2-4d}}{2}[$, alors $\delta < 0$ et on est dans le cas des figures 7 et 8. Dans ce cas, nous avons

· $y_1(x) = \frac{-(ax+b)-\sqrt{(ax+b)^2-4(cx+d)}}{2}$

· $y_2(x) = \frac{-(ax+b)+\sqrt{(ax+b)^2-4(cx+d)}}{2}$

qui sont des fonctions C^∞ sur tout l'ensemble des réels. Lorsque $(a,c) = (0,0)$ et $b^2-4d > 0$, les solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation 2 forment deux droites parallèles $y_1(x) = \frac{-b-\sqrt{b^2-4d}}{2}$ et $y_2(x) = \frac{-b+\sqrt{b^2-4d}}{2}$ de la figure 11. Nous nous attendons à ce que, lorsque a et c tendent vers 0, les deux branches de l'hyperbole de la figure 7 ou 8 tendent à être ces deux droites parallèles. Pour vérifier cela, nous allons chercher à calculer, pour x appartenant à $[-R,R]$, avec R fixe et très grand, et lorsque a et c tendent vers 0, la limite de la plus grande valeur atteinte par $\mid y_1(x) - \frac{-b-\sqrt{b^2-4d}}{2} \mid$ et $y_2(x) - \frac{-b+\sqrt{b^2-4d}}{2}$. Les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont continues donc $y_1(x) - \frac{-b-\sqrt{b^2-4d}}{2}$ ou $y_2(x) - \frac{-b+\sqrt{b^2-4d}}{2}$ atteignent un maximum en un point x_0 de l'intervalle $[-R,R]$. Pour calculer la limite, on pose $x = x_0$ et on fait tendre a et c vers 0. Il est clair alors que les deux limites cherchées sont nulles. Ainsi, lorsque a et c tendent vers 0, les deux branches de l'hyperbole de la figure 7 ou 8 tendent à être deux droites parallÌes d'équation $y_1(x) = \frac{-b-\sqrt{b^2-4d}}{2}$ et $y_2(x) = \frac{-b+\sqrt{b^2-4d}}{2}$ comme cela est représenté dans la figure 11.

Ceci achève l'étude de l'évolution de l'hyperbole en fonction des paramètres.

4 Détermination géomérique du nombre de solutions réelles de l'équation de degré 4

Dans la section précédente, nous avons effectué une étude de l'hyperbole d'équation (2). Grâce à cette étude, nous allons pouvons déterminer le nombre de solutions de l'équation (1) de degré 4, étant donné que ces solutions sont les abscisses des points d'intersection entre la parabole d'équation $y = x^2$ et l'hyperbole d'équation (2). Nous cherchons les différentes solutions possibles en distinguant tous les cas rencontrés dans la section précédente.

4.1 Si $(a,c) = (0,0)$ et $b^2-4d < 0$

Etant donné que l'hyperbole est réduite à l'ensemble vide, l'équation (1) n'admet pas de solution réelle.

4.2 Si $(a,c) = (0,0)$ et $b^2-4d = 0$

L'équation (1) admet comme solution les abscisses des points d'intersection entre la parabole $y = x^2$ et l'hyperbole dégénérée réduite à la droite $y = -\frac{b}{2}$.

- Si $b < 0$, alors $-\frac{b}{2} > 0$. Ainsi, l'équation (1) admet deux solutions doubles réelles $-\sqrt{\frac{-b}{2}}$ et $\sqrt{\frac{-b}{2}}$.
- Si $b = 0$, l'hyperbole dégénérée réduite à la droite $y = 0$. Ainsi, l'équation (1) admet une solution réelle de multiplicité 4 et égale à 0.
- Si $b > 0$, alors $-\frac{b}{2} < 0$. Ainsi, l'équation (1) n'admet pas de solution réelle.

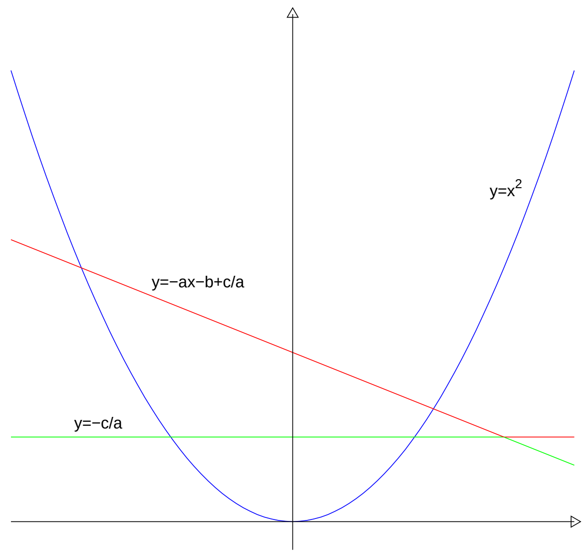

Figure 15: *Un cas où $a \neq 0$ et $\delta = 0$*

4.3 Si $(a,c) = (0,0)$ et $b^2 - 4d > 0$

L'hyperbole est réduite à deux droites parallèles d'équation $y_1(x) = \frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4d})$ et $y_2(x) = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4d})$.

- Si $-b - \sqrt{b^2 - 4d} > 0$, alors l'équation (1) admet 4 solutions simples, que l'on pourrait noter $\{x_1, x_2, -x_1, -x_2\}$.
- Si $d = 0$, alors si
  - $b < 0$, l'équation (1) admet une solution double $x = 0$ et deux solutions simples symétriques,
  - $b > 0$, l'équation (1) n'admet qu'une solution double $x = 0$.
- Si $-b - \sqrt{b^2 - 4d} < 0$ et $-b + \sqrt{b^2 - 4d} > 0$, alors l'équation (1) n'admet que deux solutions simples.
- Si $-b - \sqrt{b^2 - 4d} < 0$ et $-b + \sqrt{b^2 - 4d} < 0$, alors l'équation (1) n'admet pas de solution.

4.4 Si $a \neq 0$ et $\delta = 0$

La figure 15 une représentation de la parabole d'équation $y = x^2$ et de l'hyperbole d'équation (2) pour le cas où $a \neq 0$ et $\delta > 0$. Occupons nous d'abord de déterminer la position de la parabole d'équation $y = x^2$ par rapport à la droite d'équation $y = -\frac{c}{a}$.

4.4.1 Position de la parabole par rapport à la droite $y = -\frac{c}{a}$

Quand a-t-on la droite $y = -\frac{c}{a}$ tangente à la parabole $y = x^2$? Cette situation se produit lorsque l'équation $x^2 = -\frac{c}{a}$ admet une solution double, c'est à dire lorsque $c = 0$.

- Si $-\frac{c}{a} > 0$ alors la droite et la parabole admettent deux points d'intersection distincts.
- Si $-\frac{c}{a} = 0$ alors la droite et la parabole admettent un point d'intersection double qui est l'origine.
- Si $-\frac{c}{a} < 0$ alors la droite et la parabole n'admettent pas de point d'intersection.

Maintenant étudions la position de la parabole d'équation $y = x^2$ par rapport à la droite d'équation $y = -ax - b + \frac{c}{a}$.

4.4.2 Position de la parabole par rapport à la droite $y=-ax-b+\frac{c}{a}$

Quand a-t-on la droite $y=-ax-b+\frac{c}{a}$ tangente à la parabole $y=x^2$? Cette situation se produit lorsque l'équation $x^2=-ax-b+\frac{c}{a}$ qui équivaut à $x^2+ax+b-\frac{c}{a}$, admet une solution double. On pose $\Delta_1=a^2-4b+4\frac{c}{a}$ le discriminant de cette équation.

- Si $\Delta_1=0$, la droite $y=-ax-b+\frac{c}{a}$ est tangente à la parabole $y=x^2$. Remarquons que si $\Delta_1=0$ et $\delta=0$ alors $ac-4d=0$.

- Si $\Delta_1<0$, alors il n'y a pas de point d'intersection entre la droite et la parabole. Cela se produit dans les cas suivants :

  - si $a>0$, $c>0$ et $ac-4d<0$,
  - si $a>0$, $c<0$ et $ac-4d>0$,
  - si $a<0$, $c>0$ et $ac-4d>0$ et
  - si $a<0$, $c<0$ et $ac-4d<0$

- Si $\Delta_1>0$, alors la droite et la parabole admettent deux points d'intersection distincts. Cela se produit dans les cas suivants :

  - si $a>0$, $c>0$ et $ac-4d>0$,
  - si $a>0$, $c<0$ et $ac-4d<0$,
  - si $a<0$, $c>0$ et $ac-4d<0$ et
  - si $a<0$, $c<0$ et $ac-4d>0$

Ces deux études de positions de la parabole par rapport aux deux droites nous permettent de dresser le tableau suivant et de déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation (refequ1).

ac	$ac-4d$	Nbre de solutions réelles de l'équation (1)	Nbre de solutions complexes de l'équation (1)
>0	<0	aucune	4 conjuguées
	$=0$	1 double $x=-\frac{a}{2}$	2 conjuguées
	>0	2 simples	2 conjuguées
<0	<0	si $\frac{(2c-ab)^2}{a^3}\neq -c$, 4 simples si $\frac{(2c-ab)^2}{a^3}\neq -c$, 2 simples et 1 double $x=\frac{2c-ab}{a^2}$	aucune
	$=0$	si $4c\neq -a^3$, 2 simples et 1 double $x=-\frac{a}{2}$ si $4c=-a^3$, 1 simple et 1 triple $x=-\frac{a}{2}$	aucune
	>0	2 simples	2 conjuguées

Étudions le cas où $c=0$. Dans ce cas, la droite $y=-\frac{c}{a}$ est réduite à l'axe des abscisses et $\Delta_1=a^2-4d$. Comme $\delta=0$, alors on remarque que $d=0$ aussi.

- Si $\Delta_1<0$, alors l'équation (1) admet une solution nulle qui est double,
- si $\Delta_1=0$, alors l'équation (1) admet deux solutions qui sont doubles,
- si $\Delta_1>0$, alors l'équation (1) admet une solution double et deux solutions simples.

4.5 Si $a = 0$ et $c \neq 0$

Ce cas de figure est assez particulier car l'hyperbole est ici réduite à une parabole. On cherche donc les points d'intersection de ces deux paraboles afin de déterminer les solutions de l'équation (1). Il est très difficile de pouvoir déterminer le nombre de solutions et surtout de pouvoir affirmer dans quels cas en fonction des paramètres b, c et d.

Étant donnés un foyer et une directrice, une parabole est définie comme l'ensemble des points à égale distance de la directrice et du foyer.

Si on pose que

- les coordonnés du foyer de la parabole sont (x_0, y_0),
- la directrice est parallèle à l'axe des ordonnées et d'équation $y = \gamma$

alors, l'équation de la parabole est la suivante

$$y = \frac{1}{-2\gamma + 2y_0}x^2 + \frac{x_0}{\gamma - y_0}x + \frac{-\gamma^2 + y_0^2 + x_0^2}{-2\gamma + 2y_0}.$$

La parabole d'équation $y = x^2$ admet une directrice d'équation $y = -\frac{1}{4}$ et un foyer de coordonnées $(0, \frac{1}{4})$. On pose $\gamma_1 = -\frac{1}{4}$.

Si on pose que

- les coordonnés du foyer de la parabole sont (x_0, y_0),
- la directrice est parallèle à l'axe des abscisses et d'équation $y = \gamma$

alors, l'équation de la parabole est la suivante

$$x = \frac{1}{-2\gamma + 2x_0}y^2 + \frac{y_0}{\gamma - x_0}x + \frac{-\gamma^2 + x_0^2 + y_0^2}{-2\gamma + 2x_0}.$$

La parabole d'équation $y^2 + by + cx + d = 0$ admet une directrice d'équation $y = \frac{b^2+c^2-4d}{4c} = \xi + \frac{c}{4}$ et un foyer de coordonnées $(-\frac{b}{2}, \frac{b^2-c^2-4d}{4c})$ où $\frac{b^2-c^2-4d}{4c}$ peut s'écrire $\xi - \frac{c}{4}$. On pose $\gamma_2 = \xi - \frac{c}{4}$.

Soit M un point d'intersection entre les deux paraboles. Ce point M doit vérifier les deux conditions suivantes :

1. la distance entre M et le foyer F_1 de la parabole d'équation $y = x^2$ doit être la même que la distance entre le point M et la directrice $y = \gamma_1$ de cette même parabole. Notons d_1 cette distance.
2. la distance entre M et le foyer F_2 de la parabole d'équation $y^2 + by + cx + d = 0$ doit être la même que la distance entre le point M et la directrice $x = \gamma_2$ de cette même parabole. Notons d_2 cette distance.

La figure 16 suivante schématise ces deux conditions. La parabole d'équation $y = x^2$ est représentée en bleu et la parabole $y^2 + by + cx + d = 0$ en rouge et vert.
Remarquons que les deux distances d_1 et d_2 peuvent être différentes. Nous pouvons affirmer que

- lorsque le point $(\xi, -\frac{b}{2})$ est situé au dessus de la courbe comme pour la figure 16, c'est à dire que

  $$(\frac{b^2 - 4d}{4c})^2 < -\frac{b}{2},$$

  alors l'équation (1) admet deux solutions réelles, ou comme le montre la figure 17, une solution double.

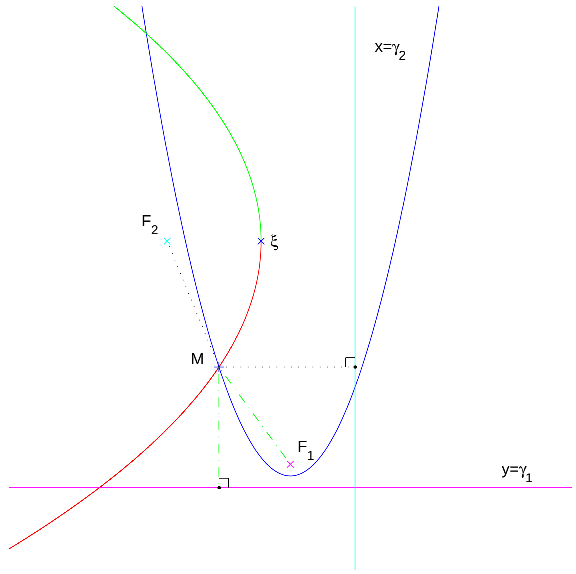

Figure 16: *Intersection de deux paraboles*

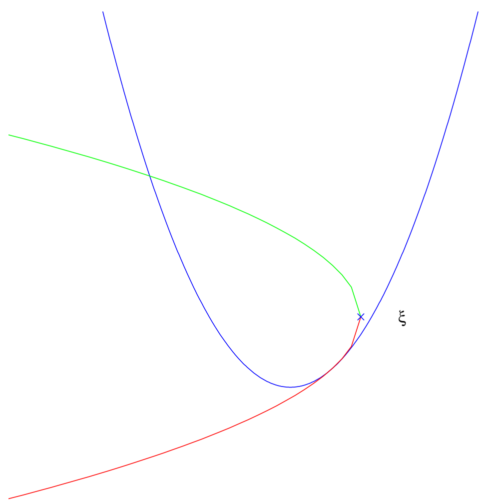

Figure 17: *Solution double pour* $(\frac{b^2-4d}{4c})^2 < -\frac{b}{2}$

- lorsque le point $(\xi, -\frac{b}{2})$ est sur la parabole d'équation $y = x^2$, alors l'équation (1) admet une solution double réelle de coordonnées $(\xi, -\frac{b}{2})$.

- lorsque le point $(\xi, -\frac{b}{2})$ est situé au dessous de la courbe comme pour la figure 16, c'est à dire que $(\frac{b^2-4d}{4c})^2 > -\frac{b}{2}$, alors on ne peut rien affirmer sur le nombre de solutions de l'équation (1), mais on sait qu'il peut en exister 0, une double ou deux simples, comme le montrent respectivement les trois représentations de la figure 18.

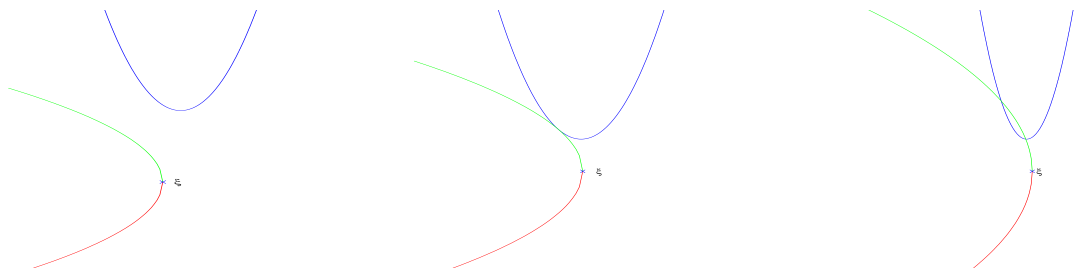

Figure 18: *Cas possibles pour* $(\frac{b^2-4d}{4c})^2 > -\frac{b}{2}$

4.6 Si $a \neq 0$ et $\delta < 0$

Géométriquement, nous pouvons affirmer que dans ce cas l'équation (1) peut admettre soit

- aucune solution,
- une solution double,
- deux solutions doubles,
- une solution de multiplicité 4,
- une solution triple et une solution simple,
- une solution double et deux solutions simples,
- deux solutions simples,
- quatre solutions simples.

En effet, si

- l'hyperbole est toujours située en dessous de la parabole, alors l'hyperbole et la parabole n'admettront pas de point d'intersection et l'équation (1) n'admettra pas de solution,

- la courbe définie par la fonction $y_2(x)$ coupe la parabole en un seul point qui est double, et la courbe définie par la fonction $y_1(x)$ reste en dessous de la parabole, alors l'équation (1) n'admettra qu'une solution double,

- la courbe définie par la fonction $y_2(x)$ coupe la parabole en deux points qui sont doubles, et la courbe définie par la fonction $y_1(x)$ reste en dessous de la parabole, alors l'équation (1) admettra deux solutions doubles,

- la courbe définie par la fonction $y_2(x)$ coupe la parabole en un point de multiplicité 4, et la courbe définie par la fonction $y_1(x)$ reste en dessous de la parabole, alors l'équation (1) admettra une solution de multiplicité 4,

- la courbe définie par la fonction $y_2(x)$ coupe la parabole en trois points dont un est double, et la courbe définie par la fonction $y_1(x)$ reste en dessous de la parabole, alors l'équation (1) admettra trois solutions dont une est double,
- la courbe définie par la fonction $y_2(x)$ coupe la parabole en deux points dont un est triple, et la courbe définie par la fonction $y_1(x)$ reste en dessous de la parabole, alors l'équation (1) admettra deux solutions dont une est triple,
- la courbe définie par la fonction $y_2(x)$ coupe la parabole en deux points simples, et la courbe définie par la fonction $y_1(x)$ reste en dessous de la parabole, alors l'équation (1) admettra deux solutions simples,
- la courbe définie par la fonction $y_2(x)$ coupe la parabole en deux points simples, et la courbe définie par la fonction $y_1(x)$ coupe en un point double la parabole, alors l'équation (1) admettra trois solutions dont une sera double,
- la courbe définie par la fonction $y_2(x)$ coupe la parabole en deux points simples, et la courbe définie par la fonction $y_1(x)$ coupe en deux points simples la parabole, alors l'équation (1) admettra quatre solutions simples.

4.7 Si $a \neq 0$ et $\delta > 0$

Géométriquement, nous pouvons affirmer que, dans ce cas et comme de la même manière que précédemment, l'équation (1) peut admettre soit

- aucune solution,
- une solution double,
- deux solutions doubles,
- une solution triple et une solution simple,
- une solution double et deux solutions simples,
- deux solutions simples,
- quatre solutions simples.

Notons qu'il est impossible d'obtenir ici une solution de multiplicité 4 pour l'équation (1).

5 Conclusion

Afin de résoudre une équation du $4^{ième}$ degré,

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

nous cherchons les abscisses des points d'intersection entre la parabole d'équation $y = x^2$ (dont les caractéristiques sont connues) et l'équation (2) de degré 2 en y dont les paramètres dépendent de x

$$y^2 + axy + by + cx + d = 0.$$

L'étude nous permet d'affirmer que l'équation (2) admet deux solutions y_1 et y_2 dépendant de x et qu'il existe trois principales représentations de cette équation suivant les valeurs des paramètres a, b, c et d. Ainsi,

- si $a \neq 0$, le cas est dit générique et l'équation (2) est une équation d'une hyperbole,

- si $a = 0$, le cas est dit singulier et l'équation (2) est une parabole,
- si $a = 0$ et si $c = 0$, dépendamment de $b^2 - 4d$, on obtient deux droites parallèles distinctes ou confondues ou l'ensemble vide.

La représentation des deux solutions y_1 et y_2 de l'équation (2) par deux couleurs distinctes permet de conclure sur la continuité/discontinuité de ces deux quantités. En effet, on sait que si $a^2d - abc + c^2 \leq 0$, alors il y a continuité entre y_1 et y_2. La difficulté de l'étude apparaît lorsque à la fois les deux paramètres a et c tendent vers 0. L'équation (2) admet une représentation géométrique lorsque a et c tendent vers 0 qui est différente de celle lorsque a et c sont égaux à 0. En connaissant le comportement de ces deux courbes, nous pouvons donc connaître les solutions de l'équation de degré 4.
Il est intéressant d'étudier le conditionnement des formules de calculs à l'aide des couleurs employées pour représenter chacune de ces courbes et l'application au calcul à précision finie.

References

[1] F. Klein. *Généralités sur les constructions d'expressions algébriques*. Ed. Diderot, 1997.

[2] E. Traviesas. *Sur le déploiement du champ spectral d'une matrice*. Ph.D. dissertation, Université Toulouse I, TH/PA/00/30, CERFACS, Mai 2000.