

# Calcul Algébrique non linéaire dans les algèbres de Dickson

Françoise Chaitin-Chatelin \*

CERFACS Technical Report TR/PA/06/07

**Résumé :** Cette note débute par une comparaison des propriétés respectives des cadres algébriques fournis par Clifford(1878) et Dickson(1914). Puis l'étude se concentre sur la non associativité et l'anisométrie de la multiplication. Elle met en pleine lumière le rôle central joué par les octonions dans le Calcul Algébrique non linéaire effectué dans les algèbres de Dickson sans division. Elle explique comment la présence de diviseurs de 0 rend le calcul non linéaire sensible aux paradoxes logiques. Cette sensibilité permet l'émergence de concepts imaginaires nouveaux par complexification, guidant ainsi l'évolution du Vivant.

**Keywords :** Clifford algebra, Dickson algebra, octonions, alternativity, flexibility, anisometry, zero divisors, Singular Value Decomposition, derivation, automorphism, logical paradox.

## 1 Introduction au Calcul Algébrique non linéaire

Grâce aux travaux théoriques de la 2<sup>e</sup> moitié du 19<sup>e</sup> siècle, et aux remarquables algorithmes réalisés tout au long du 20<sup>e</sup> siècle (qui sont présentés sous forme standardisée dans LAPACK), le calcul algébrique *linéaire* n'offre plus de difficulté conceptuelle

---

\*Ceremath, Université Toulouse 1 and CERFACS,42 avenue G. Coriolis 31057 Toulouse Cedex 1, France. E-mail: [chatelin@cerfacs.fr](mailto:chatelin@cerfacs.fr)

majeure. Les efforts algorithmiques, en ce début du 21<sup>e</sup> siècle, portent essentiellement sur la rapidité d'exécution, mais plus guère sur la fiabilité.

La situation est fort différente lorsque la *non linéarité* est présente. Le fameux paradoxe de Newcomb-Borel sur la répartition des chiffres significatifs d'un nombre au hasard montre que la Nature "réalise" principalement des calculs non linéaires [13,14]. Si le calcul non linéaire ne doit pas être ignoré, comment peut-on alors l'aborder?

Commençons par l'état des lieux. Idéalement l'ensemble  $E$  des nombres avec lesquels on calcule a une structure de *corps*  $(E, +, \times)$ , c'est-à-dire qu'il vérifie les 3 axiomes :

1.  $(E, +)$  est un groupe additif commutatif (0 élément neutre),
2.  $(E, +, \times)$  est un anneau : la  $\times$  est associative et distributive (à gauche et à droite) par rapport à  $+$  mais non nécessairement commutative,
3. il existe un élément unité  $1 \neq 0$ , et tout  $x \neq 0$  est inversible (à gauche et à droite)

Ce cadre axiomatique est utilisé tel quel, ou sous l'une des deux formes *affaiblies* suivantes (où l'axiome 3) disparaît):

- a) L'existence d'une multiplication *interne* est maintenue mais 3) est éliminé :  $(E, +, \times)$  a une structure *d'anneau*. On peut citer l'anneau des entiers, des polynômes, des matrices carrées.
- b) La multiplication interne devient *externe* (multiplication par un "scalaire" élément d'un corps de base), ce qui permet de passer à la notion de *vecteurs*, éléments d'un espace vectoriel *linéaire*.

Dans ce cas, non seulement l'axiome 3) a disparu mais aussi l'existence d'une multiplication interne. Il est clair que l'impossibilité de multiplier deux vecteurs impose des restrictions sévères sur le type de non linéarités abordable dans le cadre classique d'espaces vectoriels linéaires généraux (de dimension arbitraire finie ou non) où la multiplication de vecteurs n'existe pas.

Le choix historique de cadres conceptuels qui privilégient l'addition aux dépens de la multiplication n'est pas une nécessité imposée par la "nature des choses". C'est un **point de bifurcation**. Un autre choix est possible, où les 2 opérations  $+$  et  $\times$  coexistent avec 3), mais au prix de l'associativité de la  $\times$ . Le fait était connu de Hamilton dès Juillet 1844, exposé dans une lettre à Graves au sujet des octonions de ce dernier. Ayant à choisir pour la multiplication entre l'associativité et l'axiome 3) d'inversibilité, la communauté mathématique a tranché en faveur de l'associativité.

Les mathématiciens étaient-ils conscients des implications du rôle subalterne que cette décision conférait à la multiplication? Sans doute certains l'étaient-ils (qui ne voulaient pas restreindre le pouvoir du calcul en supprimant l'axiome 3)), à en juger par la farouche bataille d'idées pour et contre l'utilité pour la Physique de la multiplication de vecteurs 4D, qui fit rage à la fin du 19<sup>e</sup> siècle et qui vit la victoire de l'espace familier  $\mathbb{R}^3$  et la défaite des quaternions, pourtant associatifs! (Gibbs-Heaviside contre Maxwell-Tait).

Mais cette victoire -très temporaire- ne fit pas l'unanimité. Renoncer au calcul et à l'arithmétique en plus grande dimension a paru un prix trop lourd à payer pour certains mathématiciens. En témoignent les algèbres de Dickson (1914) que nous verrons plus loin, et qui se sont développées discrètement, aux marges de la Géométrie Algébrique. Elles sont de dimension  $2^k$  et l'existence d'une multiplication de vecteurs (non associative pour  $k \geq 3$ ) y joue un rôle prédominant.

D'une manière générale, on appelle *algèbre* une structure  $(E, +, \times)$  vérifiant les axiomes 1) et 2bis) :  $E$  est un espace vectoriel, et l'associativité de la  $\times$  n'est plus supposée. Les algèbres non associatives les plus connues sont les algèbres de Lie et de P. Jordan [25]. Les algèbres de Clifford présentées ci-dessous sont associatives.

## 2 Non commutativité de la multiplication et Géométrie Algébrique

Le domaine de la Géométrie Algébrique, né à la fin du 19<sup>e</sup> siècle, a connu un développement spectaculaire au 20<sup>e</sup> siècle avec d'importantes applications en Physique Théorique.

Le cadre en est classiquement fourni par les algèbres (associatives) de Clifford (1878). Ce cadre permet d'appréhender les conséquences de la *non commutativité* d'une multiplication qui demeure associative. Il réintègre les quaternions non commutatifs dans leurs droits d'outils légitimes de la Physique Théorique.

J. Baez [1] a rappelé pourquoi l'algèbre  $\mathbb{G}$  des octonions, de dimension 8, (alternative, soit non associative et donc "étrangère") fournit une explication exogène pour la périodicité 8 qui se rencontre dans la structure des algèbres de Clifford (Cartan 1908) et dans celle des groupes d'homotopie (Bott 1957).

La référence [1, p.157] fournit les 8 représentations des algèbres de Clifford  $Cliff(k)$  de dimension  $2^k$ ,  $k = 0$  à 7. Pour  $k \geq 8$ , la période 8 s'installe :

$$Cliff(k + 8) \cong Cliff(k) \otimes \mathbb{R}^{16 \times 16}$$

Les 3 types de nombres qui interviennent sont ceux définis par les 3 *corps*  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  construits sur les réels (de dimension 1, 2 et 4). Soit, respectivement, le corps des nombres réels, complexes et quaternions.

Voici ce qu'écrivait le physicien J. Baez en 2001:

"However, there is still no *proof* that the octonions are useful for understanding the real world. We can only hope that eventually this question will be settled one way or another" [1, p.147].

Nous ne prétendons pas répondre à cette question à la place de la Physique Théorique. Mais nous développons ci-dessous des raisons *mathématiques* qui placent les octonions au centre de notre compréhension du **Calcul Algébrique non linéaire** dans le cadre des algèbres de Dickson de dimension  $\geq 16$ . Leur rôle est aussi essentiel que celui de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

### 3 Calcul Algébrique dans les algèbres de Dickson

#### 3.1 La dimension 8, rupture entre algèbres de Clifford et de Dickson.

Pour aller plus loin dans l'étude de la multiplication, il paraît indispensable de s'intéresser à la *non associativité* : le produit vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  (resp.  $\mathbb{R}^7$ ) fournit un exemple physique (resp. géométrique) simple de produit non associatif et anticommutatif [4,6,11].

Donc il nous faut quitter le cadre trop limité des algèbres de Clifford. En 1912-1914, Dickson [16, p.15], a introduit les algèbres hypercomplexes  $A_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , de dimension  $2^k$  également, où chaque  $A_k$  est la *complexifiée* de l'algèbre précédente  $A_{k-1}$ , grâce à l'existence d'un vecteur dans  $A_{k-1}^\perp$ , que l'on prend pour unité complexe  $\tilde{1} = (0, 1)$ . Ce procédé, dit de duplication, est inductif : les 3 opérations (+,  $\times$ , conjugaison) au niveau  $k$  sont définies à l'aide des mêmes opérations au niveau  $k - 1$ , en partant de  $k = 1$  et  $A_0 = \mathbb{R}$ , muni des + et  $\times$  classiques, et de l'identité pour conjugaison.

On remarque que  $A_1 = \mathbb{C}$  et  $A_2 = \mathbb{H}$  sont associatives, donc identiques à  $Cliff(k)$ ,  $k = 1, 2$ . La bifurcation entre les suites  $Cliff(k)$  et  $A_k$  a lieu pour  $k = 3$  :  $Cliff(3) = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ , tandis que  $A_3 = \mathbb{G} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \times \tilde{1}$ , où  $\tilde{1}$  est l'unité complexe,  $\tilde{1} = (0, 1)$ .

Notons que  $\mathbb{G}$  n'est plus associative mais reste *alternative* et à *division*. L'arithmétique de l'anneau des entiers de  $\mathbb{G}$  est étudiée dans [7] à partir du travail de Mahler [22]. L'algèbre  $\mathbb{G}$  des octonions fut inventée par Graves fin 1843 et redécouverte par Cayley (1845).

A partir de la dimension 16 ( $k \geq 4$ ) les algèbres de Dickson restent quadratiques et flexibles (une forme faible d'associativité), mais elles admettent des diviseurs de 0. Cette anisométrie de la multiplication ( $\|x \times y\| \neq \|x\|\|y\|$  en général) a des conséquences dont la variété croît avec  $k \geq 4$  [10].

### 3.2 Mesures propres dans les algèbres de Dickson sans division

Une conséquence fondamentale de l'anisométrie dans  $A_k$ ,  $k \geq 4$ , pour la multiplication, porte sur le calcul des **valeurs singulières** de la multiplication (à gauche ou à droite) par un vecteur donné, soit l'une ou l'autre des applications linéaires :

$$L_a : x \mapsto a \times x \quad , \quad R_a : x \mapsto x \times a$$

[19,27]. Les valeurs singulières de  $L_a$  ou  $R_a$  sont les racines carrées non négatives des valeurs propres  $\geq 0$  de  $L_a^T L_a = R_a^T R_a$ .

Pour  $k \leq 3$ ,  $a$  est alternatif et  $R_a^T R_a = L_a^T L_a = \|a\|^2 I_{2k}$  :  $L_a$  et  $R_a$  admettent une *unique* valeur singulière égale à la norme euclidienne  $\|a\| = \sqrt{a\bar{a}}$ .

Mais ce n'est plus le cas, en général, pour  $k \geq 4$ . Considérons la représentation  $A_k = \mathbb{C}_{\bar{1}} \oplus \mathcal{D}_k$  où

- $\mathcal{D}_k = \mathbb{C}_{\bar{1}}^\perp$  représente les vecteurs "doublement purs" de  $A_k$ , à composante nulle sur 1 et  $\tilde{1}$ .

- $\mathbb{C}_{\bar{1}}$  représente le plan complexe des vecteurs qui alternent avec tout autre vecteur de  $A_k$ .  $\mathbb{C}_{\bar{1}}$  est invariant par l'action d'un automorphisme quelconque de  $A_k$ ,  $k \geq 4$ .

L'étude de la décomposition en valeurs singulières (SVD en anglais) de  $L_a$  (ou  $R_a$ ),  $a \in \mathcal{D}_k$ , est présentée dans [10]. L'idée de base remonte essentiellement à C. Jordan, 1874, et joue un rôle fondamental en Calcul Matriciel à précision finie [19,27] Lorsque  $a$  n'est pas alternatif, il existe des valeurs singulières  $\geq 0$ , *différentes* de  $\|a\|$ . En particulier, 0 est valeur singulière ssi  $a$  est un diviseur de 0 ( $\text{Ker} L_a \neq \{0\}$ , soit  $a \times x = 0$ ,  $x \neq 0$ ).

Les valeurs singulières  $\sqrt{\lambda}\|a\|$  de  $a \in \mathcal{D}_k$  sont les *mesures propres* de  $a$ . Tout vecteur  $a$  possède entre 1 (égale à  $\|a\|$ ) et  $2^{k-2}$  mesures propres distinctes, pour

$k \geq 4$ . On rappelle que la norme *arithmétique* de  $a$  est  $N(a) = \|a\|^2$ . Ces mesures propres découlent des propriétés spectrales de  $-L_a^2 : -a \times (a \times x) = \lambda N(a)x$ , ce qui entraîne  $\|a \times (a \times x)\| = \lambda N(a)\|x\|$ ,  $\lambda \geq 0$ .

Lorsque  $x$  devient  $-L_a^2 x$  par deux multiplications successives non associatives par  $a$ ,  $\|x\|$  devient  $\lambda N(a)\|x\|$  où  $(\lambda, x)$  est un couple (valeur et vecteur) propre pour  $-L_a^2$ . Les mesures propres quantifient le défaut d'alternativité de  $a$  relativement à  $x$  vecteur propre de  $-L_a^2 : [a, a, x] = (\lambda - 1)N(a)x$  est non nul pour  $\lambda \neq 1$ , c'est à dire lorsque la mesure propre de  $a$  diffère de la norme euclidienne  $\|a\|$ . On montre que la dimension du sous espace propre associé à  $\lambda$  est un multiple de 4 [10].

Lorsque  $k \geq 4$ , les deux valeurs  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 0$  sont particulièrement intéressantes, pour lesquelles la mesure propre associée est soit la norme euclidienne  $\|a\|$ , géométriquement observable, soit 0.

Quelles sont les conséquences pour le calcul?

1) Considérons  $c = \alpha + \beta\tilde{1} + a$  dans  $A_k$ . La SVD de  $L_c$  peut être déduite de celle de  $L_a$  par un calcul d'algèbre linéaire classique [10]. Lorsque  $\beta \neq 0$ , les résultats concernant la valeur singulière  $\|c\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \|a\|^2}$  ne sont que partiellement corrects (la multiplicité 4 est prédite, alors que la valeur  $4p$  avec  $p \geq 2$  est possible).

Pire encore, lorsque  $a$  est alternatif et que  $\alpha^2 + N(a) = \beta^2$ , les valeurs 0 et  $2|\beta| = \sqrt{2}\|c\|$  sont prédites comme valeurs singulières de  $L_c$ , avec la multiplicité  $2^{k-1} - 2$ . La valeur exacte est  $\|c\|$  car  $c$  est alternatif. Donc le vecteur alternatif  $c$  est vu comme un diviseur de 0 par le calcul linéaire de SVD! Pour les vecteurs  $x$  d'un sous-espace de dimension  $2^{k-1} - 2 \geq 2$  dans  $A_k$ ,  $k \geq 3$ , on est face au paradoxe logique :

$$0 = \|c \times x\| = \|c\|\|x\| \neq 0.$$

Le calcul linéaire de SVD peut conduire à une absurdité dans une algèbre **non associative**.

En conséquence, le calcul de la SVD de  $L_c$  à partir de celle de  $L_a$  est à précision limitée lorsque  $\beta \neq 0$  : la fiabilité n'est que *partielle*.

Cette propriété des algèbres de Dickson, qui émerge dès  $k = 3$ , reflète le fait qu'elles sont non associatives ( $k \geq 3$ ) et sans division ( $k \geq 4$ ). Elles expriment (localement) une *très forte non linéarité*. Assez forte pour rendre le calcul algébrique linéaire "inexact". Ce fait remarquable ne semble pas connu. Nous reviendrons sur cette question au § 5.5.

2) Si  $a$  admet une mesure propre nulle, il est nécessairement doublement pur :  $a \in \mathcal{D}_k$ . Et  $L_a x = a \times x = 0$  pour tout  $x$  dans  $\text{Ker } L_a = \text{Zer}(a)$ .

Il a été montré [2;10, Proposition 11.4] que la dimension de  $\text{Zer}(a)$  peut être un multiple arbitraire de 4 qui ne dépasse pas  $2^k - 4(k - 1) = z_{max}(k)$ , pour  $k \geq 3$ .

La valeur  $z_{max}$  est toujours réalisable par certains  $a^* \in \mathcal{D}_k$ ,  $k \geq 4$ . Pour un tel  $a^*$ , le rang  $\text{rg}(L_{a^*}) = \text{rg}(R_{a^*}) = \dim \text{Im } L_{a^*}$ , est minimum. Il correspond à la fonction linéaire :  $r_{min} : k \geq 2 \mapsto 4(k - 1) \geq 4$ .

Les 6 premières valeurs de  $r_{min}$  et  $z_{max}$  sont données dans le tableau suivant :

$k$	2	3	4	5	6	7
$r_{min}$	4	8	12	16	20	24
$z_{max}$	0	0	4	16	44	104

A partir de  $k = 6$ ,  $z_{max}(\sim 2^k)$  domine  $r_{min}(\sim 4k)$ .

Considérons le complémentaire orthogonal de  $\text{Zer}(a)$  dans  $A_k$ . C'est l'ensemble  $\text{Im } L_a = \{y = a \times x, x \in A_k\}$  des **produits**  $a \times x$  et l'on a la décomposition  $A_k = \text{Zer}(a) \oplus \text{Im } L_a$ . Cet aspect sera développé au § 5.5.

### 3.3 Représentation à complexité variable des algèbres de Dickson non commutatives

La complexité de la structure de  $A_k$  pour  $k \geq 2$  peut être décrite à l'aide de sous algèbres comme suit.

Soit  $e_i$ ,  $i = 0$  à  $2^k - 1$  la base canonique de  $A_k$ , alors  $A_k$  est engendrée par les  $k$  générateurs  $g_0, \dots, g_{k-1}$  avec  $g_i = e_{2^i}$ ,  $i = 0$  à  $k - 1$ ,

On se fixe  $m$ ,  $1 \leq m \leq k - 1$ , et on définit les deux sous-algèbres suivantes  $A_k$  :

- $A_m$ , engendrée par les  $m$  premiers générateurs  $g_0, \dots, g_{m-1}$  : sa base est  $e_i$ ,  $i = 0$  à  $2^m - 1$ ,
- $B(m, k)$ , engendrée par les  $k - m$  derniers générateurs  $g_m, \dots, g_{k-1}$ .  $B(m, k)$  est isomorphe à  $A_{k-m}$ , sa base est  $e_{j2^m}$ ,  $j = 0$  à  $2^{k-m} - 1$ .

Soit  $m' > m$ , alors  $B(m', k) \subset B(m, k)$  et  $A_{m'} \supset A_m$  au sens algébrique.

**Proposition 3.1** Pour  $1 \leq m \leq k - 1$  et  $k \geq 2$ ,  $A_k$  admet la représentation

$$\begin{aligned}
 (\star) \quad A_k &= \bigoplus_j A_m \times e_{j2^m}, \quad \text{où } j = 0 \text{ à } 2^{k-m} - 1 \\
 &= A_m \bigoplus_{j \geq 1} (-e_{j2^m}) \times A_m.
 \end{aligned}$$

*Preuve.* Soit  $k \geq 2$ . Pour  $1 \leq m \leq k - 1$ , et  $0 \leq i \leq 2^k - 1$ , on pose  $i = 2^m j + l$  avec  $0 \leq l \leq 2^m - 1$ ,  $0 \leq j \leq 2^{k-m} - 1 : i \equiv l \pmod{2^m}$ .

Une analyse de la table de multiplication dans  $A_k$  [12,20] montre que  $e_i = e_l \times e_{2^m j}$  d'une manière unique, où  $e_l$  (resp.  $e_{2^m j}$ ) décrit la base canonique de  $A_m$  (resp.  $B(m, k)$ ) lorsque  $i$  parcourt  $\{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ . Il suffit de remarquer que pour  $i \geq 1$  le vecteur  $e_i$  (resp.  $-e_i$ ) se trouve en position  $(l, j2^m)$  (resp.  $(j2^m, l)$ ) dans la table de multiplication  $2^k \times 2^k$  dont les indices varient de 0 à  $2^k - 1$  (voir la Remarque 3.1 ci-dessous).

$$\begin{aligned} \text{Alors } x &= \sum \xi_i e_i, \quad \xi_i \in \mathbb{R} \\ &= \sum_{j,l} \xi_{2^m j + l} e_l \times e_{2^m j} \\ &= \sum_j \left( \sum_l \xi_{2^m j + l} e_l \right) \times e_{2^m j} \\ &= \sum_j y_j(x) \times e_{2^m j} \quad \text{où } y_j(x) = \sum_l \xi_{2^m j + l} e_l \in A_m \end{aligned}$$

Cette décomposition de  $x$  dans la base de  $B(m, k)$  avec les coefficients "hyper-complexes"  $y_j(x) \in A_m$  est unique.

La deuxième forme de représentation  $(\star)$  provient de l'anticommutativité  $e_l \times e_{j2^m} = -e_{j2^m} \times e_l$  valable pour  $l \geq 1$  et  $j \geq 0$  ou  $l \geq 0$  et  $j \geq 1$ , ainsi que de la commutativité triviale  $1 \times e_{j2^m} = e_{j2^m} \times 1$ .  $\square$

La représentation  $(\star)$  est due à Eakin-Sathaye [17]. Elle généralise pour  $1 \leq m < k - 1$  la représentation complexe de Dickson ( $m = k - 1$ ) :

$$A_k = A_{k-1} \times 1 \oplus A_{k-1} \times \tilde{1}, \quad \text{avec } \tilde{1} = e_{2^{k-1}} = g_{k-1}.$$

**Définition 3.1** La représentation  $(\star)$  pour  $A_k$ , définie pour  $0 \leq m \leq k$ , est notée

$$A_k = A_m \star B(m, k) = \overline{B}(m, k) \star A_m$$

où  $B(m, k)$  (resp.  $\overline{B}(m, k)$ ) est la sous-algèbre (resp. conjuguée) de base  $\{1, e_{j2^m}\}$  (resp.  $\{1, -e_{j2^m}\}$ ) pour  $1 \leq j \leq 2^{k-m} - 1$ .

Les valeurs extrêmes  $m = 0$  et  $m = k$  correspondent à :

- $m = 0$ ,  $A_0 = \mathbb{R}$  et  $B(0, k) = A_k$  soit  $A_k = 1 \times A_k = \mathbb{R} \star A_k$ ,
- $m = k$ ,  $B(k, k) = \mathbb{R}$  donc  $A_k = A_k \times 1 = A_k \star \mathbb{R}$ .

Lorsque  $k - m$  croit de 0 à  $k$ , la description de  $A_k$  se complexifie selon  $B(m, k) \cong A_{k-m}$ , en partant de la structure simple  $B(k, k) = \mathbb{R}$  ( $k = m$ ) pour atteindre  $B(0, k) = A_k$ , la structure de complexité maximale ( $m = 0$ ). Dans le même temps,  $m$  décroît de  $k$  à 0, donc l'algèbre  $A_m$  des coefficients de la représentation  $(\star)$  est de complexité décroissante (de  $A_k$  à  $\mathbb{R}$ ).

**Remarque 3.1** L'écriture  $(\star)$  repose sur la forme *canonique* de la table de multiplication dans  $A_k$ , obtenue par la récurrence de Dickson [12]. Des écritures différentes (mais équivalentes par isomorphisme) sont possibles (Zorn,1933). Par exemple, la table de multiplication (Table 1) pour  $\mathbb{G}$  donnée par J. Baez, [1, p.150] est celle des géomètres Cartan et Schouten (1926), et non pas celle des algébristes Dickson ou Cayley. Citons  $e_1 \times e_2 = e_3$  (Dickson)  $\neq e_4$  (Baez). Voir les § 3.5 et 3.6.

**Remarque 3.2** On ne confondra pas le classique produit cartésien de deux espaces vectoriels  $A, B$  avec le produit  $(\star)$  défini ci-dessus.

1)  $C = A \times B$  représente l'ensemble des couples  $(a, b)$  où  $a \in A, b \in B$ . Sa dimension est  $\dim C = \dim A + \dim B$ .

2) Dans  $(\star)$ , les vecteurs de  $A_k$  sont représentés, de façon endogène, comme éléments de  $B(m, k)$  à composantes dans  $A_m$ . Alors  $\dim A_k = (\dim A_m) \times \dim B(m, k) = 2^m \cdot 2^{k-m} = 2^k$ .

3) On pourra rapprocher cette représentation du produit *tensoriel*  $C_k = A_m \otimes B(m, k)$  qui construit une autre algèbre  $C_k$ , de même dimension  $2^k$  que  $A_k$ , munie d'un produit  $\circ$  défini par :  $(a_1 \otimes b_1) \circ (a_2 \otimes b_2) = (a_1 \circ a_2) \otimes (b_1 \circ b_2)$  (voir [25, p.12]).

Bien que la norme ne soit pas multiplicative en général dans  $A_k, k \geq 4$ , on a  $\|y \times z\| = \|y\| \|z\|$  pour tout  $y \in A_m, z \in B(m, k)$  [17]. C'est une propriété intéressante du point de vue de calcul. Elle amène à se poser la question plus générale suivante, relative à la représentation  $(\star)$  :

Etant donnés  $z_1$  et  $z_2$  dans  $B(m, k)$ , existe-t-il  $z_3 \in B(m, k)$  tel que  
(1)  $(x \times z_1) \times (y \times z_2) = (x \times y) \times z_3$   
quelque soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{I}mA_m$  ?

En d'autres termes, comment la multiplication passe-t-elle de  $\mathcal{I}mA_m$  à  $A_k$  via  $B(m, k)$ ?

Nous distinguons les deux cas  $m \geq 2$  et  $m = 1$  selon que les coefficients dans  $\mathcal{I}mA_m$  peuvent être orthogonaux ou nécessairement colinéaires.

**Proposition 3.2** *Pour  $m = k - 1$  on considère  $A_k = A_{k-1} \star \mathbb{C}_1$ . Etant donnés  $z_1$  et  $z_2$  dans  $\mathbb{C}_1$ , il existe  $z_3$  qui vérifie (1), à la condition que  $\langle x, y \rangle = 0$  lorsque  $k \geq 3$ . Le vecteur  $z_3$  est déterminé, à partir de  $z_1, z_2$ , par*

$$\begin{aligned} z_3 &= \overline{z_1} z_2 = z_2 \overline{z_1} \text{ pour } k = 2 \\ &= \overline{z_1} z_2 \text{ pour } k \geq 3. \end{aligned}$$

*Preuve.* Tout  $z$  de  $\mathbb{C}_{\tilde{1}}$  s'écrit  $z = a + b\tilde{1} = (a, b)$  où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\tilde{1} = g_{k-1}$  est le dernier generateur de  $A_k$ .

Pour  $m = k - 1$ ,  $x$  dans  $A_{k-1}$  s'écrit  $x = (x, 0)$  donc  $\tilde{x} = (0, x)$ . Pour  $x, y \in \mathcal{I}mA_{k-1}$  on vérifie sans peine que  $\tilde{x} \times \tilde{y} = y \times x$ ,  $\tilde{x} \times y = -(x \times y) \times \tilde{1}$  et  $x \times \tilde{y} = (y \times x) \times \tilde{1}$ .

1) Si  $m \geq 2$ , nous supposons que  $\langle x, y \rangle = 0$ , donc  $x$  et  $y$  anticommulent :  $x \times y = -y \times x$ . Alors  $x \times z_1 = x \times (a_1 + b_1\tilde{1}) = a_1x + b_1\tilde{x}$  et  $(x \times z_1) \times (y \times z_2) = (a_1x + b_1\tilde{x}) \times (a_2y + b_2\tilde{y}) = (x \times y) \times [(a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)\tilde{1}] = (x \times y) \times z_3$  avec  $z_3 = \overline{z_1z_2} = \overline{z_1}z_2$  dans  $\mathbb{C}_{\tilde{1}}$ .

2) Si  $m = 1$ ,  $x$  et  $y$  commutent. Dans la formule ci-dessus  $x \times y = y \times x$ , ce qui revient à changer  $b_2$  en  $-b_2$ . Soit  $z_3 = \overline{z_1z_2} = \overline{z_1}z_2 = z_2\overline{z_1}$ . La valeur  $k = 2$  apparaît comme particulière.  $\square$

Nous traitons maintenant le cas plus général  $2 \leq m \leq k - 1$ .

**Proposition 3.3** *Pour  $k \geq 3$  on considère  $(\star)$   $A_k = A_m \star B(m, k)$  pour  $2 \leq m \leq k - 1$ . Etant donnés  $z_1$  et  $z_2$ , il existe  $z_3$  dans  $B(m, k)$  tel que (1) soit vérifié pour tout couple orthogonal  $x, y$  dans  $\mathcal{I}MA_m$ .*

*Preuve.* Elle se fait par récurrence sur  $k \geq 3$ ,  $m$  variant de 2 à  $k - 1$ .

Le cas particulier  $k = 3$  est vérifié pour  $m = 2$  par la Proposition 3.2 (en fait  $m = k - 1 \geq 2$ ).

Nous supposons que la Proposition 3.3 est valable dans  $A_{k-1} = A_m \star B(m, k - 1)$ ,  $2 \leq m \leq k - 2$  : pour tout  $z_1, z_2$  de  $B(m, k - 1)$ , il existe  $z_3$  tel que (1) est valide pour  $x, y \in \mathcal{I}MA_m$ ,  $\langle x, y \rangle = 0$ .

Nous passons à  $A_k = A_m \star B(m, k)$ ,  $2 \leq m \leq k - 1$ , et considérons  $B(m, k) = B(m, k - 1) \star \mathbb{C}_{\tilde{1}}$ .

La propriété est vraie pour  $m = k - 1$  par la Proposition 3.2. Pour  $2 \leq m \leq k - 2$ , nous écrivons  $z = a + b \times \tilde{1} = (a, b)$  où  $a, b \in B(m, k - 1)$ . Puisque  $m \leq k - 2$ ,  $x = (x, 0)$  est tel que  $x \times a = (x, 0) \times (a, 0) = (x \times a, 0)$

$$(x \times (b \times \tilde{1})) = (x, 0) \times (0, b) = (0, b \times x) = -(0, x \times b)$$

car  $x \in \mathcal{I}MA_m$  et  $e_l \times e_{j2^m} = -e_{j2^m} \times e_l$  pour  $l \geq 1$ . On conclue par l'hypothèse de récurrence dans  $B(m, k - 1)$  que  $(x \times z_1) \times (y \times z_2) = (x \times y) \times z_3$  pour  $x, y \in \mathcal{I}MA_m$  et  $x \times y = -y \times x$ . On utilise les relations :

$$\begin{aligned} (0, x \times b_1) \times (y \times a_2, 0) &= (0, (x \times b_1) \times \overline{(y \times a_2)}), \\ (0, x \times b_1) \times (0, y \times b_2) &= (-\overline{(y \times b_2)} \times (x \times b_1), 0), \\ \overline{y \times a} = \overline{a} \times \overline{x} &= -\overline{a} \times x = x \times \overline{a}. \end{aligned}$$

$\square$

**Lemme 3.4** Pour  $m = 1$ ,  $k \geq 2$ , le vecteur  $z_3 = -(e_1 \times z_1) \times (e_1 \times z_2)$  vérifie (1) quelque soient  $x$  et  $y$  dans  $\text{Im}\mathbb{C}_{e_1} = \mathbb{R}e_1$ .

*Preuve.* Soit  $A_k = \mathbb{C}_{e_1} \star B(1, k)$ .  $B(1, k)$  est la sous algèbre de dimension  $2^{k-1}$  de vecteurs de base  $e_{2^i}$ ,  $i = 0$  à  $2^{k-1} - 1$ .

D'autre part  $x = \alpha e_1$  et  $y = \beta e_1$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vérifient  $x \times y = -\alpha\beta$

Soit  $z = \sum_i a_i e_{2^i}$  de composantes *paires*,  $e_1 \times z$  n'a que des composantes *impaires*. D'après la table de multiplication de  $A_k$ , le produit  $(e_1 \times z_1) \times (e_1 \times z_2)$  n'a que des composantes *paires*. Il est clair que

$$\begin{aligned} (x \times z_1) \times (y \times z_2) &= \alpha\beta(e_1 \times z_1) \times (e_1 \times z_2) \\ &= -(x \times y) \times z_3 \end{aligned} \quad \square$$

### 3.4 Réduction algébrique

La sous-algèbre  $B(1, k) = A_{k-1}(e_2)$  est isomorphe à  $A_{k-1}$ . Identifier les deux structures revient à identifier les bases respectives  $\{e_{2^i}\}$  et  $\{e_i\}$ ,  $0 \leq i \leq 2^{k-1} - 1$ .

Nous étudions les conséquences de cette identification sur le calcul de  $z_3$  pour  $m = 1$ ,  $k = 2$  et  $3$ .

Nous comparons les résultats de deux calculs :

1)  $z_3 = -(e_1 \times z_1) \times (e_2 \times z_2)$  par *dédution* à partir de la table de  $\times$  canonique de  $A_k$ ,

2)  $t$  est le résultat du même calcul formel après *réduction* dans  $A_{k-1}$ , par identification de  $A_{k-1}(e_2)$  avec  $A_{k-1}$ .

**Proposition 3.5** Pour  $k = 2$  et  $3$  le calcul déductif fournit  $z_3 = z_2 \times \overline{z_1}$ . Le calcul réductif n'est exact que sous conditions.

*Preuve.*

1) Calcul par déduction.

$B(1, 3) = \mathbb{H}_{e_2}$  admet pour base  $1, e_2, e_4, e_6$ . On utilise la table de multiplication canonique dans  $A_3 = \mathbb{G}$  :

	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	$e_1$	$-1$	$e_3$	$-e_2$	$e_5$	$-e_4$	$-e_7$	$e_6$
$e_3$	$\cdot$	$e_2$	$\cdot$	$-1$	$\cdot$	$-e_6$	$\cdot$	$-e_4$
$e_5$	$\cdot$	$e_4$	$\cdot$	$e_6$	$\cdot$	$-1$	$\cdot$	$e_2$
$e_7$	$\cdot$	$-e_6$	$\cdot$	$e_4$	$\cdot$	$-e_2$	$\cdot$	$-1$

Soit  $z_i = a_i + b_i e_2 + c_i e_4 + d_i e_6$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Alors  $e_1 \times z_i = a_i e_1 + b_i e_3 + c_i e_5 - d_i e_7$

On effectue  $z_3 = -(e_1 \times z_1) \times (e_1 \times z_2)$  pour obtenir

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 = \langle z_1, z_2 \rangle \\ b_3 &= a_1 b_2 - b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2 \\ c_3 &= a_1 c_2 - b_1 d_2 - c_1 a_2 + d_1 b_2 \\ d_3 &= a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 a_2. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que  $z_1 \times (-\overline{z_2}) = -\overline{z_3}$ , soit  $z_3 = \overline{z_1 \times z_2} = z_2 \times \overline{z_1}$  dans  $B(1, 3)$ .

2) Calcul par réduction.

Dans  $\mathbb{H}_{e_2} = \mathbb{C}_{e_2} \star \mathbb{C}_{e_4}$ , on décompose  $z$  en  $z = (a, b)$  où  $a, b \in \mathbb{C}_{e_2}$ . Classiquement le signe  $\times$  est omis dans  $\mathbb{C}$ .

Dans  $\mathbb{G} = \mathbb{H}_{e_1} \star \mathbb{C}_{e_4}$ , on écrit  $e_1 = (e_1, 0)$ . Si nous identifions  $\mathbb{H}_{e_1} = \mathbb{H}$  et  $\mathbb{H}_{e_2}$ , le calcul peut se poursuivre dans  $\mathbb{H}$ . Alors  $e_1 \times z = (e_1 \times a, b \times e_1) = (e_1 \times a, -e_1 \times b)$  par orthogonalité.

$$-t = (e_1 \times a_1, -e_1 \times b_1) \times (e_1 \times a_2, -e_1 \times b_2) = ((e_1 \times a_1) \times (e_1 \times a_2) - \overline{(e_1 \times b_2)} \times (e_1 \times b_1), -(e_1 \times b_2) \times (e_1 \times a_1) - (e_1 \times b_1) \times \overline{(e_1 \times a_2)}).$$

On utilise  $(e_1 \times a) \times (e_1 \times a') = -a' \overline{a} = -\overline{a} a'$  dans  $\mathbb{C}_{e_2}$ , et  $\overline{e_1 \times a} = \overline{a} \times (-e_1) = e_1 \times \overline{a}$ .

$$\text{Il vient } t = (a_2 \overline{a_1} - b_1 b_2, -a_1 \overline{b_2} - \overline{a_2} b_1).$$

En calculant  $z_2 \times \overline{z_1} = (a_2, b_2) \times (\overline{a_1}, -b_1)$ , nous obtenons

$$z_3 = (a_2 \overline{a_1} + \overline{b_1} b_2, -b_1 a_2 + \overline{b_2} a_1) \neq t \text{ en général.}$$

$$\text{Posons } d = z_3 - t = ((b_1 + \overline{b_1}) b_2, -b_1 a_2 + \overline{b_1} a_2 + b_2 a_1 + a_1 \overline{b_2}) = (d_1, d_2).$$

1) Lorsque  $k = 3$ , les termes  $a_i, b_j$  commutent dans  $\mathbb{C}_{e_2}$ .  $d_1 = 2(\Re b_1) b_2 = 0 \iff b_1 = -\overline{b_1}$  ou  $b_2 = 0$ .

$$\text{Si } b_2 = 0, d_2 = \Im(b_1 a_2) = 0 \iff b_1 a_2 \text{ est réel et } z_3 = (a_2 \overline{a_1}, -b_1 a_2).$$

$$\text{Si } b_2 \neq 0 \text{ et } b_1 = -\overline{b_1}, d_2 = 0 \iff a_1 \Re b_2 = \Im(b_1 a_2).$$

Si  $\Re b_2 = 0$  alors  $b_1 a_2$  est réel, sinon  $a_1 = \frac{1}{\Re b_1} \Im(b_1 a_2)$  est imaginaire :  $z_1 = (a_1, b_1)$  a des composantes  $\neq 0$  sur  $e_2$  et  $e_6$ .

2) Lorsque  $k = 2$ , les termes  $a_i, b_j$  sont réels, et  $d = (2b_1 b_2, 2a_1 b_2)$ . Pour  $z_1 \neq 0$ ,  $d = 0 \iff b_2 = 0$ , et  $z_3 = (a_1 a_2, -b_1 a_2)$ .

□

**Exemple 3.1** Les conditions sur  $z_1$  et  $z_2$  sont vérifiées dans les deux cas particuliers suivants :

1)  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_{e_2} \subset \mathbb{H}_{e_2}$ .

Si  $b_1 = b_2 = 0$  alors  $z_3 = t = (a_2 \overline{a_1}, 0)$  quelque soient  $a_1, a_2$  dans  $\mathbb{C}_{e_2}$ .

2)  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_{e_2} \times e_4$ .

Si  $a_1 = a_2 = 0$  alors  $z_3 = (\overline{b_1}b_2, 0) = (-b_1b_2, 0) = t$  ssi  $b_1$  est imaginaire pur,  $b_2$  arbitraire dans  $\mathbb{C}_{e_2}$ .  $\triangle$

### 3.5 Les tables de multiplication dans $A_k$ , $k = 2$ et 3

Il y a unicité de la table pour  $k = 0$  et 1. Qu'en est-il pour  $k = 2$  et 3?

Commençons par rappeler les résultats d'E. Mathieu [23] au sujet d'un problème connexe sur  $\mathbb{Z}$  : déterminer le nombre de représentations différentes d'une somme de  $2^k$  carrés en produit de deux telles sommes, pour  $k = 2$  et 3.

Pour  $k = 2$  (resp.  $k = 3$ ) il y a  $48 = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2}{3 \cdot 4}$  (resp.  $9\,678\,800 = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 8)^2}{3 \cdot 7 \cdot 8} \sim 10^7$ ) représentations.

L' "explosion" combinatoire due au passage de  $k = 2$  à 3 va se retrouver, quoique à un degré bien moindre, dans le cas des tables de multiplication.

Pour  $k = 2$  (resp.  $k = 3$ ) il y a  $\frac{2^3 \cdot 3!}{4 \cdot (3 \cdot 4)} = 1$  (resp.  $\frac{2^7 \cdot 7!}{8 \cdot (3 \cdot 7 \cdot 8)} = 480$ ) formes possibles (voir Coxeter [15]).

Pour  $k = 2$ , la forme unique a été donnée par Hamilton en 1843. Pour  $k = 3$ , deux familles particulières parmi les 480 ont été étudiées, l'une de nature algébrique, l'autre géométrique. Soit  $B = \{e_i, i = 1 \text{ à } 7\}$  la base canonique de  $\mathcal{Im}\mathbb{G}$ .

Il existe 7 façons de choisir les 4 vecteurs distincts  $u, v, w, t$  dans  $B$  de façon à ce que:

1)  $\{u, v, w\}$  soit un triplet *associatif*:  $[u, v, w] = 0$ ,

2) les 3 vecteurs  $u \times t, v \times t$  et  $w \times t$  de  $B$  soient distincts des 4 vecteurs choisis au départ.

Un tel quadruplet  $\{u, v, w; t\}$  est appelé *distingué* :  $H$  de base  $\{1, u, v, w\}$  est une sous-algèbre isomorphe à  $\mathbb{H}$ , et  $t \in H^\perp$  joue le rôle de  $\tilde{1}$ . Soit  $\mathbb{G} = H \oplus H \times t$ .

1) Dans la forme *algébrique*, on exploite la loi de duplication de Dickson pour le calcul de la  $\times$ .

La numérotation canonique est choisie de sorte que le quadruplet  $\{e_1, e_2, e_3; e_4\}$  soit distingué. Ainsi  $\mathbb{G} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \times \tilde{1}$  où  $\tilde{1} = e_4$ .

La table des indices des 7 quadruplets distingués est donnée dans [21] par

$u$	6	1	7	1	6	7	1
$v$	5	7	2	2	2	3	4
$w$	3	6	5	3	4	4	5
$t$	1	2	3	4	5	6	7

Parmi les 7 choix possibles pour  $t$  indiqués ci-dessus, le choix  $t = e_4$  conduit à la table de multiplication *canonique* pour  $\mathbb{G}$  [18, p.273; 16, p.127]. Le quart supérieur gauche du tableau  $8 \times 8$  est la table de multiplication  $4 \times 4$  de  $\mathbb{H}$ .

2) La forme *géométrique* est reliée à la géométrie projective finie à 7 points et 7 droites dans le plan de Fano [1, p.152;15]. La numérotation choisie garantit que les deux implications :

$$\begin{aligned} e_i \times e_j = e_k &\implies e_{i+1} \times e_{j+1} = e_{k+1} \\ &\implies e_{2i} \times e_{2j} = e_{2k} \end{aligned}$$

sont valables modulo 7, soit  $i, j, k \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ . Il suffit alors de spécifier un seul produit pour déduire toute la table.

Les 7 quadruplets distingués sont les suivants :

$u$	1	2	3	4	5	6	7
$v$	2	3	4	5	6	7	1
$w$	4	5	6	7	1	2	3
$t$	3	4	5	6	7	1	2

Chaque colonne se déduit de la précédente par l'addition de 1 mod 7.

Le choix  $t = e_3$  correspond à  $e_1 \times e_2 = e_4$ . Il conduit, dans la base canonique de  $\mathbb{G}$ , à la table de multiplication donnée dans [1, p.150]. Evidemment, la structure octonionique sous-jacente n'apparaît pas ainsi. Néanmoins, puisque  $\mathbb{G} = H' \oplus H' \times e_3$  où  $H'$  a pour base  $\{1, e_1, e_2, e_4\}$ , il suffit d'écrire la table dans la base réordonnée  $\{1, e_1, e_2, e_4, e_3, e_7, e_5, -e_6\}$  pour faire apparaître la structure avec  $\tilde{1} = e_3$ .

**Proposition 3.6** *La structure octonionique est apparente en notation géométrique dans 7 bases. L'une d'elles est  $\{1, e_1, e_2, e_4, e_3, e_7, e_5, -e_6\}$ . Les 6 autres s'en déduisent par addition successive de 1 mod 7 à la liste d'indices  $\{1, 2, 4, 3, 7, 5, 6\}$*

*Preuve.* Clair. □

### 3.6 Calcul par récurrence de la table de multiplication canonique

Soit, pour  $k \geq 0$ ,  $M_k$  le tableau carré  $2^k \times 2^k$  qui contient le vecteur  $e_i \times e_j$  en position  $(i, j)$  lorsque  $i, j$  parcourent  $0, 1, 2, 3, \dots, 2^k - 1$ .  $M_0 = 1$ , et pour  $k \geq 1$ , on partitionne  $M_k$  selon  $(0, 1 \text{ à } 2^k - 1)$ . On écrit

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k^T \\ b_k & N_k - I \end{pmatrix} \text{ où } N_k \text{ est antisymétrique d'ordre } 2^k - 1$$

et où  $b_k = (e_i, i = 1 \text{ à } 2^k - 1)^T$ .

Pour  $k = 1$ ,  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & e_1 \\ e_1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $N_1 = 0$ .

Pour  $k \geq 2$ , on partitionne  $b_k$  en  $(b_{k-1}^T \tilde{1}_k c_k^T)$  où  $\tilde{1}_k = \tilde{1} = e_{2^{k-1}}$  et  $c_k = b_{k-1} \times \tilde{1} = (e_{i+2^{k-1}}, i = 1 \text{ à } 2^{k-1} - 1)^T$ .

Soit  $I = I_{2^{k-1}-1}$  et  $\bigcirc = \bigcirc_{2^{k-1}-1}$ . On considère les matrices antisymétriques définies par :

$$B_k = \left( \begin{array}{c|c|c} \bigcirc & c_k & -\tilde{1} \times I \\ \hline -c_k^T & 0 & b_{k-1}^T \\ \hline \tilde{1} \times I & -b_{k-1} & \bigcirc \end{array} \right) \text{ et } C_k = N_k - B_k.$$

Pour  $k = 2$ ,  $N_2 = B_2 = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & e_3 & -e_2 \\ \hline -e_3 & 0 & e_1 \\ \hline e_2 & -e_1 & 0 \end{array} \right)$  et  $C_2 = 0$ .

En supprimant dans  $C_k$ ,  $\neq 0$  lorsque  $k \geq 3$ , la ligne et la colonne de rang  $2^{k-1}$ , chacune nulle, on obtient  $C'_k$ , d'ordre pair  $2^k - 2$ , que l'on partitionne en 4 blocs d'ordre  $2^{k-1} - 1$

$$C'_k = \begin{pmatrix} D_k & E_k \\ F_k & G_k \end{pmatrix}$$

**Lemme 3.7** Pour  $k \geq 2$ , et  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq 2^{k-1} - 1$  on obtient

- i)  $e_i \times e_{j+2^{k-1}} = -(e_i \times e_j) \times \tilde{1}$  et
- ii)  $e_{i+2^{k-1}} \times e_{j+2^{k-1}} = -e_i \times e_j$ .

*Preuve.*

i) On sait que  $e_{j+2^{k-1}} = e_j \times \tilde{1}$  pour  $1 \leq j \leq 2^{k-1} - 1$ . Il suffit de montrer que  $(e_i \times e_j) \times \tilde{1} = -e_i \times (e_j \times \tilde{1})$ , c'est-à-dire que le triplet  $(e_i, e_j, \tilde{1})$  est antiassociatif. Cela découle directement de  $(e_i, 0) \times (0, e_j) = -(0, e_i \times e_j)$ .

ii)  $e_{i+2^{k-1}} \times e_{j+2^{k-1}} = (e_i \times \tilde{1}) \times (e_j \times \tilde{1})$ . Utilisant  $e_i \times \tilde{1} = \tilde{e}_i = (0, e_i)$ , on calcule  $\tilde{e}_i \times \tilde{e}_j = (0, e_i) \times (0, e_j) = (-\overline{e_j} \times e_i, 0) = (e_j \times e_i, 0) = -e_i \times e_j$ .  $\square$

**Corollaire 3.8** Pour  $k \geq 3$ ,  $C'_k = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{1} \\ \tilde{1} & -1 \end{pmatrix} \otimes N_{k-1}$ .

*Preuve.*  $D_k = N_{k-1}$  est clair. Et d'après le lemme 3.7,  $E_k = F_k = \tilde{1} \times N_{k-1}$ ,  $G_k = -N_{k-1}$ . La multiplication par  $\tilde{1}$  est effectuée sur chaque terme de  $N_{k-1}$ .

On déduit que

$$C'_k = \begin{pmatrix} N_{k-1} & \tilde{1} \times N_{k-1} \\ \tilde{1} \times N_{k-1} & -N_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{1} \\ \tilde{1} & -1 \end{pmatrix} \otimes N_{k-1},$$

où  $\otimes$  dénote le produit de Kronecker (tensoriel) de 2 matrices. On note que la matrice symétrique  $2 \times 2$  égale à  $\begin{pmatrix} 1 & \tilde{1} \\ \tilde{1} & -1 \end{pmatrix}$  est la table de  $\mathbb{C}_{\tilde{1}}$ .  $\square$

**Théorème 3.9** Avec les notations ci-dessus, le tableau  $M_k$  se calcule pour  $k \geq 3$  par la récurrence

$$\begin{cases} c_k = b_{k-1} \times e_{2^{k-1}} \\ E_k = e_{2^{k-1}} \times N_{k-1} \end{cases}$$

définie à partir de  $c_3 = b_2 \times e_4$  et  $E_3 = e_4 \times N_2$ .  $N_2 - I$  est la sous-matrice  $3 \times 3$  extraite du tableau  $M_2$  relatif aux quaternions dans la base  $b_2^T = (1, e_1, e_2, e_3)$ .

*Preuve.* Découle du Corollaire 3.8  $\square$

La table de  $\times$  canonique est entièrement déterminée à partir de celle des quaternions.

La Proposition 3.5 se prolonge alors pour  $k \geq 4$  ainsi.

**Proposition 3.10** Si  $k \geq 2$  et  $m = 1$ ,  $z_3 = z_2 \times \overline{z_1}$  vérifie (1) dans  $B(1, k)$ .

**Proposition 3.11** Si  $k \geq 4$  et  $m = 1$ , les conditions qui doivent lier  $z_1$  et  $z_2$  pour que le calcul réductif donne  $z_3$  sont de la forme :

i) Si  $b_2 = 0$ ,  $b_1 \times a_2$  est réel,

ii) Si  $b_2 \neq 0$ ,  $b_1$  est imaginaire pur et  $2\mathcal{I}m(b_1 \times a_2) = b_2 \times a_1 + a_1 \times \overline{b_2}$ .

*Preuve.* On a identifié  $A_{k-1}(e_2)$  et  $A_{k-1}$ .  $d = z_3 - t = (d_1, d_2)$   
 $= (2(\mathcal{R}e b_1)b_2, -2\mathcal{I}m(b_1 \times a_2) + b_2 \times a_1 + a_1 \overline{b_2})$ .

$d_1 = 0 \iff \mathcal{R}e b_1 = 0$  ou  $b_2 = 0$

- i) Si  $b_2 = 0$ ,  $d = 0 \iff \mathcal{I}m(b_1 \times a_2) = 0 \iff b_1 \times a_2$  réel.
- ii) Si  $b_2 \neq 0$ , c'est évident.

□

**Exemple 3.2** Si  $a_1$  et  $b_2$  sont orthogonaux dans  $\mathcal{I}m A_{k-2}$ , ils anticommulent et la condition ii) devient  $b_2 \times a_1 = \mathcal{I}m(b_1 \times a_2)$ , avec  $b_1 = -\overline{b_1}$ . Pour  $k = 4$  et  $5$ ,  $A_{k-2}$  est une algèbre à division donc  $a_1 = \frac{1}{N(b_2)} \overline{b_2} \times \mathcal{I}m(b_1 \times a_2)$ .  $\triangle$

**Exemple 3.3** Nous reprenons l'exemple 3.1 pour  $k \geq 4$ .

1) Si  $z_1, z_2 \in A_{k-2} \subset A_{k-1}$ , alors  $z_3 = (a_2 \times \overline{a_1}, 0) = t$ .

2) Si  $z_1, z_2 \in A_{k-2} \times \tilde{1}$ , alors  $z_3 = (\overline{b_1} \times b_2, 0) = t$  ssi  $b_1$  est imaginaire pur dans  $A_{k-2}$ .

$\triangle$

Nous terminons par la remarque suivante. L'application  $(z_1, z_2) \mapsto z_3$  est isométrique dans les deux configurations suivantes :

- $m = 1$  et  $2 \leq k \leq 4$ ,
- $m = k - 1$  et  $k \geq 2$  (Proposition 3.2).

## 4 Dérivations et automorphismes dans $A_k$ , $k \geq 0$

Afin d'étudier d'autres propriétés de la représentation  $(\star)$ , nous allons utiliser dans  $A_k$ ,  $k \geq 0$  les deux outils suivants, constitués d'applications linéaires :

- a) l'algèbre (associative) de Lie  $\mathcal{D}er(A_k)$  des dérivations (linéaires) de  $A_k$  [25].
- b) le groupe des automorphismes (linéaires)  $\text{Aut}(A_k)$  [3,17].

La récursivité de la construction de  $A_k$  par complexification :

$$A_k = A_{k-1} \oplus A_{k-1} \times \tilde{1}$$

confère à  $\mathcal{D}er(A_k)$  et  $\text{Aut}(A_k)$  des propriétés spécifiques, que nous présentons ci-dessous. Les conséquences sur le calcul dans  $A_k$ , sont explicitées au paragraphe 5.

## 4.1 L'algèbre implicite maximale de $A_k$ , $k \geq 0$

Pour  $k = 0, 1$ ,  $\mathcal{D}er(A_k) = \{0\}$ ; pour  $k = 2$ ,  $d \in \mathcal{D}er(\mathbb{H})$  peut s'écrire à l'aide de  $a \in \mathbb{H} : x \mapsto d(x) = [a, x] = a \times x - x \times a$ . Pour  $k = 3$ , toute dérivation  $d \in \mathcal{D}er(\mathbb{G})$  peut s'écrire à partir de  $a, b \in \mathbb{G} : x \mapsto d(x) = [[a, b], x] - 3[a, b, x]$ , où  $[-, -]$  (resp.  $[-, -, -]$ ) désigne le commutateur (resp. l'associateur).

Soit maintenant  $k \geq 4$ . Toute dérivation  $D \in \mathcal{D}er(A_k)$  s'écrit  $D(x_1 + x_2\tilde{1}) = d(x_1) + d(x_2) \times \tilde{1}$  où  $d \in \mathcal{D}er(A_{k-1})$ , d'après Schafer [24]. Donc il existe une dérivation  $d \in \mathcal{D}er(\mathbb{G})$  telle que  $D(x) = \sum_i d(x_i) \times e_{8i}$ , où  $x_i \in \mathbb{G}$ , et  $\{e_{8i}\}$  est la base canonique de  $B(3, k)$ ,  $i = 0$  à  $2^{k-3} - 1$ . En conséquence,  $\mathcal{D}er(A_k) = \mathcal{D}er(\mathbb{G}) \star B(3, k)$  et  $\mathcal{D}er(A_k) \cong \mathcal{D}er(\mathbb{G})$  pour  $k \geq 4$ . [20]

On considère l'ensemble  $J(A_k) = \bigcap_{D \in \mathcal{D}er(A_k)} \text{Ker} D$ . Cet ensemble contient par définition les vecteurs de  $A_k$  dont l'image par toute dérivation est 0.

**Proposition 4.1** *L'ensemble  $J(A_k)$  est caractérisé par*

$$J(A_k) = \begin{cases} \bullet A_k & \text{pour } k = 0, 1 \\ \bullet \mathbb{R} & \text{pour } k = 2, 3 \\ \bullet B(3, k) & \text{pour } k \geq 4 \end{cases}$$

*Preuve.* [17, Corollary 1.9]. Le résultat pour  $k = 0, 1, 2$  découle directement de  $\mathcal{D}er(A_k)$ .

Pour  $k = 3$ , on considère  $x = e_i \neq y = e_j$ , pour  $e_i, e_j$  vecteurs imaginaires de la base canonique de  $\text{Im}\mathbb{G}$ ,  $i \neq j$ .  $D = [L_{x \times y}, L_y] + [R_{x \times y}, R_y] + [L_{x \times y}, R_y]$  est une dérivation de  $\mathcal{D}er(\mathbb{G})$  telle que  $\text{Im} D = \{e_j, j \notin \{i, 0\}\}$  et  $\text{Ker} D = \{1, x\}$ . Donc  $J(\mathbb{G}) = \mathbb{R}$ .

Pour  $k \geq 4$ ,  $B(3, k) \subset J(A_k)$  d'après ce qui précède. Soit  $x \in A_k$  : il est représenté de manière unique par :

$$x = \sum_i \alpha_i(x) \times e_{8i}, \quad \alpha_i(x) \in \mathbb{G}, \quad i \in \{0, 1, \dots, 2^{k-3} - 1\}$$

Soit  $x \notin B(3, k)$ , il existe  $i$  tel que  $\alpha_i(x) \notin \mathbb{R}$ . Donc il existe une dérivation  $d \in \mathcal{D}er(\mathbb{G})$  telle que  $d(\alpha_i(x)) \neq 0$ . Elle s'étend en une dérivation  $D \in \mathcal{D}er(A_k)$  telle que  $D(x) \neq 0$ . Donc  $J(A_k) \subset B(3, k)$ .  $\square$

**Définition 4.1** *Tout vecteur  $x \in A_k$  est dit implicite par dérivation ssi  $x \in \text{Ker} D$ , soit  $Dx = 0$ , quelque soit la dérivation  $D \in \mathcal{D}er(A_k)$ . Dans le cas contraire,  $x$  est explicite par dérivation.*

*La sous-algèbre  $J(A_k)$  est l'algèbre implicite maximale de  $A_k$ .*

Pour  $k \leq 3$ , l'algèbre implicite maximale est  $\mathbb{R}$  ( $k = 0, 2, 3$ ) ou  $\mathbb{C}$  ( $k = 1$ ). Pour  $k \geq 4$ , elle devient  $B(3, k) \cong A_{k-3}$ , de dimension  $2^{k-3} \geq 2$ .

On voit ainsi apparaître une différence fondamentale entre les algèbres *avec* ( $k \leq 3$ ) et *sans* division ( $k \geq 4$ ).  $\mathbb{H}$  et  $\mathbb{G}$ , de dimension respective 4 et 8, n'admettent que  $\mathbb{R}$  de dimension 1 comme algèbre implicite maximale. Il y a une *chute* de la dimension, de 2 à 1, lorsque  $k$  augmente de 1 à 2 ou 3.  $\mathbb{R}$  ne contient aucune sous algèbre continue.

En comparaison, les algèbres sans division sont telles que la dimension  $2^{k-3}$  de l'algèbre implicite maximale  $B(3, k)$  *augmente* avec  $k \geq 4$ . Il s'ensuit que pour  $k \geq 4$ , dans la représentation  $(\star)$ , les coefficients dans  $\mathbb{H}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$  correspondent à une structure algébrique  $B(m, k) \cong A_{k-m}$ ,  $m = 2, 1, 0$ , qui est *explicite* par dérivation.

Des coefficients dans  $\mathbb{G}$  correspondent à la **frontière** entre explicite ( $m \leq 2$ ) et implicite, ( $3 \leq m \leq k$ ).

## 4.2 Invariance par le groupe $\text{Aut}(A_k)$ , $k \geq 0$

Les automorphismes de  $\mathbb{R}$ -algèbre de  $A_k$  sont des applications linéaires  $\sigma$  inversibles sur  $A_k$  telles que  $\sigma(x) \times \sigma(y) = \sigma(x \times y)$ . Ils forment un groupe noté  $\text{Aut}(A_k)$ . Il est bien connu que  $\text{Aut}(\mathbb{R}) \cong \{1\}$ ,  $\text{Aut}(\mathbb{C}) \cong \{\pm 1\}$ ,  $\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong SO(3)$ , et  $\text{Aut}(\mathbb{G}) \cong G_2$ , le plus petit groupe de Lie exceptionnel (Cartan 1914).

Pour  $k \geq 4$ ,  $\text{Aut}(A_k) \cong \text{Aut}(A_{k-1}) \times S_3$  d'après Brown [3] et Eakin-Sathaye [17], où  $S_3$  est le groupe symétrique (d'ordre 6) des permutations de 3 éléments.

Lorsque  $k \leq 3$ , seule l'unité réelle 1 est invariante par  $\sigma \in \text{Aut}(A_k) : \sigma(1) = 1$ . Pour  $k \geq 4$ ,  $\sigma(\tilde{1}) = \pm \tilde{1}$  et le plan complexe  $\mathbb{C}_{\tilde{1}} = \text{lin}(1, \tilde{1}) = B(k-1, k)$  est (globalement) invariant par  $\sigma : \sigma(\alpha + \beta\tilde{1}) = \alpha \pm \beta\tilde{1}$ .

**Proposition 4.2** *Pour  $k \geq 4$ ,  $3 \leq m \leq k-1$ ,  $B(m, k)$  est invariant par  $\sigma \in \text{Aut}(A_k)$ .*

*Preuve.* [17, Lemma 2.1]. Le résultat pour  $m = 3$  dérive immédiatement de la Proposition 4.1. Le cas  $3 < m \leq k-1$  provient de l'inclusion  $B(m, k) \subset B(3, k)$ . On note que  $B(k-1, k) = \mathbb{C}_{\tilde{1}} \cong \mathbb{C}$ .  $\square$

Rappelons que  $g_{k-1} = \tilde{1}$  est l'unité complexe. Soit  $q = g_{k-2} = (\tilde{1}, 0) = (01, 00)$  (resp.  $g = g_{k-3} = (q, 0) = (0100, 0000)$ ) l'unité quaternionique (resp. octonionique) dans  $A_k$ ,  $k \geq 4$ .

**Corollaire 4.3** *La sous-algèbre  $\mathbb{H}_q$  (resp.  $\mathbb{G}_g$ ) de  $A_k$  est invariante par  $\sigma \in \text{Aut}(A_k)$  pour  $k \geq 5$  (resp.  $k \geq 6$ ).*

*Preuve.* L'algèbre  $\mathbb{H}_q = B(k-2, k)$  est invariante pour  $k-2 \geq 3$ , soit  $k \geq 5$ . Clair pour  $\mathbb{G}_g$ ,  $k \geq 6$ . De manière générale, la sous-algèbre  $B(k-m, k)$  est invariante par  $\text{Aut}(A_k)$  pour  $k \geq m+3$ . On peut écrire  $B(k-m, k) = A_m(g_{k-m})$  où  $h_0 = g_{k-m}$  représente le 1<sup>er</sup> des  $m$  générateurs  $h_i = g_{k-m+i}$ ,  $i = 0, \dots, m-1$  :  $B(k-m, k)$  est ainsi isomorphe à  $A_m$ .  $\square$

**Définition 4.2** *Une sous-algèbre de  $A_k$  invariante par automorphisme  $\text{Aut}(A_k)$  est caractéristique de  $A_k$ .*

*Une représentation  $(\star)$  dans laquelle la structure  $B(m, k)$  est caractéristique, est elle-même caractéristique. Elle est fortuite sinon.*

**Théorème 4.4** *Soit  $k \geq 4$ . Parmi les  $k+1$  représentations :*

$$(\star) \quad A_k = A_m \star A_{k-m}(g_m), \quad 0 \leq m \leq k,$$

*seules les  $k-2$  représentations correspondant à  $3 \leq m \leq k$  sont caractéristiques.*

*Preuve.* Il suffit de faire  $m = 0, \dots, k$  dans  $(\star)$  et d'utiliser  $B(m, k) \subset B(3, k)$  pour  $m > 3$ . Pour  $k = 4$ , il existe *une seule* représentation caractéristique, soit  $A_4 = \mathbb{G} \star \mathbb{C}_1$ .  $\square$

La différence entre les algèbres avec et sans division rencontrée au paragraphe 4.1 avec le point de vue de la dérivation, se confirme avec le nouveau point de vue des automorphismes.

La seule sous-algèbre caractéristique dans  $A_k$ ,  $1 \neq k \leq 3$ , est le corp des nombres réels ( $m = 0$ ). Par contre, pour  $k \geq 4$ , les sous-algèbres  $B(m, k)$  sont caractéristiques pour  $3 \leq m \leq k$ .

On voit que la représentation  $(\star)$  de  $A_k$  n'est pas caractéristique pour  $m \leq 2$  lorsque  $k \geq 4$ . Toute représentation caractéristique de  $A_k$  doit utiliser des composantes pour les vecteurs de  $A_k$  qui appartiennent au moins à l'algèbre des octonions (ou à des sur-algèbres  $A_m \supset \mathbb{G}$ ). Si l'on veut pouvoir *diviser*, il ne reste que le choix des octonions pour représenter les composantes. Ce choix correspond à la représentation caractéristique la plus détaillée possible ( $m = 3$  est minimum), soit  $A_k = \mathbb{G} \star A_{k-3}(g_3)$ , où la structure algébrique  $A_{k-3}$  admet les vecteurs de base  $e_{8i}$ ,  $i = 0$  à  $2^{k-3} - 1$ .

Il n'est pas possible d'avoir *à la fois* une représentation caractéristique de  $A_k$ ,  $k \geq 4$  et des coefficients dans l'un des 3 corps  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ .

C'est une conséquence inattendue de la **non linéarité** qui s'exprime dans les algèbres de Dickson sans division.

### 4.3 Représentation fondamentale/signifiante de $A_k$

L'algèbre  $A_k$  admet  $k + 1$  représentations  $(\star)$  distinctes, correspondant à  $0 \leq m \leq k$ . Pour  $m = k$  (resp.  $m = 0$ )  $B(k, k) = \mathbb{R}$  (resp.  $B(0, k) = A_k$ ) est implicite et caractéristique quelque soit  $k \geq 0$  (resp. pour  $k = 1$ ). Pour  $k \geq 2$ , les deux représentations extrêmes,  $A_k \star \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R} \star A_k$  ne sont donc pas équivalentes.

**Définition 4.3** Soit  $0 \leq m \leq k$ . La représentation  $(\star)$  de  $A_k$  est fondamentale ssi  $B(m, k)$  est implicite et caractéristique. Elle est signifiante sinon.

Ainsi les sous algèbres  $\mathbb{C}_1$  (resp.  $\mathbb{H}_q, \mathbb{G}_q$ ) sont fondamentales dans  $A_k$  pour  $k \geq 4$  (resp. 5, 6). L'étude précédente peut être résumée par le

**Théorème 4.5** 1) Pour  $k = 0$ , l'unique représentation  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \star \mathbb{R}$  est fondamentale. Pour  $k = 1$ , les deux représentations de  $\mathbb{C}$  sont fondamentales.

2) Pour  $k = 2$ , ou 3, il y a une seule représentation fondamentale (resp.  $k$  représentations signifiantes) correspondant à  $m = k$  (resp.  $0 \leq m \leq k - 1$ ).

3) Pour  $k \geq 4$ , il y a  $k - 2$  (resp. 3) représentations fondamentales (resp. signifiantes) correspondant à  $3 \leq m \leq k$ , (resp.  $0 \leq m \leq 2$ ).

Etant donné le cadre algébrique  $A_k$ , le caractère signifiant ou fondamental de la représentation  $(\star)$  correspondant à  $m$ ,  $0 \leq m \leq k$ , est résumé dans le tableau ci-dessous :

$k$	Signifiant	Fondamental
0, 1		$0 \leq m \leq k \leq 1$
2	$m = 0$ ou 1	$m = 2$
$\geq 3$	$0 \leq m \leq 2$	$3 \leq m \leq k$

On remarquera que pour une évolution dans  $\mathbb{H}$  il y a *deux* niveaux de sens seulement, correspondant à des coefficients réels ou complexes. En général, une évolution dans  $A_k, k \geq 3$ , possède *trois* niveaux de sens, avec des coefficients dans les 3 corps  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ .

Le résultat du Théorème 4.5 pour  $k = 1$  donne le choix entre deux façons équivalentes de calculer dans  $\mathbb{C}$  : soit par calcul à 1 variable complexe selon  $\mathbb{C} =$

$\mathbb{C} \star \mathbb{R}$ , soit par calcul à 2 variables réelles liées par la possibilité d'une multiplication complexe, selon  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \star \mathbb{C}$ .

Ce calcul permet de faire émerger des concepts *spécifiques* à  $\mathbb{C}$ , tels que la notion de fonction holomorphe, ou l'intégrale de Cauchy. Ces notions n'apparaissent pas en analyse à 2 variables réelles indépendantes. L'existence d'une multiplication rend la structure complexe de  $\mathbb{C}$  *plus riche* que celle, linéaire, de  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . C'est une manifestation, dès la dimension 2, du rôle *créatif* de la multiplication.

## 5 Calcul dans les algèbres de Dickson

Nous supposons d'abord que le calcul est effectué dans l'une des algèbres à division  $A_k$ ,  $k \leq 3$ . Nous avons vu que les ensembles  $\mathcal{D}er(A_k)$  et  $\text{Aut}(A_k)$  jouissent de propriétés très particulières.

### 5.1 Calcul dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont deux corps commutatifs n'admettant pas d'autre dérivation que 0. Ces corps sont donc identiques à leur algèbre implicite maximale (Proposition 4.1). Ils sont implicites par dérivation.

Les automorphismes sont réduits à l'identité ( $\text{Aut}(\mathbb{R}) \cong \{1\}$ ,  $k = 0$ ) et à l'identité plus l'involution  $z \rightarrow \bar{z}$  ( $\text{Aut}(\mathbb{C}) \cong \{\pm 1\}$ ,  $k = 1$ ).

### 5.2 Calcul dans $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{G}$

$\mathbb{H}$  est un corps non commutatif (gauche) et  $\mathbb{G}$  est une algèbre à division alternative. Il existe des dérivations non triviales et l'algèbre implicite maximale est réduite à  $\mathbb{R}$ . Les vecteurs dans  $\mathcal{I}m\mathbb{H}$  et  $\mathcal{I}m\mathbb{G}$  sont explicites par dérivation.

Les automorphismes de  $\mathbb{H}$  sont les rotations autour d'un axe dans  $\mathcal{I}m\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ , soit  $SO(3)$ . Les automorphismes de  $\mathbb{G}$  sont les applications linéaires  $\sigma$  qui transforment tout triplet générateur dans  $\mathcal{I}m\mathbb{G}$  (tel le triplet générateur canonique  $g_0 = e_1$ ,  $g_1 = e_2$ ,  $g_2 = e_4 = \tilde{1}$ ) en un autre triplet générateur [20, Theorem 2.3.2]. Ils forment une variété algébrique de dimension 14, dans  $\mathbb{R}^{21}$ .

Voyons maintenant les formes possibles de la représentations  $(\star)$  :

- $k = 2$ ,  $A_2 = \mathbb{H} = \mathbb{C} \star \mathbb{C}_{\tilde{1}}$  s'identifie à  $Cliff(2) \cong \mathbb{C} \star \mathbb{C}$ ,
- $k = 3$ ,  $A_3 = \mathbb{G} = \mathbb{C} \star \mathbb{H}_q = \mathbb{H} \star \mathbb{C}_{\tilde{1}} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \times \tilde{1}$ .

Par comparaison,  $Cliff(3) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ , représente le produit cartésien  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ , où les couples  $(x, y)$   $x, y \in \mathbb{H}$  ne sont pas *liés* par une multiplication. Il n'y a pas d'identification possible avec  $\mathbb{G}$  non associative.

La représentation  $\mathbb{G} = \mathbb{H} \star \mathbb{C}_1$  n'est pas fondamentale. Donc il y a 480 formes de table de  $\times$ , ainsi que nous l'avons vu.

### 5.3 Calcul dans une algèbre sans division

Pour  $k \geq 4$ , la représentation  $(\star)$  est fondamentale pour  $m \geq 3$ , en particulier  $A_k = A_{k-1} \star \mathbb{C}_1$ . A partir de chacune des 480 formes pour la table de  $\mathbb{G}$ , on peut construire de manière propre à  $A_k$  une table pour  $A_k$  par la récurrence du Théorème 3.9. Le nombre de tables possibles est donc constant, de valeur 480, pour  $k \geq 4$ .

$\mathbb{G}$  est la *plus petite* sous-algèbre possible pour exprimer les coefficients dans une représentation  $(\star)$  fondamentale de  $A_k$ . Les coefficients doivent être de dimension  $2^m \geq 8$ . La structure  $B(3, k)$  correspond à la représentation fondamentale (caractéristique et implicite) de  $A_k$  de complexité maximale, grace à des coefficients dans  $\mathbb{G}$ , la *plus grande* des algèbres alternatives à division.

Si l'on utilise des coefficients dans l'un des corps  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ , la complexité de la représentation est plus grande. Elle devient explicite par dérivation et n'est plus invariante par automorphisme. La représentation est signifiante, ou encore phénoménologique. Ces résultats permettent de mieux comprendre pourquoi  $\mathbb{G}$  ne semble pas jouer de rôle explicite dans la Physique Théorique [1]. En effet, seuls les phénomènes, explicites par dérivation ou non caractéristiques (fortuits) sont décrits à l'aide des corps  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  dans une algèbre de Dickson  $A_k$  de grande dimension ( $\geq 16, k \geq 4$ ).

Par contre, l'algèbre alternative  $\mathbb{G}$  permet d'atteindre une description fondamentale de  $A_k$ .

Nous allons montrer aux §5.5 et 5.6 combien la présence de diviseurs de 0 pour  $k \geq 4$  rend le calcul dans  $A_k$  difficile à gérer d'un point de vue logique. Il peut alors être intéressant de mentionner qu'on peut définir, par modification de la règle de multiplication de Dickson, une suite infinie de semi-algèbres de dimension  $2^k$  où la norme euclidienne reste multiplicative, évitant les diviseurs de 0 [26]. Par contre la multiplication n'est plus linéaire continue, ni distributive par rapport à l'addition, rendant impossible tout calcul algébrique de SVD [10,27]. Ces semi-algèbres jouent,

pour la norme euclidienne, le rôle dévolu aux algèbres de Clifford pour l'associativité.

#### 5.4 Monades de calcul alternatif dans $A_k$ , $k \geq 4$

Soit  $a \in \mathcal{D}_k$ ,  $k \geq 4$ . La norme  $N(a)$  de multiplicité  $\geq 4$  admet toujours le sous espace propre  $\mathbb{H}_a = \{1, a, -\tilde{a}, \tilde{1}\}$  isomorphe à  $\mathbb{H}$ . Le calcul interne à  $\mathbb{H}_a$  est associatif.

Supposons qu'il existe  $x \in \mathbb{H}_a^\perp$  tel que  $a$  et  $x$  co-alternent :  $[a, a, x] = [a, x, x] = 0$ . Alors,  $N(a)$  admet le sous espace propre  $G$  engendré par  $\{1, a, x, a \times x, \tilde{1}, \tilde{a}, \tilde{x}, \widetilde{a \times x}\}$ . qui est isomorphe à  $\mathbb{G}$ .  $G$  est le sous espace propre commun à chaque application  $L_g^T L_g$ , associé à  $N(g)$ , où  $g \in G$  est une combinaison *linéaire* arbitraire des 8 vecteurs de base, qui sont issus des deux vecteurs 1 et  $\tilde{1}$  universellement alternatifs, et du couple co-alternatif  $(a, x)$ . La norme arithmétique  $N(g)$  a une multiplicité  $\geq 8$ , ce qui infirme la prévision (multiplicité = 4) du calcul linéaire. Le calcul interne à  $G$  est alternatif.  $G$  peut s'écrire  $\mathbb{H}_a \oplus \mathbb{H}_a \times x = \mathbb{H}_a \star \mathbb{C}_x$ . Cette algèbre octonionique a deux composantes quaternioniques, l'une  $\mathbb{H}_a$  est réelle et l'autre  $\mathbb{H}_a \times x$  est imaginaire, selon la structure complexe induite sur  $\mathbb{H}_a$  par  $\mathbb{C}_x$ .

Nous appellerons *monade* tout sous-espace à  $8D$  de structure octonionique qui est engendré par les 3 générateurs,  $a, x, \tilde{1}$  lorsque  $a$  et  $x$  co-alternent, pour  $a \in \mathcal{D}_k$ , et pour  $x$  vecteur propre de  $-L_a^2$  orthogonal à  $\mathbb{H}_a$  et associé à  $N(a)$ .

#### 5.5 Observation par multiplication et norme euclidienne

Les vecteurs de  $\text{Im } L_a$  sont tous les vecteurs de  $A_k$  qui sont combinaisons linéaires des vecteurs propres de  $-L_a^2$ , pour  $a$  donné dans  $\mathcal{D}_k$ , associés aux mesures *positives* de  $a$ . Parmi les vecteurs de  $A_k$ , les vecteurs *alternatifs* sont particulièrement adaptés à la mesure :  $x$  alternatif vérifie  $[x, x, a] = 0$  quelque soit  $a$  dans  $A_k$ , donc  $L_x^T L_x = N(x)I$  et  $\|a \times x\| = \|a\| \|x\|$ . Une façon d'aborder l'étude de  $\text{Im } L_a$  est d'analyser son complémentaire  $\text{Zer}(a)$ .

Soit  $\varphi = (a, b)$ ,  $a$  et  $b$  dans  $\text{Im } A_k$ . Nous nous proposons d'étudier le sous ensemble de  $\text{Zer}(\varphi)$  dans  $A_{k+1}$  formé de vecteurs  $v = (x, y)$  dont les deux composantes  $x$  et  $y$  sont alternatives dans  $\text{Im } A_k$ , pour  $k = 3$ , et vérifient pour  $k \geq 4$  une relation d'alternativité faible avec  $a$  et  $b$ .

On rappelle que  $\varphi \times v = 0 \Rightarrow \varphi$  et  $v$  sont dans  $\mathcal{D}_{k+1}$ . On suppose  $\varphi$  et  $v$  non nuls, et l'on introduit les notations :

- angulaire (mod  $2\pi$ ):  $0 \neq \psi = \angle(x, y)$ ,  $\theta_x = \angle(a \times x, x \times b)$ ,  $\theta_y = \angle(a \times y, y \times b)$ ,  $\xi = \angle(a \times (x - y), (x + y) \times b)$ .

• métriques dans le cas où les 4 vecteurs  $a, b, x, y$  sont tous  $\neq 0$  :  $\alpha = \frac{\|x\|}{\|y\|}$ ,  $\beta = \frac{\|a\|}{\|b\|}$ .  $q$  dénote la fonction :  $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}) \geq 1$ .

On montre facilement ([10], Lemma 12.1), que si  $v = (x, y)$  est à composantes alternatives dans  $\mathcal{I}mA_k$ ,  $k \geq 3$ , alors  $\varphi \times v = 0$  entraîne la triple égalité :

$$1 - \alpha = 1 - \beta = \langle a, b \rangle = 0$$

ainsi que  $\sin \psi \neq 0$ .

Lorsque  $k = 3$ ,  $\mathbb{G}$  est constitué de vecteurs alternatifs. Alors  $v = (x, y)$  admet un produit nul par  $\varphi = (a, b)$  dans  $\mathcal{D}_4$  ssi la quadruple égalité

$$1 - \alpha = 1 - \beta = \langle a, b \rangle = \langle x, y \rangle = 0$$

est satisfaite. C'est un résultat bien connu [2,7,17,20]. Il exprime que  $\varphi \times v = 0$  vectoriellement, ou de manière équivalente, par la relation de mesure nulle  $\|\varphi \times v\| = 0$  qui lie les angles  $\theta_x, \theta_y$  et  $\xi$ , sachant que  $\langle a, b \rangle = \langle x, y \rangle = 0$ , ainsi que  $\alpha = \beta = 1$ .

L'équivalence  $\varphi \times v = 0 \iff \|\varphi \times v\| = 0$  est spécifique à  $\mathcal{D}_4$  ([10, Lemme 12.2]). Ce résultat fondamental pour le calcul semble nouveau.

Avant de passer au cas général  $k \geq 4$ , voyons la signification géométrique des 4 angles  $\psi, \theta_x, \theta_y$  et  $\xi$ ,  $\sin \psi \neq 0$  et  $\alpha = \beta = 1$ . Pour cela nous considérons le triangle isocèle construit sur  $x, y$  avec  $\alpha = 1$ , et spécifié par  $\psi \neq 0$  ou  $\pi$ , voir Figure 1.

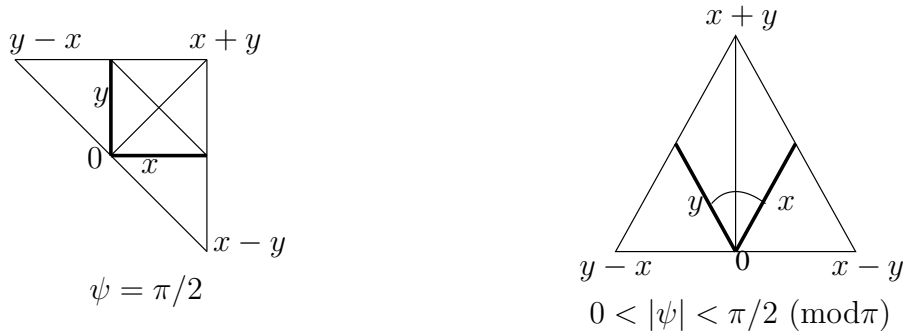


Figure 1: Le triangle  $\{x, y, x + y, x - y, y - x\}$  ( $\psi \neq 0$  ou  $\pi$ )

Les 3 angles  $\theta_x, \theta_y$  et  $\xi$  spécifient la façon dont le triangle est transformé dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{2^k} \cong A_k$  lorsqu'il subit une multiplication à gauche par  $a$  et à droite par  $b$ ,  $a$  et  $b$  tels que  $\beta = 1$ , de la façon suivante :

	$L_a$	$R_b$	angle
$x$	$a \times x$	$x \times b$	$\theta_x$
$y$	$a \times y$	$y \times b$	$\theta_y$
$x - y$	$a \times (x - y)$	—	} $\xi$
$x + y$	—	$(x + y) \times b$	

La relation qui lie les 3 angles  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\xi$  ( $|\psi| = \pi/2$ ) lorsque  $\varphi \times v = 0$  dans  $\mathcal{D}_4$  peut s'écrire :

$$2 \sin \frac{\theta_y - \theta_x}{2} \sin \frac{\theta_y + \theta_x}{2} = \cos \theta_x - \cos \theta_y = 2(1 + \cos \xi)$$

Elle impose que  $\cos \xi \leq 0$ .

Dans le cas général  $k \geq 4$ , nous introduisons une distinction entre le vecteur  $\varphi \times v = 0$  et la mesure  $\|\varphi \times v\| = 0$ . Pourquoi faire cette distinction entre  $\varphi \times v = 0$  et  $\|\varphi \times v\| = 0$  lorsque  $x$  est dans une algèbre **sans** division? Parce que l'équivalence n'est plus acquise de droit dans  $\mathcal{D}_{k+1}$  pour  $k \geq 4$ , puisque la norme n'est plus isométrique. Il peut y avoir **conflit** entre calcul linéaire et non linéaire. Un conflit qui s'exprime sous la forme suivante : la norme euclidienne d'un produit dans  $\mathcal{D}_k$  est une *semi-norme* lorsque  $k \geq 5$  [10].

Nous avons vu au § 3.2 que, par calcul de type SVD, il est possible que l'on obtienne  $\|\varphi \times v\| = 0$ , tandis que par calcul direct,  $\|\varphi \times v\| \neq 0$  (voir [10] pour les détails). Un exemple important va être donné au § 5.6.

Sous l'hypothèse :

(D) Les 4 vecteurs  $a, b, x, y$  dans  $\mathcal{I}m A_k$ ,  $k \geq 4$ , sont non nuls.  
 Les vecteurs  $x$  et  $y$  indépendants ainsi que  $x \pm y$   
 sont  $a-$  et  $b-$  alternatifs.

il est possible de donner une forme trigonométrique simple à  $\|\varphi \times v\|$  [10, Proposition 12.4].

L'expression de  $\|\varphi \times v\|^2$  relie les 8 variables suivantes : les 4 normes positives  $\|a\|, \|b\|, \|x\|, \|y\|$  et les 4 angles  $\psi, \theta_x, \theta_y, \xi$  via leur cosinus (avec  $|\cos \psi| < 1$ ). La relation est *indépendante* de l'angle entre  $a$  et  $b$ .

On rappelle les 4 conditions sur  $\varphi$  et  $v$  à composantes vérifiant (D) qui sont nécessaires pour que  $\varphi \times v = 0$  :  $1 - \alpha = 1 - \beta = \langle a, b \rangle = 0$  et  $\sin \psi \neq 0$ .

Les 3 conditions,  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\sin \psi \neq 0$  complétées par  $\|\varphi \times v\| = 0$ , définissent

dans  $\mathcal{D}_{k+1}$ ,  $k \geq 4$ , la **non observabilité** de  $\varphi$  par  $v$  :  $\|\varphi \times v\| = 0$  mais  $\varphi \times v = 0$  si  $\langle a, b \rangle \neq 0$ . La Proposition 12.5 dans [10] s'énonce sous la forme du

**Théorème 5.1** *Sous l'hypothèse (D),  $\varphi$  est non observable par  $v$  ssi les 4 conditions suivantes sont remplies :*

$$\begin{aligned} \alpha = \beta = 1, \quad \sin \psi &\neq 0 \\ \cos \theta_x - \cos \theta_y &= 2(1 + |\sin \psi| \cos \xi). \end{aligned}$$

Le schéma de droite dans la Figure 1 correspond au cas général  $k \geq 4$  où  $\sin \psi \neq 0$ . La condition d'existence de solutions reste  $\cos \xi \leq 0$ .

## 5.6 Diviseurs de 0 dans $\mathcal{D}_{k+1}$ et complexification de l'arithmétique de $A_k$ , $k \geq 3$

Soit  $a, b \in \mathcal{I}m A_{k-1}$ ,  $k \geq 3$ , vérifiant  $\text{Zer}(a) \cap \text{Zer}(b) = \{0\}$ . On peut montrer que si  $\varphi = (a, b) \in \mathcal{D}_{k+1}$  est un diviseur de 0, alors nécessairement l'arithmétique de  $A_k$  doit être considérée comme *complexe* : grace à la formule du complément de Schur, une certaine matrice calculée à partir de  $a$  et  $b$  admet les valeurs propres  $\pm i$  [10, Lemma 11.1]. La propriété s'applique notamment aux diviseurs de 0 dans  $\mathcal{D}_4$ . Il est remarquable que la présence de diviseurs de 0 dans  $\mathcal{D}_4$  requiert le recours à l'arithmétique complexe dans  $\mathbb{G}$ . Cette nécessaire complexification n'a pas été relevée par les mathématiciens qui ont étudié les octonions par le passé [1]. Seul G. Moreno (2001) s'est approché de la règle générale [2,10,24].

Dans ce qui suit, nous étudions une des conséquences de cette complexification sur un cas particulier.

Soit  $a \in \mathcal{D}_k$ ,  $\|a\| = 1$ , pour  $k \geq 3$ . Pour  $-L_a^2$ , soit  $(\lambda, x)$  un couple de (valeur, vecteur) propre. On dénote  $E_\lambda$  tout sous-espace propre de  $-L_a^2$  associé à  $\lambda$  et orthogonal à  $\mathbb{H}_a$ .  $E_1 = \{0\}$  ssi la multiplicité de 1 est 4. Dans ce cas on écrit  $\lambda = 1^4$ . La notation  $\lambda \neq 1^4$  signifie soit que  $\lambda \neq 1$ , soit que  $\lambda = 1$  de multiplicité  $\geq 8$ .

Soit  $\lambda_{max} \geq 1$  la plus grande des valeurs propres de  $-L_a^2$  :  $\sqrt{\lambda_{max}} = \|L_a\|$ , valeur qui diffère en général de  $\|a\| = 1$ .

Si  $a$  divise 0, la plus petite valeur propre de  $-L_a^2$  est  $\lambda_{min} = 0$ . Sinon  $a$  admet un unique inverse  $a^{-1} = \frac{\bar{a}}{N(a)}$  (ici  $\bar{a} = -a$  et  $N(a) = 1 \Rightarrow a^{-1} = -a$ ). Et

$\frac{\|L_a\|}{\|a\|} = \|a\| \|L_{a^{-1}}\| = \sqrt{\lambda_{max}}$  représente la plus grande valeur singulière normalisée. Lorsque  $k \geq 4$  et lorsque  $a$  n'est pas alternatif,  $\lambda_{max} \geq 1$  et  $L_a^{-1} \neq L_{a^{-1}}$ . Lorsque  $a$  divise 0,  $\lambda_{max} \geq 2$  et  $\lambda_{min} = 0$ .

A tout vecteur propre  $x \neq 0$  de  $-L_a^2$ , on associe le vecteur  $y = (x, x)$  dans  $A_{k+1}$ .  
 Soit,  $\mathcal{D}_{k+1}$ , le vecteur  $\theta_t = (a, t\tilde{1})$  où  $t \in \mathbb{R}^*$  et  $\tilde{1} = \tilde{1}_k$  dans  $A_k$ . L'application  $-L_{\theta_t}^2 = L_{\theta_t}^T L_{\theta_t}$  est symétrique, la forme quadratique associée pour  $z \in A_{k+1}$  est

$$f_t(z) = \langle L_{\theta_t} z, L_{\theta_t} z \rangle = \|\theta_t \times z\|^2.$$

Soit encore  $\mathbb{G}_a = \mathbb{H}_a \oplus \mathbb{H}_a \times \tilde{1}$  et  $F_\lambda = E_\lambda \oplus E_\lambda \times \tilde{1}$  les sous-espaces de dimensions (multiple de) 8 dans  $A_{k+1}$  obtenus par complexification des sous-espaces propres de  $-L_a^2$ . D'après [10], Theorem 11.5, on peut énoncer le

**Théorème 5.2** *L'application  $-L_{\theta_t}^2$  est semi-définie positive quelque soit  $t \in \mathbb{R}^*$ . Elle admet les valeurs propres  $1 + t^2 = N(\theta_t)$  de multiplicité 8, et  $(t \pm \sqrt{\lambda})^2$ , de multiplicité  $\equiv 0 \pmod{4}$  pour  $\lambda \neq 0$ , et  $\equiv 0 \pmod{8}$  si  $\lambda = 0$ . De plus*

$$\begin{aligned} \sqrt{f_t(y)} = \|\theta_t \times y\| &= \|\theta_t\| \|y\| \text{ pour } y \in \mathbb{G}_a, \lambda = 1^4. \\ &= |t| \|y\| \text{ pour } y \in F_0, \lambda = 0 \text{ (possible ssi } k \geq 4). \end{aligned}$$

Et  $\frac{\|\theta_t \times y\|}{\|y\|}$  varie dans  $[m, M]$  lorsque  $0 \neq y \in F_\lambda$ ,  $0 < \lambda \neq 1^4$ , où  $m$  et  $M$  sont respectivement la plus petite et la plus grande des quantités  $|t - \sqrt{\lambda}|, |t + \sqrt{\lambda}|$ .

Le théorème 5.2 apporte une solution partielle au paradoxe logique évoqué au § 3.2. En effet, pour  $|t| = \sqrt{\lambda}$ ,  $0 < \lambda \neq 1^4$ ,  $\theta_{\sqrt{\lambda}}$  est un diviseur de zéro dans  $\mathcal{D}_{k+1}$ , et  $c_{\sqrt{\lambda}} = a + \sqrt{\lambda}\tilde{1}$  dans  $\mathcal{I}mA_k$  admet une valeur singulière nulle. La contradiction logique est "expliquée" par la présence de  $\theta_{\sqrt{\lambda}}$ , vrai diviseur de 0 dans  $\mathcal{D}_{k+1}$ . Si  $a$  est alternatif, alors  $\sqrt{\lambda} = \|a\|$  : l'explication lie les deux niveaux  $k$  et  $k+1$  en utilisant l'arithmétique réelle seule.

Mais puisque  $\text{Zer}(\tilde{1}) = \{0\}$ , nous savons que les diviseurs de zéro  $\theta_{\pm\sqrt{\lambda}}$  entraînent une complexification de l'arithmétique :  $\mathbb{R}$  est remplacé par  $\mathbb{C}$  comme corps de base. Que se passe-t-il pour  $N(\theta_t) = 1 + t^2$  lorsque  $t \in \mathbb{C}$ ?  $N(\theta_t)$  peut prendre des valeurs non positives dans  $\mathbb{C}$ , créant ainsi de nouvelles difficultés logiques. Mais aussi une nouvelle explication liant maintenant les quatre niveaux  $k-1, k, k+1$  et  $k+2$ , si l'on identifie  $1_{k-1} \equiv 1$ ,  $\tilde{1}_k \equiv i$ , et  $\tilde{1}_{k+1} \equiv j$ . En posant  $q = (\tilde{1}_k, 0)$ , les identifications faites entraînent  $\mathbb{H}_q \equiv \mathbb{H}$  et  $A_{k+1} \equiv A_{k-1}(\mathbb{H})$ .

**Corollaire 5.3** *Les identifications de  $\mathbb{C}_{\tilde{1}_k}$  avec  $\mathbb{C}$  et de  $\mathbb{H}_q$  avec  $\mathbb{H}$  créent à partir de  $a \in \mathcal{D}_k$ ,  $k \geq 3$ , les diviseurs de 0 successifs :  $\theta_{\pm i} = (a, \mp \tilde{1}_k)$  dans  $\mathcal{I}mA_{k+1}$ , et  $\Theta_{\mp 1} = (a, 0, 0, \mp 1_k)$  dans  $\mathcal{D}_{k+2}$ . Alternativement, en arithmétique réelle dans  $A_{k+1}$   $\Theta_{\mp 1} = (\theta_0, \mp \tilde{1}_k)$ , avec  $\theta_0 = (a, 0)$  dans  $\mathcal{D}_{k+1}$  où  $\theta_0$  est diviseur de 0 ssi  $a$  en est un.*

## 6 La dynamique du calcul

L'existence de diviseurs de 0 dans les algèbres sans division rend le calcul sensible aux paradoxes logiques. Cela ne doit pas étonner. Nous allons voir que ces paradoxes sont une résurgence, en dimension  $\geq 16$ , des deux paradoxes d'origine, qui ont fondé le calcul algébrique moderne établi au 19<sup>e</sup> siècle [5,8,10,14].

### 6.1 Les deux paradoxes fondateurs

Au cours des quelques 5 000 ans écoulés depuis les tablettes de Sumer, la lente élaboration des outils modernes du calcul a été rendue possible par la maîtrise de deux paradoxes fondateurs.

- Tout d'abord, il y eut le paradoxe du 0, le plus difficile à penser, et qui peut s'exprimer par l'aphorisme : "Il existe la non existence et on l'appelle zéro"

Certains Grecs de l'Antiquité en ont pressenti l'utilité philosophique, tels Démocrite ou Aristote, mais aucun d'eux n'a franchi le pas du calcul. C'est aux Indiens, de Brahmagupta (7<sup>e</sup> siècle), à Bhaskara (12<sup>e</sup> siècle) que revient le mérite d'avoir transformé le chiffre 0 des Babyloniens en nombre. La maîtrise du zéro a permis la résistible émergence des nombres négatifs. Ces nombres qui "nient", par opposition à ceux qui affirment, semblaient difficiles à accepter en Europe, alors qu'en Chine et en Inde, ils étaient manipulés sans crainte depuis des siècles. Ces derniers venus ne furent vraiment acceptés à l'Ouest, à partir du 15<sup>e</sup> siècle, que grâce à leur utilité pour équilibrer les comptes dans les transactions bancaires de la société marchande européenne.

- Au 16<sup>e</sup> siècle apparaît le paradoxe du carré négatif. Les Italiens Cardan, puis Bombelli, se voient, bien malgré eux, contraints d'utiliser l'artefact  $\sqrt{-1}$  afin de résoudre certaines équations de degré 3 et 4. Peut-on ignorer la règle du carré positif? Peut-on s'engager dans une voie interdite sans risquer l'effondrement de tout l'édifice logique? Cela semble si peu raisonnable que les nombres de carré  $< 0$  sont appelés "imaginaires". Il faudra 3 siècles de difficiles tâtonnements pour qu'enfin les nombres complexes soient pleinement maîtrisés par Gauss au début du 19<sup>e</sup> siècle. Leur remarquable efficacité pour représenter les phénomènes ondulatoires de la physique de l'époque (lumière, son, ...) va les faire adopter par les ingénieurs. D'un point de vue théorique, le corps des nombres complexes représente l'achèvement de la construction axiomatique des nombres à partir des rationnels par complétion topologique et clôture algébrique.

"Il n'est guère de paradoxe sans utilité" a dit Leibniz. Les deux paradoxes 0 et  $\sqrt{-1}$  sont le moteur implicite à l'origine de la dynamique du calcul [5,8,10,14].

Ainsi la notion d'intégrale de Cauchy permet la définition de la constante universelle  $\pi$  grâce à  $\int_C \frac{dz}{z} = 2i\pi$ , où  $C$  est une courbe fermée entourant 0. Autre exemple typique, la relation d'Euler  $e^{2i\pi} = 1$  qui lie  $e, \pi, i$  et 1.

## 6.2 La construction illimitée des nombres hypercomplexes

A la fin du 19<sup>e</sup> siècle prévalait l'opinion que la construction des nombres s'achevait avec  $\mathbb{C}$ . Et c'est encore la version enseignée à l'Université de nos jours.

Pourtant la construction des nombres ne s'arrête pas à la dimension 2. Ainsi que nous l'avons rappelé en introduction, dès 1843, Hamilton et Graves avaient montré, avec les quaternions (dimension 4) et les octonions (dimension 8), que la commutativité et l'associativité sont des propriétés optionnelles, dont l'absence ne remet pas en cause l'isométrie de la multiplication.

Dickson a envisagé dès le début du 20<sup>e</sup> siècle que le processus de construction soit sans fin. Mais il y a un prix à payer : à partir de  $k = 4$  (sédenions de dimension 16), la multiplication devient anisométrique en général et les diviseurs de 0 existent. Alors les paradoxes logiques liée à 0 et au carré  $< 0$  refont surface, sous une forme nouvelle dès la dimension 8 lors des calculs de SVD.

## 6.3 Diviseurs de 0 et paradoxes résurgents par mesure

Le calcul des valeurs singulières de  $L_a$ , pour  $a \in A_k, k \geq 4$ , fait découvrir un certain nombre de résultats paradoxaux. On ne peut plus assigner automatiquement aux valeurs singulières de  $L_a$ , leur sens classique de métrique réelle.

Le calcul par induction de  $A_k$  à  $A_{k+1}$  d'un diviseur de 0 dans  $\mathcal{D}_{k+1}$  peut nécessiter que l'algèbre  $A_k$  soit définie sur le corps de base  $\mathbb{C}$  plutôt que  $\mathbb{R}$ . Cette règle d'induction valable pour  $k \geq 3$  peut avoir des conséquences paradoxales. Elle a aussi pour effet de pouvoir lier les 4 niveaux d'algèbres emboîtées de  $A_{k-1}$  à  $A_{k+2}$  :  $A_{k+2}$  a une structure *octonionique* relative à l'algèbre  $A_{k-1}$  lorsque  $\mathbb{C}_{\bar{1}_k} \equiv \mathbb{C}$

Ces phénomènes de calcul permettent de comprendre comment le calcul multidimensionnel et la géométrie viennent, par le biais de la mesure, enrichir à partir des dimensions 4 et 8, le contenu des paradoxes d'origine 0 et  $\sqrt{-1}$ . Néanmoins, la plus grande prudence s'impose dans l'interprétation qu'il est possible de proposer pour les résultats. Cette interprétation reste liée au niveau  $k$  de l'algèbre  $A_k$  où est mené le calcul, et à l'identification  $\mathbb{C} \equiv \mathbb{C}_{\bar{1}_k}$ .

Mais puisque la possibilité de complexification existe pour tout  $k$  entier, se pose la question d'une "limite" du phénomène de duplication de Dickson lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

Comme les algèbres  $A_k$  sont quadratiques, le phénomène est lié à l'évolution de l'anisométrie quand  $k$  augmente. Cette évolution peut être analysée au moyen de certaines itérations de point fixe. L'étude est en cours [9].

## 7 Conclusion

En conclusion les algèbres de Dickson de grande dimension offrent la possibilité d'étudier la non associativité et l'anisométrie de la multiplication. Ces algèbres de dimension  $2^k$  sont les boîtes à outils du calcul non linéaire car elles définissent les propriétés au rang  $k$  des nombres (qui sont des vecteurs de dimensions  $2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ) qu'elle renferment.

Ce sont de véritables boîtes de Pandore. A partir de  $k = 4$ , elle libèrent les diviseurs de 0 qui peuvent tendre des pièges au calcul, sous la forme de paradoxes logiques. A condition de les maîtriser, les paradoxes déclenchent le pouvoir créateur du calcul. Ils permettent par l'utilisation d'une arithmétique complexe au niveau  $k \geq 3$  l'émergence au niveau  $k + 1$  de concepts inexistantes au niveau inférieur. Ils sont le moteur de la dynamique du calcul de la Vie.

D'un point de vue plus descriptif, il apparaît, pour  $k \geq 4$  aussi, une différence fondamentale et inattendue entre les rôles, joués par les trois corps  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{H}$  d'un côté et celui joué par l'algèbre alternative  $\mathbb{G}$  de l'autre. Choisir de représenter les vecteurs de  $A_k$  par des composantes dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  ne permet pas d'effectuer un calcul invariant par  $\text{Aut}(A_k)$ . Seul le choix de composantes dans  $\mathbb{G}$  le permet. Le rôle central des octonions apparaît explicitement en pleine lumière dans le cadre algébrique hypercomplexe de Dickson, à la différence du cadre algébrique de Clifford où, bien sûr, le rôle de  $\mathbb{G}$  ne peut être qu'indirect et implicite. Telle est l'une des approches que proposent les mathématiques et le calcul en réponse à la question de J. Baez concernant la description du monde physique.

Les octonions marquent la frontière entre les calculs de nature particulière (signifiante) et universelle (fondamentale) dans  $A_k$ ,  $k \geq 4$ . Autrement dit, les 3 corps  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , et  $\mathbb{H}$  jouissent de propriétés trop *particulières* (notamment **l'associativité**) pour prétendre représenter l'universalité du calcul non linéaire qui ne se manifeste pleinement que dans une algèbre de Dickson non associative.

Ils marquent aussi la limite du calcul dans une algèbre à division ( $1 \neq k \leq 3$ ), pour laquelle il n'existe qu'*une seule* représentation fondamentale ( $m = k$ ), celle qui impose aux coefficients leur complexité *maximale*  $A_k$ . Dans une algèbre à division complexe de dimension 4 ou 8, la complexité des coefficients ne peut être réduite sans perte de généralité. Cette réduction fait émerger les phénomènes en rendant

la représentation signifiante. La seule structure fondamentale  $\mathbb{R}$  qui existe pour  $k = 2$  ou  $3$  n'admet que des sous-algèbres dénombrables. Cet aspect arithmétique est poursuivi ailleurs [7].

Les octonions marquent enfin la limite du calcul associatif et le retour en force des paradoxes logiques sans une forme sans cesse renouvelée lorsque  $k$  croit. *Mesurer sans associativité*, c'est accepter le risque d'être confronté à des paradoxes toujours plus nombreux. A posteriori, on peut imaginer que c'est justement le refus inconscient du risque logique qui guida le choix historique de la fin du 19<sup>e</sup> siècle en faveur de l'associativité. Ce n'est sans doute pas un hasard si la question du fondement *logique* des mathématiques se posa à la même époque. L'axiomatisation des mathématiques suscita d'après discussions durant une cinquantaine d'années (1885-1935) qui aboutirent, vers 1936, à une définition normative de la calculabilité qui garantit la cohérence logique. Bien sûr, le calcul non associatif dans les algèbres de Dickson de dimension  $\geq 8$  déborde de ce cadre axiomatique étroit. Car, comme nous en avait déjà averti Leibniz, privilégier la logique, c'est fermer la porte à l'inventivité du calcul.

Revenons au calcul dans une algèbre sans division. Il est clair que toute représentation fondamentale impose de ne calculer que sur des vecteurs de dimension  $2^m \geq 8$ . Cela crée un parallélisme naturel qui disparaît graduellement lors de l'émergence du sens ( $m = 2, 1$  et  $0$ ).

Dans une description fondamentale de l'évolution, les coefficients de complexité *maximale* sont les octonions. Leurs structure linéaire à 8D semble ne pas avoir de lien avec le monde physique, matériel, à 3D qui nous entoure. Mais est ce bien sûr?

Il est classique de considérer que l'espace à 3 dimensions de type  $\mathbb{R}^3$  est l'espace de référence pour la dynamique usuelle de la physique de tous les jours. C'est une vue "linéaire" des choses.

Dans une perspective "multiplicative", l'évolution du vivant porte sur des vecteurs à 8(et non 3) dimensions. Car il suffit de spécifier *trois* générateurs imaginaires (un trièdre orthonormal de  $\mathbb{R}^3$  [10]) pour construire, par multiplication, la base imaginaire de 7 vecteurs qui, ajoutés à 1, forment une base orthonormale de  $\mathbb{G}$ .  $\mathbb{R}^3$  peut être considéré comme le germe engendrant  $\mathbb{G}$  multiplicativement. L'algèbre des octonions apparaît comme le décor où se déroule le théâtre multiforme de la Vie, tout autant que celui, intime, de notre raison.

A la lumière des octonions, notre conception de ce qui est physiquement réalisable,

ou admissible, par un organisme animé s'élargit considérablement. Et la réponse à la question de J. Baez pourrait bien être positive. Une algèbre alternative à 8 dimensions pourrait être le cadre approprié pour rendre compte des phénomènes physiques où 3 niveaux de sens interfèrent simultanément.

## References

- [1] J. Baez (2001) *The octonions*. Bull. AMS **39**, 145-205.
- [2] D. Biss, D. Dugger, D. Isaksen (2005) *Large annihilators in Cayley-Dickson algebras*, arXiv : math. RA/05 11 691 v1, 28 Nov, 2005.
- [3] R. B. Brown (1967) *On generalized Cayley-Dickson algebras*, Pacif. J. Math., **20**, 415-422.
- [4] F. Chaitin-Chatelin (1999). *The computing power of Geometry*, in D.F. Griffiths et al. (eds), **Proceedings of Numerical Analysis 1999**, pp 83-92, CRC Press LLC, 1999, et Cerfacs Report TR/PA/99/24.
- [5] F. Chaitin-Chatelin (2002). *Hasard et Créativité : le Calcul de la Vie.*, Grand Séminaire de l'Observatoire Midi-Pyrénées, Toulouse, 24-9-2002.
- [6] F. Chaitin Chatelin (2003). *Elements of Hypercomputation on  $\mathbb{R}$  and  $\mathbb{Z}_2$  with the Dickson-Albert inductive process*. Technical Report TR/PA/03/34, CERFACS, Toulouse, France, 2003.
- [7] F. Chaitin-Chatelin (2004). *Beyond ideals in the Dickson ring of integral octonions*, Technical Report TR/PA/04/96, CERFACS, Toulouse, France, 2004.
- [8] F. Chaitin-Chatelin (2004). *Le sens des Nombres*, Séminaire Grand Public, Université Paul Sabatier, Toulouse, 5-2-2004.
- [9] F. Chaitin-Chatelin (2005). *About the anisometry of multiplication induced by zerodivisors*, Working Notes, November 2005.
- [10] F. Chaitin-Chatelin (2005). *Inductive multiplication in Dickson algebras*, Technical Report TR/PA/05/56, CERFACS, Toulouse, France, 2005.
- [11] F. Chaitin-Chatelin (2005). *Le rôle de la multiplication en Calcul Scientifique* Séminaire Lab. Physique Théorique, U. Paul Sabatier (Toulouse 3), 11-1-2005.

- [12] F. Chaitin-Chatelin (2006). *Measuring by multiplication in Dickson algebras*, Working Notes, Février 2006.
- [13] F. Chaitin-Chatelin (1996) *Is finite precision arithmetic useful for Physics?*, Journ. of Universal Comp. Science, **2**, 380-395.
- [14] F. Chaitin-Chatelin, E. Traviéas-Cassan (2005) *Qualitative Computing*, Chapter 5 in **Accuracy and Reliability in Scientific Computing** (Bo Einarsson ed.), p.77-92, SIAM Philadelphia. Aussi Cerfacs Report TR/PA/02/58.
- [15] H.S.M. Coxeter (1946) *Integral Cayley numbers*, Duke Math. J. **13**, 561-578.
- [16] L.E. Dickson (1914). **Linear Algebras**, Cambridge Univ. Tracts n° 16.
- [17] P. Eakin, A. Sathaye (1990) *On automorphisms and derivations of Cayley-Dickson algebras* J. Algebra **129**, 263-278.
- [18] H.D. Ebbinghaus et al. (1998) **Les nombres** Vuibert, Paris.
- [19] C. Jordan (1874) *Mémoire sur les formes bilinéaires*, J. Math. Pures Appl., **19**(Série 2), 35-54.
- [20] S.H. Khalil, Paul Yiu (1997) *The Cayley-Dickson algebras, a theorem of A. Hurwitz, and quaternions* Bull. Soc. Sciences et Lettres, Lódź **47**, 117-169.
- [21] P.J.C. Lamont (1963) *Arithmetics in Cayley's algebra*, Glasgow Mathem. J. **6**, 99-106.
- [22] K. Mahler (1942) *On ideals in the Cayley-Dickson algebra* Proc. Roy. Irish Acad. **48**, 123-133.
- [23] E. Mathieu (1862) *Sur une formule relative à la théorie des nombres*, J. reine Angew. Math. **60**, 351-356.
- [24] R.D. Schafer (1954) *On the algebras formed by the Cayley-Dickson process* Amer. J. Math. **76**, 435-446.
- [25] R.D. Schafer (1966) **An Introduction to Nonassociative Algebras** Academic Press, New York.
- [26] W.D. Smith (2004). *Quaternions, octonions, and now, 16-ons and  $2^n$ -ons : New kinds of numbers*, Tech. Rep., accessible par <http://math.temple.edu/~wds/homepage/works.html>

- [27] G. W. Stewart (1993) *On the early history of the Singular Value Decomposition*, SIAM Rev., **35**, 551-566.

Tous les rapports Cerfacs sont accessibles par <http://aton.cerfacs.fr/algor/reports>