

SER et méthode des domaines fictifs

F. Collino*[†] P. Joly* F. Millot[†]

20 juillet 2001

CERFACS REPORT FR/EM/96/31

Sommaire

Ce document constitue la finale version du rapport sur l'étude réalisée pour le compte de l'Aérospatiale. Intitulée " COMPLEMENTS MATHEMATIQUES POUR LA METHODE FDTD APPLIQUEE AUX CALCULS DE SER", cette étude a été entreprise par l'équipe Electromagnétisme du CERFACS. Elle comprend trois chapitres. Le premier étudie la détermination de la SER par la méthode dite des domaines fictifs. Le second chapitre présente une formulation du problème de diffraction d'une onde par un corps parfaitement conducteur à l'aide de la méthode des domaines fictifs qui permet de construire un schéma numérique coïncidant avec un schéma d'ordre quatre dans l'espace libre. Le troisième chapitre analyse la possibilité d'une hybridation entre la méthode des domaines fictifs et la méthode FDTD avec approximation en marches d'escalier de la frontière.

*INRIA, Domaine de Rocquencourt 78153 Le Chesnay

[†]CERFACS, 42 avenue G. Coriolis 31057 Toulouse

Table des matières

I	Introduction	6
II	Calcul de la surface équivalente radar sur des exemples génériques	8
1	Introduction	8
2	Tests de validité	8
2.1	Tests de convergence	9
2.2	Discretisation de l'obstacle	11
3	Comparaison avec les autres méthodes	15
3.1	Disque	17
3.2	Demi-disque concave	20
3.3	Demi-disque convexe	22
4	Conclusion	24
III	Ordre élevé et domaines fictifs	28
5	Position du problème	28
6	Formulation	28
6.1	Remarques	31
7	Résultats numériques	31
7.1	Tests de Convergence	31
7.1.1	Champ proche-Réflexion sur un plan métallique	31
7.1.2	Champ lointain- SER	32
7.2	Comparaison avec le schéma 2-2	34
7.2.1	Réflexion sur un plan métallique	35
7.2.2	SER	36
IV	Méthode hybride: Domaines fictifs et FDTD	40
8	introduction	40
9	Tests de convergence	44
10	Etude paramétrique	44
10.1	Variation de la longueur	44
10.2	Variation du raccordement	47
11	Comparaison avec les autres méthodes	47
V	Conclusion	51

Table des figures

1	<i>Configuration de la géométrie</i>	9
2	<i>Variation temporelle de la source avec sa transformée de Fourier</i>	10
3	<i>SE_{R_{df1}}</i> en fonction de l'angle d'observation pour $ka = 1$ (- : valeur analytique ,-. : $h_v = 0.4$,...: $h_v = 0.2$,- -: $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.	11
4	<i>SE_{R_{df1}}</i> en fonction de l'angle d'observation pour $ka = \frac{3\pi}{2}$ (- : valeur analytique ,-. : $h_v = 0.4$,...: $h_v = 0.2$,- -: $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.	12
5	<i>SE_{R_{df1}}</i> en fonction de ka pour $\theta = 0$ (- : valeur analytique ,-. : $h_v = 0.4$,...: $h_v = 0.2$,- -: $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.	12
6	<i>SE_{R_{df1}}</i> en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (- : valeur analytique ,-. : $h_v = 0.4$,...: $h_v = 0.2$,- -: $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.	13
7	<i>SE_{R_{df1}}</i> en fonction de l'angle d'observation pour $ka = \frac{3\pi}{2}$ (- : valeur analytique ,-. : $h_v = 0.4$,...: $h_v = 0.2$,- -: $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.	13
8	<i>SE_{R_{df2}}</i> en fonction de ka pour $\theta = 0$ (- : valeur analytique ,-. : $h_v = 0.4$,...: $h_v = 0.2$,- -: $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.	14
9	<i>SE_{R_{df2}}</i> en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (- : valeur analytique ,-. : $h_v = 0.4$,...: $h_v = 0.2$,- -: $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.	14
10	<i>SER en fonction de θ pour $ka = \frac{3\pi}{2}$ (La frontière du disque est approchée par des arcs de cercle de longueur h_s) (- . : $h_s = \pi h_v$, ... :$h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, - -:$h_s = \frac{\pi h_v}{4}$)</i>	15
11	<i>SER en fonction de θ pour $ka = 1$ (- . : la frontière est approchée par des arcs de cercle de longueur $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, ... : la frontière est approchée par des segments de longueur $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, - -: la frontière est approchée par des segments $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$)</i>	16
12	<i>SER en fonction de θ pour $ka = 1$ (- . : la frontière est approchée par des arcs de cercle de longueur $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, ... : la frontière est approchée par des segments de longueur $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, - -: la frontière est approchée par des segments $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$)</i>	16
13	<i>Champ électromagnétique le long de C_a pour $ka = \frac{3\pi}{2}$ (- :exact, ... :df1, - -:fdtd)</i>	17
14	<i>SER en fonction de θ pour $ka = 1$ (- :exact, ... :df1 nw = 10, - -: fdtd nw = 10 , - :fdtd nw = 20)</i>	18
15	<i>SER en fonction de θ pour $ka = \frac{3\pi}{2}$ (- :exact, ... :df1 nw = 10, - -: fdtd nw = 10 , - :fdtd nw = 20)</i>	18

16	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ (-:exact, ... :df1 nw = 10, - -: ftdt nw = 10 , -.:fddd nw = 20)</i>	19
17	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (-:exact, ... :df1 nw = 10, - -: ftdt nw = 10 , -.:fddd nw = 20)</i>	19
18	<i>Configuration de la géométrie</i>	20
19	<i>Energie électromagnétique dans le domaine de calcul en fonction du temps (-:disque, ... :demi-disque concave, - -: demidisque convexe)</i>	21
20	<i>Zoom de la figure précédente</i>	21
21	<i>SER en fonction de θ pour $ka = 1$ (-:référence, ... :df1, - -: ftdt)</i>	22
22	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (- . :exact, ... :df1 $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, - -: ftdt $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$)</i>	22
23	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (- . :exact, ... :df1 $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, - -: ftdt $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$)</i>	23
24	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (- . :exact, ... :df1 $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, - -: ftdt $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$)</i>	23
25	<i>Configuration de la géométrie</i>	24
26	<i>SER en fonction de θ pour $ka = 1$ (-:exact, ... :df1 nw = 10, - -: ftdt nw = 10 , -.:fddd nw = 20)</i>	25
27	<i>SER en fonction de θ pour $ka = \frac{3\pi}{2}$ (-:exact, ... :df1 nw = 10, - -: ftdt nw = 10 , -.:fddd nw = 20)</i>	25
28	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ (-:exact, ... :df1 nw = 10, - -: ftdt nw = 10 , -.:fddd nw = 20)</i>	26
29	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (-:exact, ... :df1 nw = 10, - -: ftdt nw = 10 , -.:fddd nw = 20)</i>	26
30	<i>Evolution temporelle de la source et sa transformée de Fourier</i>	32
31	<i>Configuration de la géométrie</i>	32
32	<i>Champ électrique tangent au plan (-:nw =10 , +:nw=20) en fonction du temps</i>	33
33	<i>Zoom de la figure précédente</i>	33
34	<i>SER à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:analytique , -.:DF_{2,4}nw = 10, -.:DF_{2,4}nw = 20, : DF_{2,4}nw = 40)</i>	34
35	<i>SER à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:analytique , -.:DF_{2,4}nw = 10, -.:DF_{2,4}nw = 20)</i>	34
36	<i>SER à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:analytique , -.:DF_{2,4}nw = 10, -.:DF_{2,4}nw = 20, : DF_{2,4}nw = 40)</i>	35
37	<i>Valeur du champ électrique au point P1 (-:FDTD_{2,2}, +:FDTD_{2,4}, ...:DF_{2,2}, *:DF_{2,4})</i>	36
38	<i>Valeur du champ électrique au point P1 (-:FDTD_{2,2}, +:FDTD_{2,4}, ...:DF_{2,2}, *:DF_{2,4})</i>	36
39	<i>Zoom de la figure précédente</i>	37
40	<i>SER à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:analytique , - - :DF_{2,2}, -.:DF_{2,4})</i>	37
41	<i>SER à $\theta = \pi$ en fonction de ka (-:analytique , -.:DF_{2,2} , ...:DF_{2,2}, -.:DF_{2,4})</i>	38
42	<i>SER à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:analytique, ...:DF_{2,2} , -.:DF_{2,4})</i>	38
43	<i>SER à $\theta = \pi$ en fonction de ka (-:analytique , - - :DF_{2,2}, -.:DF_{2,4})</i>	38
44	<i>SER à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:analytique , - - :DF_{2,2}, -.:DF_{2,4})</i>	39
45	<i>SER à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:équations intégrales , - - :DF_{2,2}, -.:DF_{2,4})</i>	39

46	<i>SER à $\theta = \pi$ en fonction de ka (-:équations intégrales, -:DF_{2,2},-:DF_{2,4}) .</i>	39
47	<i>Configuration de la geometrie du cas Hyb1</i>	40
48	<i>Configuration de la geometrie dans le cas Hyb2</i>	41
49	<i>Raccordement 1 dans le cas Hyb2</i>	42
50	<i>Raccordement 2 dans le cas Hyb2</i>	42
51	<i>Champ électrique vertical au bout de 300 itérations en temps obtenu par la méthode df1</i>	43
52	<i>Champ électrique au bout de 300 itérations en temps obtenu par la méthode hybride</i>	43
53	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas Hyb2 (-:ei, -:hyb nw = 10,-:hyb nw = 20)</i>	44
54	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ pour le cas Hyb2 (-:ei, -:hyb nw = 10,-:hyb nw = 20)</i>	45
55	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas Hyb2 (-:ei, -:hyb nw = 10,-:hyb nw = 20)</i>	45
56	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ pour le cas Hyb2 (-:ei, -:hyb nw = 10,-:hyb nw = 20)</i>	46
57	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas 2 (-:ei, -:df1,- :hyb $b = 2\lambda_{min}$, -:hyb $b = \lambda_{min}$)</i>	46
58	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ pour le cas 2 (-:ei, -:df1,- :hyb $b = 2\lambda_{min}$, -:hyb $b = \lambda_{min}$)</i>	47
59	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas 2 (-:ei, -:hyb raccor₁, -:hyb raccor₂)</i>	48
60	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ pour le cas 2 (-:ei, -:df1,- :hyb raccor₁, -:hyb raccor₂)</i>	48
61	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas 1 (-:ei, -:df1,- :fdtd,-:hyb)</i>	49
62	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas 1 (-:ei, -:df1,- :fdtd,-:hyb)</i>	49
63	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas 2 (-:ei, -:df1,- :fdtd,-:hyb)</i>	50
64	<i>SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas 2 (-:ei, -:df1,- :fdtd,-:hyb)</i>	50

Part I

Introduction

Le calcul de la diffraction d'ondes par des objets métalliques ou revêtus ont de nombreuses applications dans l'aéronautique, citons par exemple l'évaluation de la surface équivalente radar (SER) des avions. Pour une onde monochromatique, la méthode numérique la plus précise est la méthode dite méthode des éléments finis de frontière. Le problème est alors posé sous la forme d'une équation intégrale dont l'inconnue est le courant surfacique sur l'objet diffractant. Après discrétisation, on obtient un système linéaire plein qui peut être de très grande taille pour les objets tridimensionnels. Cette méthode a ainsi un domaine d'application limité principalement par la taille de la mémoire des ordinateurs actuels. En outre certaines applications nécessitent la connaissance de l'onde sur une large plage de fréquences: on doit alors assembler puis résoudre autant de systèmes linéaires que de fréquences présentes dans la plage d'intérêt. Une alternative consiste à poser le problème de la diffraction dans le domaine temporel puis à appliquer une transformation de Fourier. On obtient ainsi la réponse du système pour l'ensemble des fréquences présentes dans le signal incident.

La résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires qui régissent la propagation des ondes électromagnétiques s'appuient principalement¹ sur des méthodes d'éléments finis ou, plus couramment, des méthodes aux différences finies (FDTD pour "finite difference time difference method"). La méthode par éléments finis, quoique présentant l'avantage de rendre compte correctement de la géométrie de l'objet diffractant, a pour inconvénient majeur de nécessiter l'inversion d'un système linéaire creux à chaque pas de temps, la condensation de masse étant à l'heure actuelle inaccessible pour les éléments tétraédriques. La FDTD connaît, de par la simplicité de sa mise en œuvre sur ordinateur, et comme en témoigne le récent livre de A.Taflove, une popularité croissante dans de nombreux domaines d'application. Le champ est calculé sur une grille régulière et une simple formule explicite permet l'itération temporelle. Ainsi, nulle résolution de système linéaire n'est requise et l'algorithme se prête bien à un traitement parallèle sur ordinateur. Toutefois, une difficulté demeure quant à la géométrie de l'objet sur lequel on doit imposer la condition à la limite, celle-ci pouvant être très mal approchée sur le maillage régulier de la grille de calcul. Pour certaines géométries, l'approximation dite en "marches d'escalier" génèrent des diffractions parasites qui entachent le résultat du calcul si la discrétisation est par trop lâche. Des solutions, reposant sur une modification du schéma au voisinage de l'objet ont été proposées mais elles ont l'inconvénient majeur de diminuer de façon notable le pas de temps utilisé pour le calcul.

La méthode des domaines fictifs peut être une solution à cette difficulté. Par sa formulation générale, elle permet une prise en compte correcte de la géométrie et l'objet diffractant apparaît comme simple terme source dans les équations de la FDTD, ce terme source étant obtenu par résolution d'un "petit" système linéaire creux. L'idée consiste à prolonger la solution du problème extérieur à l'intérieur du domaine défini par le conducteur. Ce prolongement est unique si il est choisi comme la solution des équations de Maxwell qui est contrainte par la condition à la limite à la surface du conducteur. Cette contrainte fait naître un multiplicateur de Lagrange qui n'est autre que le courant surfacique sur l'objet. Ainsi, on est passé de la détermination d'un champ défini sur le domaine extérieur à l'objet à celle, conjointe, d'un champ défini sur tout l'espace et du courant à la surface du conducteur.

¹J'oublie ici les équations intégrales dans le domaine temporel qui sont l'objet d'une recherche très vivace

Lors de la discrétisation, on peut choisir un maillage régulier pour le champ et un maillage surfacique classique pour le courant. Dans cette courte introduction, nous ne décrivons pas les détails de la méthode et renvoyons le lecteur intéressé au rapport [7]. Toutefois, nous pouvons néanmoins mettre en avant les points suivants.

- La condition de stabilité du schéma n'est pas affectée par la présence de l'objet diffractant.
- Les maillages, volumique pour le champ électromagnétique, surfacique pour le courant, peuvent être choisis indépendamment, à la restriction près que le rapport entre le pas pour le courant et pas pour le champ ne soit pas trop petit.
- Les premiers tests numériques montrent une amélioration notable de la méthode des domaines fictifs par rapport à la FDTD avec discrétisation en marches d'escalier du conducteur.

L'un des buts de ce rapport est d'analyser quantitativement cette amélioration sur des exemples de calcul de RCS à deux dimensions. On commencera par les cas, académiques, du disque conducteur, puis du demi-disque conducteur.

La taille grandissante des problèmes à traiter pose le problème des erreurs numériques du aux défauts intrinsèques des schémas numériques. C'est dans le but de produire des algorithmes plus précis que sont apparus les schémas aux différences finies d'ordre élevé. Ils se révèlent fort intéressants lorsque le domaine de calcul est important. Cependant reste toujours les difficultés dues à la prise en compte de la géométrie de l'obstacle. Afin d'essayer de résoudre cette difficulté, nous allons proposer dans le chapitre deux une formulation du problème de diffraction d'une onde par un corps parfaitement conducteur à l'aide de la méthode des domaines fictifs qui permet de construire un schéma numérique coïncidant avec un schéma d'ordre quatre dans l'espace libre.

Comme nous l'avons dit, la détermination du courant surfacique nécessite l'inversion à chaque pas de temps d'un système linéaire creux. La matrice du système linéaire couple deux degrés de liberté du courant si les éléments surfaciques qui les supportent intersectent un même cube de la grille de calcul sur lequel est évalué le champ électromagnétique. Si à deux dimensions d'espace, le temps de résolution reste faible en regard à celui nécessaire à l'intégration du schéma pour le champ, il peut ne pas en être de même pour le cas de gros objets. Comme de plus, l'approximation par marches d'escalier peut s'avérer suffisante pour une partie de l'objet, il est tentant de coupler les deux méthodes, en n'approchant par domaines fictifs qu'une partie du conducteur. Le courant n'est alors recherché que sur une partie de l'objet, diminuant ainsi la taille du système linéaire à inverser. Dans une seconde série d'expériences numériques bidimensionnelle, nous analyserons la potentialité d'une telle méthode mixte.

Part II

Calcul de la surface équivalente radar sur des exemples génériques

1 Introduction

La SER permet de caractériser la puissance rayonnée par un corps diffractant à l'infini (i.e loin du corps) dans une direction considérée. Plus précisément, le processus de diffraction d'une onde plane génère à l'infini une onde sphérique qui est modulée suivant la direction d'observation. C'est cette modulation qui est caractérisée par la SER.

Le calcul du champ rayonné à l'infini peut être obtenu à partir du champ proche de l'obstacle (par exemple [2], [10]). Pour cela, on définit une surface arbitraire C_a entourant le corps diffractant. Elle sépare alors la région intérieure contenant le corps diffractant de la région extérieure. Le champ électromagnétique tangent à cette surface virtuelle C_a est calculé de manière précise par une méthode numérique (par exemple la méthode des domaines fictifs). Une transformation champ proche-champ lointain permet ensuite de déduire l'amplitude du champ diffracté à l'infini et donc de calculer la SER. Une autre méthode pour calculer la SER est de calculer les valeurs du courant sur la surface du conducteur et d'utiliser une transformation champ proche-champ lointain pour déduire l'amplitude de diffraction et donc la SER. Plus précisément, une source dont la réponse fréquentielle possède une certaine excursion en fréquence, excite le milieu. Une transformée de Fourier discrète des valeurs du champ électromagnétique localisées sur la courbe C_a est réalisée sur l'intervalle de temps du calcul. Ainsi, pour chaque fréquence de l'excitation, l'amplitude de diffraction est calculée. On remarquera qu'en un seul calcul, la SER est obtenue sur toute une plage de fréquences.

Dans un premier temps, nous allons analyser la faisabilité de la détermination de la SER à l'aide de la méthode des domaines fictifs. Des tests de convergence sont effectués sur des cas canoniques. L'influence de la discrétisation de l'obstacle est étudiée.

Dans un deuxième temps, ces calculs de SER sont comparés aux résultats obtenus par d'autres méthodes numériques en particulier la FDTD avec approximation en marches d'escalier de la frontière de l'obstacle couplée à une transformation champ proche-champ lointain et la méthode des éléments finis de frontière ou méthode d'équations intégrales.

Dans tout ce qui suit, l'onde est polarisée transverse électrique. Les corps diffractants sont supposés parfaitement conducteurs.

2 Tests de validité

De part sa formulation, la méthode des domaines fictifs permet de calculer le champ proche de l'obstacle et donc en particulier le champ tangent à une surface virtuelle C_a entourant le corps diffractant. Mais aussi, elle détermine le courant électrique porté par le corps (lié au multiplicateur de Lagrange). On peut utiliser l'une ou l'autre des méthodes pour calculer la SER. Afin de simplifier l'écriture, on note:

- SER_{df1} : la SER calculée par la transformation champ proche-champ lointain où le champ électromagnétique tangent à la surface virtuelle C_a est obtenu par la méthode des domaines fictifs.
- SER_{df2} : la SER calculée par la transformation champ proche-champ lointain où la dérivée temporelle du courant électrique sur l'obstacle est obtenue par la méthode

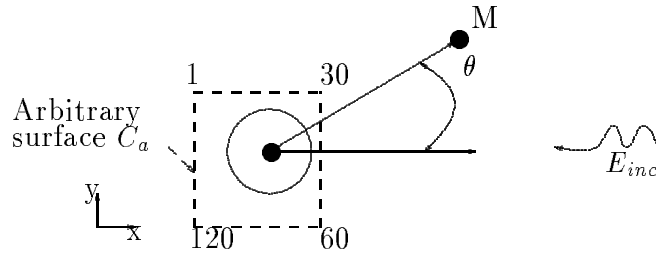


FIG. 1. Configuration de la géométrie

des domaines fictifs.

La discrétisation de la méthode des domaines fictifs fait intervenir deux maillages indépendants :

- un maillage “volumique” permettant de discrétiser l’espace où le champ électromagnétique est recherché et dont le pas est noté h_v (dans notre cas, un maillage cubique),
- un maillage “surficiel” discrétisant l’obstacle dont le pas est noté h_s .

Dans un premier temps, on va regarder l’évolution des résultats obtenus par les méthodes df1 et df2 lorsque le pas h_v tend vers zéro afin de valider la méthode. Dans un second temps, l’influence de la discrétisation de l’obstacle est étudiée. Ces tests sont réalisés sur le cas canonique du disque parfaitement conducteur. Des expressions analytiques du champ électromagnétique et de la SER peuvent être alors trouvées.

Remarque: lors du calcul de la SER, la définition de la surface C_a entourant l’obstacle est arbitraire. On choisit un rectangle localisé sur le maillage volumique.

2.1 Tests de convergence

L’expression analytique de la SER pour un disque de rayon a illuminé par une onde plane dont le vecteur d’onde vaut k , s’écrit

$$(1) \quad SER_{th\epsilon}(\theta, k, a) = \frac{4}{k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} \cos(n\theta) + \frac{J'_0(ka)}{H_0^{(2)'}(ka)} \right)^2$$

où J'_n est la dérivée de la fonction de Bessel d’ordre n et $H_n^{(2)'}$ la dérivée de la fonction de Hankel de deuxième espèce d’ordre n et θ est l’angle de la direction d’observation.

Le disque est éclairé par une onde plane (cf fig 1) dont la dépendance temporelle (cf fig (2)) est donnée par

$$(2) \quad g(t) = \frac{d}{dt} \left(\exp \left(-(\pi F_{sou}(t - 1/F_{sou}))^2 \right) \right)$$

où F_{sou} , la fréquence de la source est fixée à 37.5MHz .

La plus petite longueur d’onde, λ_{min} , contenue dans l’impulsion incidente est de l’ordre de $4m$.

Le pas en temps Δt est choisi tel que $\frac{\Delta t}{h_v} = \sqrt{2}$ afin de satisfaire la condition de stabilité du schéma numérique.

La frontière du disque est approchée par un polygone dont les côtés ont une longueur égale à h_s . Ce pas est choisi égal à $\frac{3h_v}{2}$. Le rapport h_s/h_v est gardé constant dans ce paragraphe.

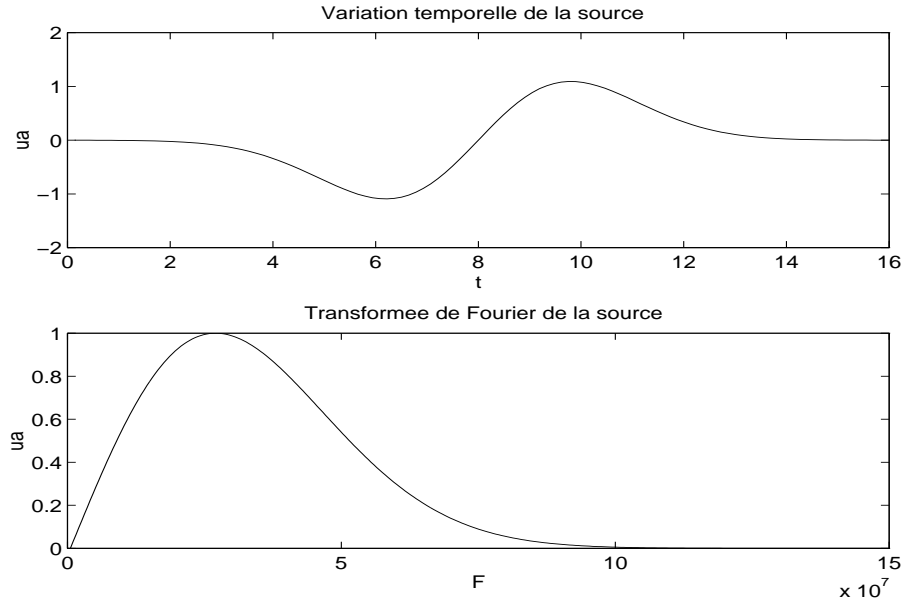


FIG. 2. Variation temporelle de la source avec sa transformée de Fourier

La valeur de la SER dépend essentiellement de deux paramètres, ka et l'angle d'observation θ . Celui-ci est compté dans le sens direct à partir du centre du cercle (cf fig (1)). Nous avons d'abord fixé la valeur du produit ka et regardé les variations de la SER en fonction de θ pour différentes valeurs du pas volumique h_v . La valeur analytique de la SER en fonction θ pour $ka = 1$ est donnée par la figure (3). Sur cette figure, sont aussi représentées les valeurs de la SER_{df1} pour trois pas de discrétisation h_v . Les quatre courbes sont pratiquement confondues. Afin de mieux quantifier leur écart, l'erreur relative de la SER par rapport à la valeur analytique

$$(3) \quad err = \left| \frac{SER_{df1} - SER_{the}}{SER_{the}} \right|$$

est donnée par la figure (3). Celle-ci est en moyenne inférieure à 5 % et diminue avec le pas en espace. La figure (4) donne les mêmes résultats mais pour $ka = \frac{3\pi}{2}$. On note que l'écart entre les courbes est dans ce cas-ci plus important. En effet, le nombre de points par rapport à la longueur d'onde d'observation a diminué d'un facteur 5.

Il est maintenant intéressant de faire varier le produit ka en gardant l'angle d'observation fixé. La plus petite longueur d'onde contenue dans l'onde incidente limite l'excursion possible en ka . En effet

$$(4) \quad ka = kh_v \frac{a}{h_v} = 2\pi \frac{h_v}{\lambda} \frac{a}{h_v}$$

Si le rapport a/h_v est de l'ordre de 20 et que le nombre de points par longueur d'onde est fixé égal à 20, cela impose une valeur de ka inférieure à 2π . Les courbes (5) et (6) donnent les valeurs de la SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et l'erreur relative pour trois valeurs de h_v .

On remarque que sur tous les cas testés, la SER_{df1} converge bien vers la valeur analytique de la SER lorsque le pas h_v tend vers zéro. De plus, en dehors des couples (θ, ka) où la SER est proche de zéro, l'erreur commise sur la SER reste relativement faible. En particulier, lorsque h_v vaut 0.2 (c'est-à-dire dans le cas où le nombre de points par longueur d'onde λ_{min} vaut 20), l'erreur relative est toujours inférieure à 5%.

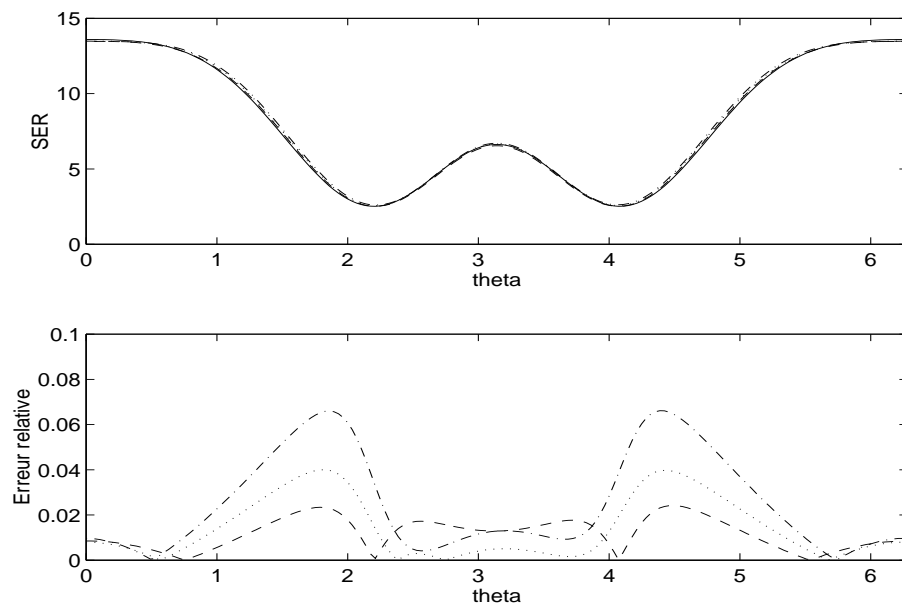


FIG. 3. SER_{df1} en fonction de l'angle d'observation pour $ka = 1$ (- : valeur analytique, -, $h_v = 0.4, \dots, h_v = 0.2$, - - : $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

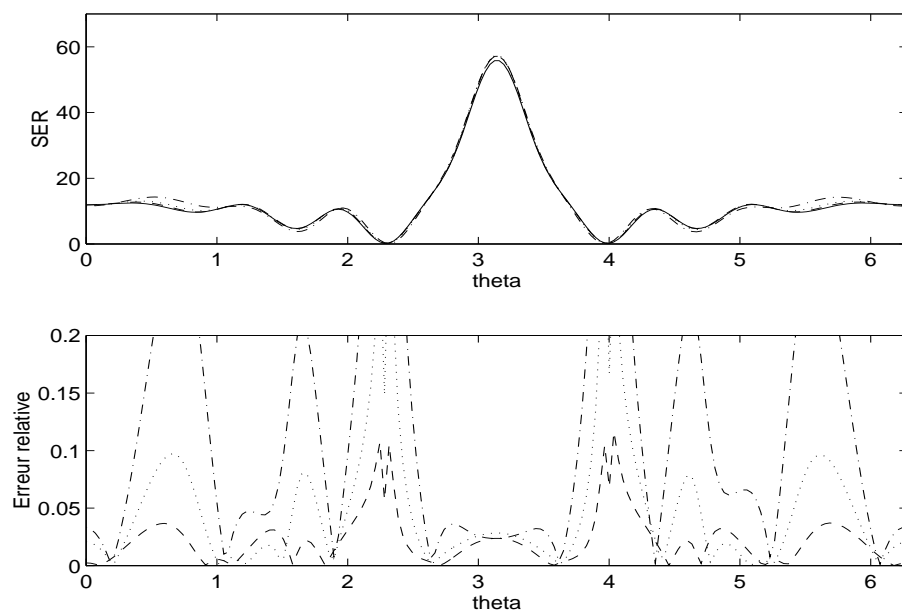


FIG. 4. SER_{df1} en fonction de l'angle d'observation pour $ka = \frac{3\pi}{2}$ (- : valeur analytique, -, $h_v = 0.4, \dots, h_v = 0.2$, - - : $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

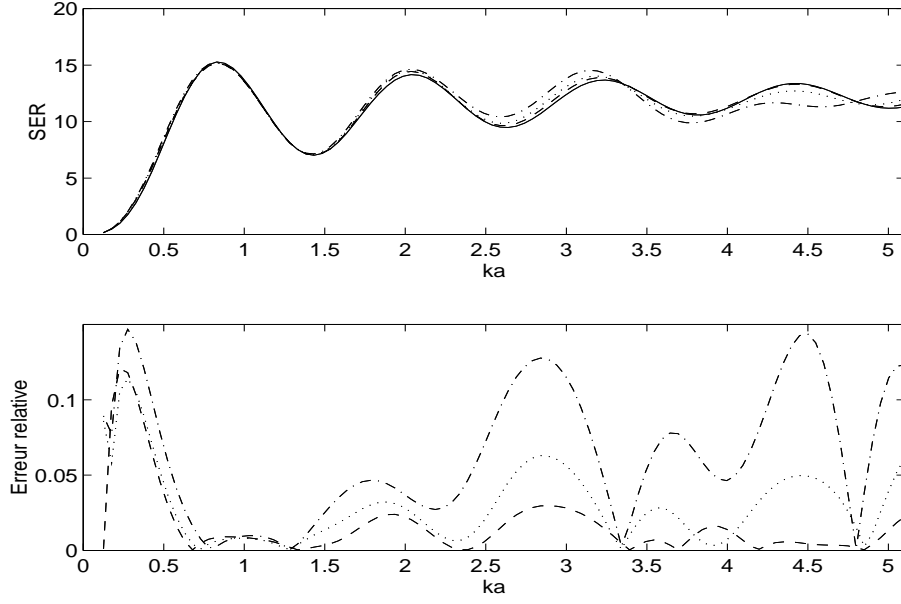


FIG. 5. SER_{df1} en fonction de ka pour $\theta = 0$ (- : valeur analytique, -. : $h_v = 0.4$, ... : $h_v = 0.2$, - : $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

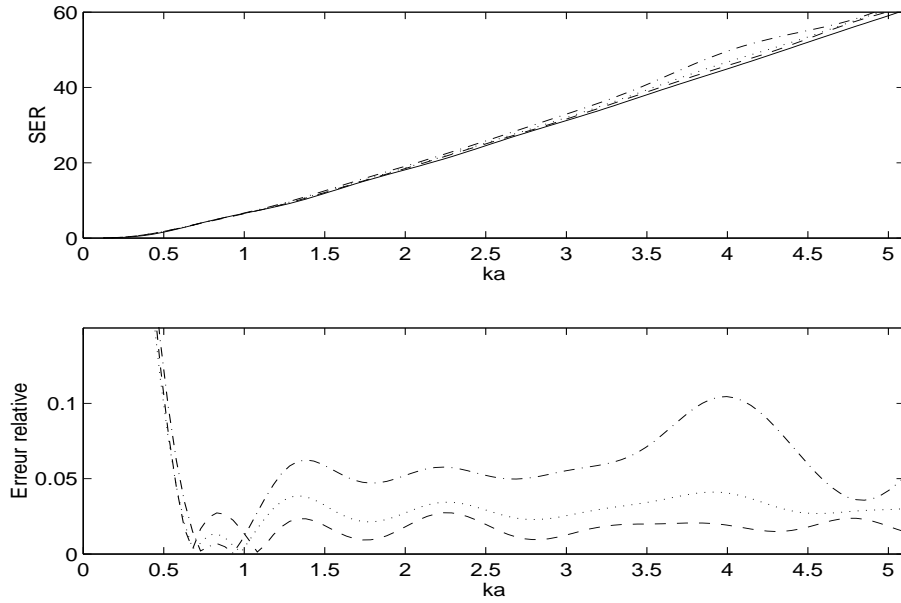


FIG. 6. SER_{df1} en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (- : valeur analytique, -. : $h_v = 0.4$, ... : $h_v = 0.2$, - : $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

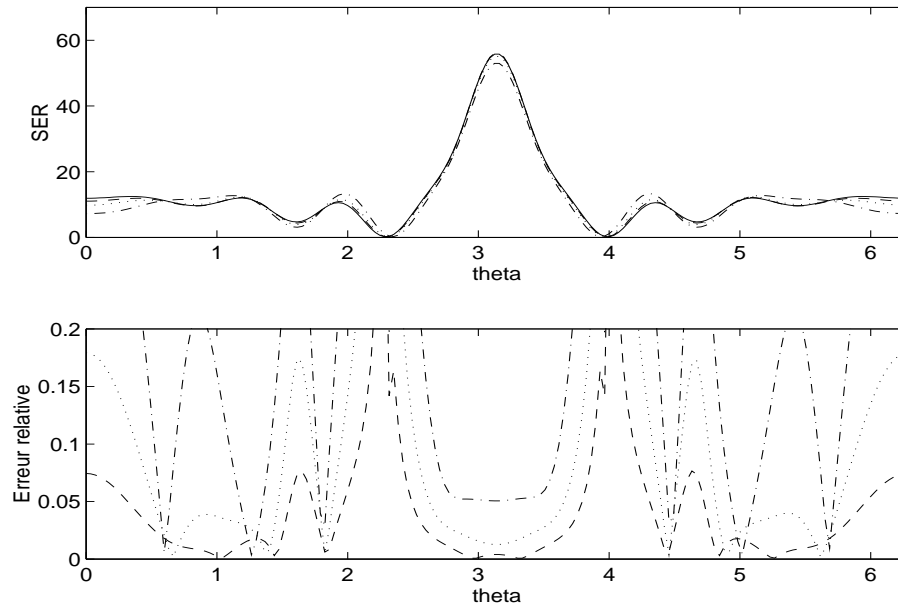


FIG. 7. SER_{df1} en fonction de l'angle d'observation pour $ka = \frac{3\pi}{2}$ (- : valeur analytique, -, $h_v = 0.4, \dots, h_v = 0.2$, - - $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

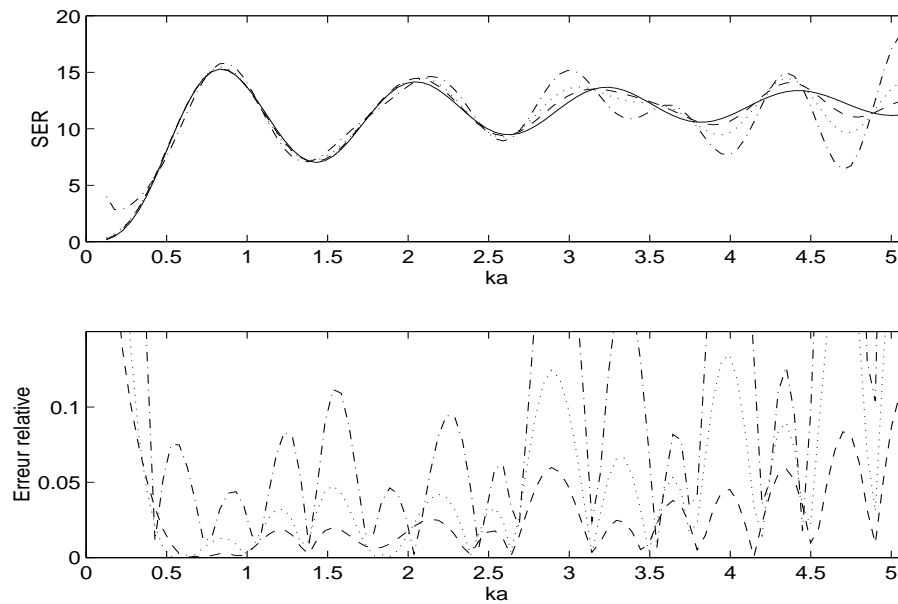


FIG. 8. SER_{df2} en fonction de ka pour $\theta = 0$ (- : valeur analytique, -, $h_v = 0.4, \dots, h_v = 0.2$, - - $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

Des résultats comparables (7,8 et 9) sont obtenus en utilisant la méthode df2.

Conclusion: dans tous les cas testés, il s'avère que la SER calculée par les méthodes df1 ou df2 converge bien vers la valeur analytique quand le pas h_v tend vers zéro. En revanche, il est difficile au vu des tests effectués de préférer une des deux méthodes. C'est pourquoi dans les paragraphes suivants, seule la méthode df1 sera utilisée. Nous allons maintenant regarder l'influence de la discrétisation de l'obstacle et en particulier l'effet du rapport h_s/h_v .

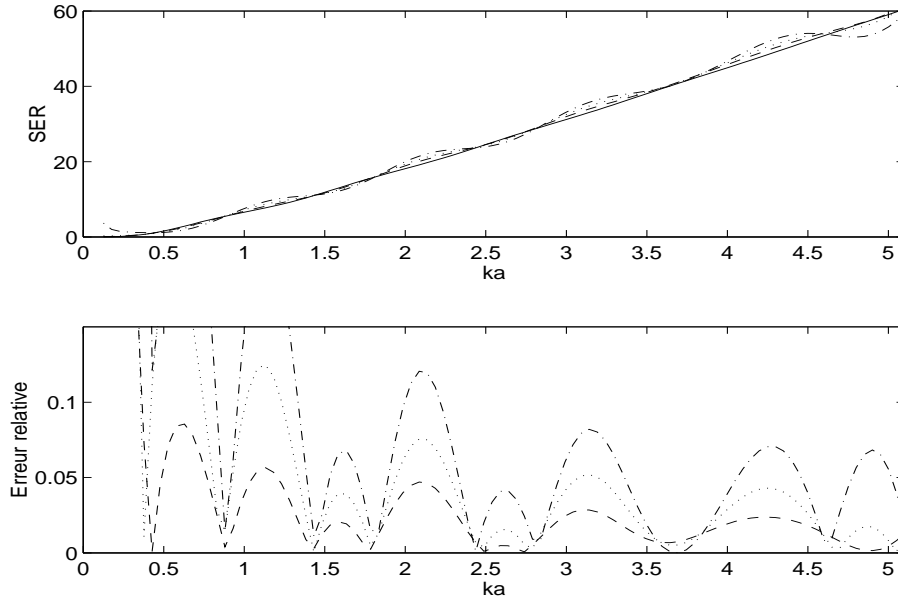


FIG. 9. SER_{df2} en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (- : valeur analytique, -.- : $h_v = 0.4$, ... : $h_v = 0.2$, -.- : $h_v = 0.1$) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

2.2 Discrétisation de l'obstacle

La prise en compte de la contrainte à la limite de l'obstacle fait apparaître une matrice “dite matrice de frontière” (cf annexe). Celle-ci couple le champ électrique avec le multiplicateur de Lagrange c'est-à-dire au courant. Elle nécessite de calculer l'intersection entre les deux maillages volumique et surfacique. De plus, les éléments non nuls de cette matrice résultent d'une intégration curviligne le long de la frontière de l'obstacle.

Dans un premier temps, la frontière du disque est discrétisée en arc de cercle de longueur h_s . Le courant est alors cherché constant sur chaque arc de cercle. Le pas h_v est fixé à 0.2 c'est-à-dire que le nombre de points par longueur d'onde λ_{min} vaut 20). La modification de la longueur des arcs (10) entraîne peu d'évolution des valeurs de la SER à condition toutefois que le rapport $\frac{h_s}{h_v}$ ne devienne pas trop petit. La frontière du disque est ensuite approchée par un polygone dont les côtés ont tous la même longueur égale à h_s . Le courant est alors constant sur ces segments. Les résultats obtenus (11) et (12) sont identiques aux précédents. On voit peu de modification des courbes d'erreurs lorsque le rapport h_s/h_v varie. On note aussi que l'approximation en polygone et celle par arc de cercle de la frontière donnent à peu près les mêmes résultats.

Conclusion On remarque que la discrétisation de l'obstacle influe peu sur le calcul de la SER à condition toutefois que le rapport h_s/h_v reste au voisinage de un.

Il est maintenant intéressant de comparer les résultats obtenus par les domaines fictifs avec ceux obtenus par une méthode classique de différences finies. Le paragraphe suivant va réaliser cette comparaison sur quelques cas canoniques : disque, demi-arc de cercle.

3 Comparaison avec les autres méthodes

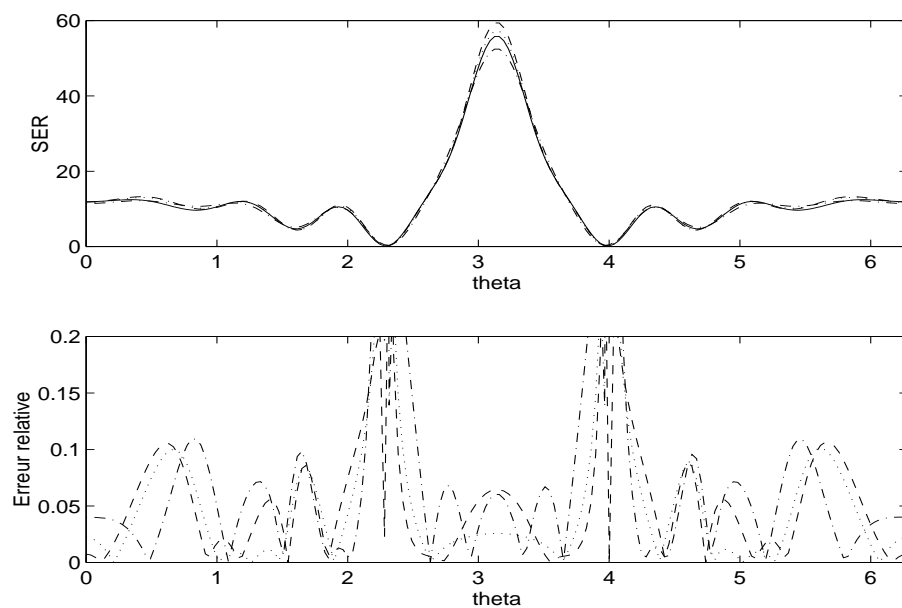


FIG. 10. *SER en fonction de θ pour $ka = \frac{3\pi}{2}$ (La frontière du disque est approchée par des arcs de cercle de longueur h_s) (- . . : $h_s = \pi h_v$, ... : $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, - - : $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$)*

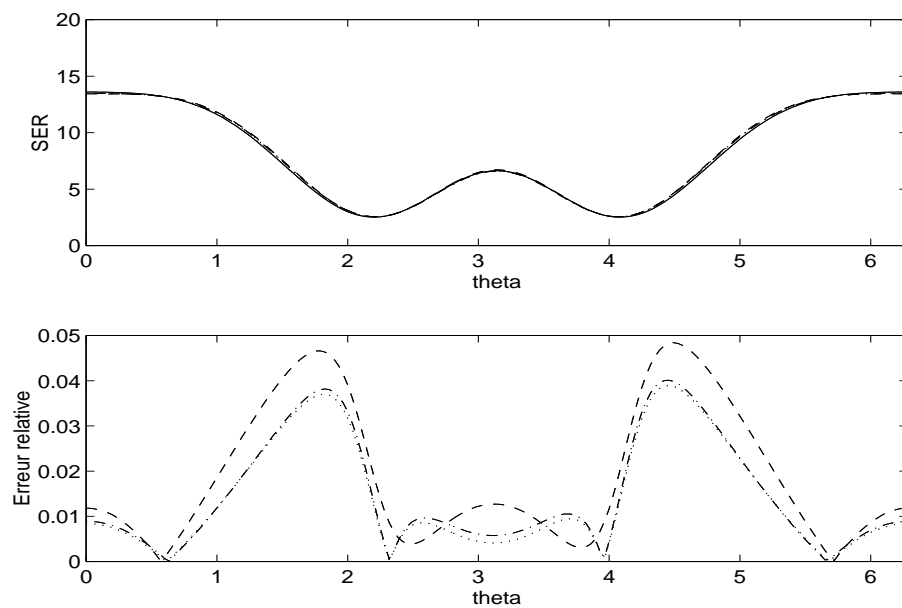


FIG. 11. *SER en fonction de θ pour $ka = 1$ (- . . : la frontière est approchée par des arcs de cercle de longueur $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, ... : la frontière est approchée par des segments de longueur $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, - - : la frontière est approchée par des segments $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$)*

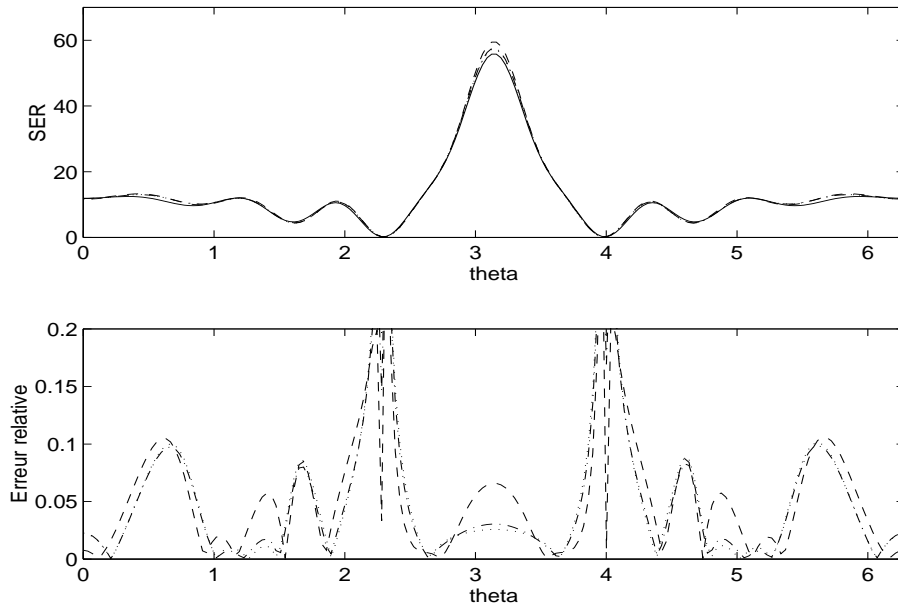


FIG. 12. SER en fonction de θ pour $ka = 1$ (- . : la frontière est approchée par des arcs de cercle de longueur $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, ... : la frontière est approchée par des segments de longueur $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, - - : la frontière est approchée par des segments $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$)

La façon la plus simple de traiter les conducteurs parfaits dans la méthode des différences finies est d'approcher la frontière de l'obstacle par une courbe en escalier qui coïncide avec le maillage. Il est alors facile d'imposer la condition de champ électrique tangent égal à zéro en annulant certaines composantes du champ sur cette courbe en escalier. Par abus de langage, cette méthode dans la suite du rapport sera notée méthode de différences finies. Afin de comparer cette méthode à celle des domaines fictifs, on définit

- SER_{fdd} : la SER calculée par la transformation champ proche-champ lointain(1) où le champ électromagnétique tangent à la surface virtuelle C_a est obtenu par la méthode de différences finies et où la frontière de l'obstacle est approchée en marches d'escalier.

Le cas canonique du disque est d'abord analysé.

Remarque: en dimension deux, la SER a la dimension d'une longueur. Pour la représenter, nous allons la normaliser à une longueur caractéristique de l'objet et la noter RCS .

3.1 Disque

Le disque est éclairé par une onde dont la dépendance temporelle est donnée par la figure (2). Le pas h_v est fixé égal à 0.4 soit $\frac{\lambda_{min}}{h_v} = 10$. Cette fraction sera notée par la suite nw . Pour la méthode des domaines fictifs, la frontière du disque est approchée par un polygone de côté $h_s = \frac{3}{2}h_v$. Pour la méthode des différences finies, le disque a un rayon de 10 mailles.

La figure (13) donne les valeurs du champ électromagnétique le long du contour C_a (cf fig 1) pour une valeurs de ka . On notera une bonne concordance sur les parties réelles du champ alors qu'on peut voir un écart entre les courbes pour les parties imaginaires surtout dans

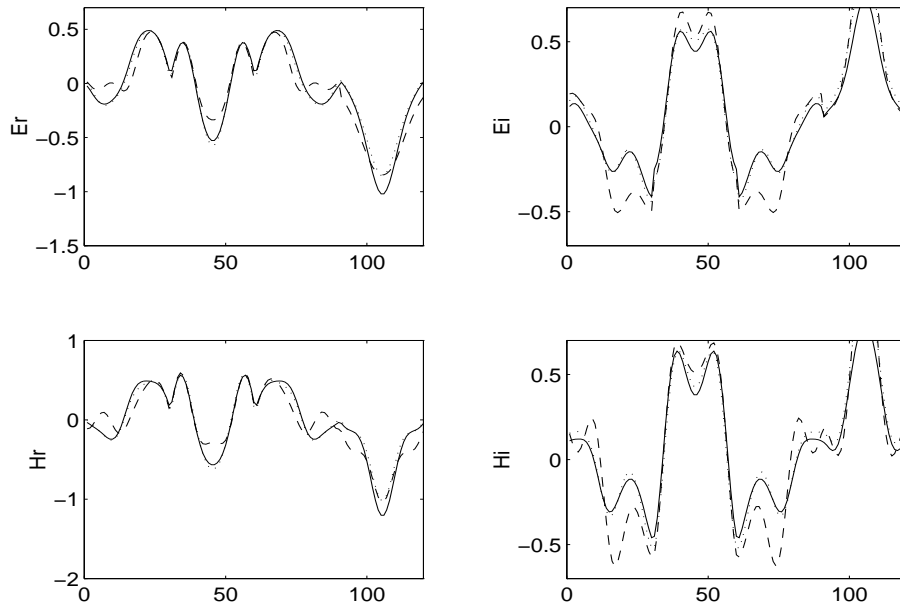


FIG. 13. Champ électromagnétique le long de C_a pour $ka = \frac{3\pi}{2}$ (- :exact, ... :df1, - -:ftd)

la zone d'ombre. De plus, lorsque le produit ka augmente, les valeurs du champ obtenu par différences finies s'écartent de la valeur analytique. Ce qui n'est pas le cas lorsque le champ proche est calculé par les domaines fictifs à l'exception faite de la zone d'ombre.

Pour une discrétisation en espace fixée, la valeur de la SER obtenue à l'aide des domaines fictifs est plus proche des valeurs analytiques (cf figures 14, 15, 16 et 17). Sur ces figures, est aussi dessinée la valeur de la SER_{ftd} lorsque h_v vaut 0.2 soit 20 points par longueur d'onde λ_{min} et que le disque a un rayon de 20 mailles. On notera que cette courbe se rapproche des valeurs obtenues par la méthode des domaines fictifs mais pour une discrétisation de 10 points par longueur d'onde λ_{min} .

Remarque: nous avons été surpris d'obtenir des erreurs relatives assez importantes (5% à 10 %) pour une discrétisation de 20 points par λ_{min} lorsque on utilise soit la méthode des différences finies soit la méthode des domaines fictifs.

Conclusion Sur le cas du disque, la méthode des domaines fictifs permet de calculer de manière précise la SER. De plus, les résultats obtenus sont plus proches des valeurs analytiques que ceux obtenus par une méthode de différences finies. Ceci est dû au fait que la méthode des domaines fictifs permet de mieux prendre en compte la condition à la limite et de calculer de manière plus précise le champ près de l'obstacle.

Les corps diffractants testés ont été jusqu'à présent des corps réguliers sans singularité et convexes. En particulier, ils ne présentent pas de cavité où le champ électromagnétique pourrait se piéger. C'est pourquoi il nous est apparu intéressant de calculer la SER par les domaines fictifs sur des corps présentant quelques singularités.

Remarque Nous avons aussi comparé les résultats obtenus par la méthode des domaines fictifs avec ceux obtenus par une méthode des éléments finis de frontière ([1], [3] [11]). Il s'avère toujours que les valeurs obtenues à l'aide de la méthode des éléments finis de frontière sont toujours de précision supérieure. C'est pourquoi pour les cas suivants où des expressions analytiques ne peuvent être trouvées, cette méthode donnera les valeurs de référence.

Dans les paragraphes suivants, nous allons étudier le cas canonique du demi-arc de cercle

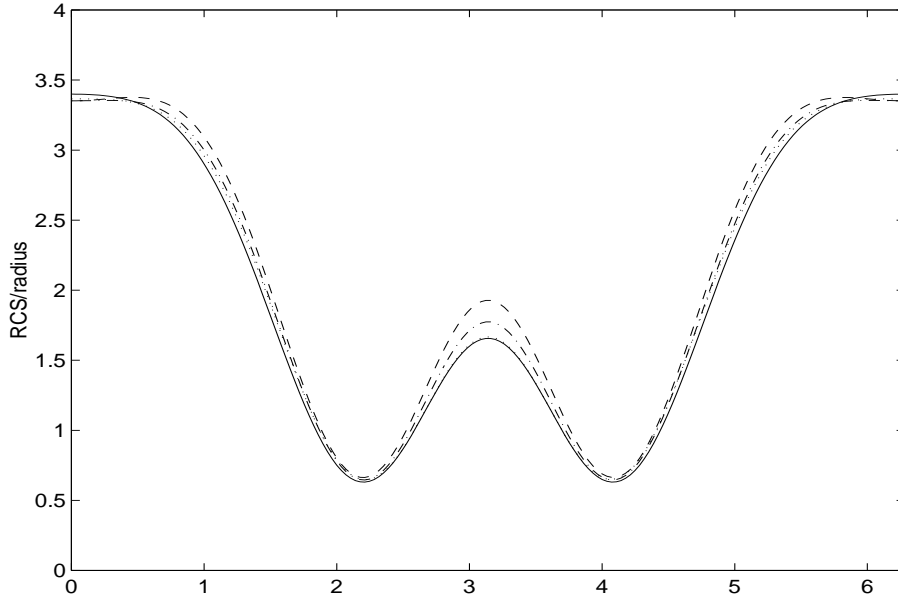


FIG. 14. *SER en fonction de θ pour $ka = 1$ (- :exact, ... :df1 nw = 10, - - : fddd nw = 10 , - . :fddd nw = 20)*

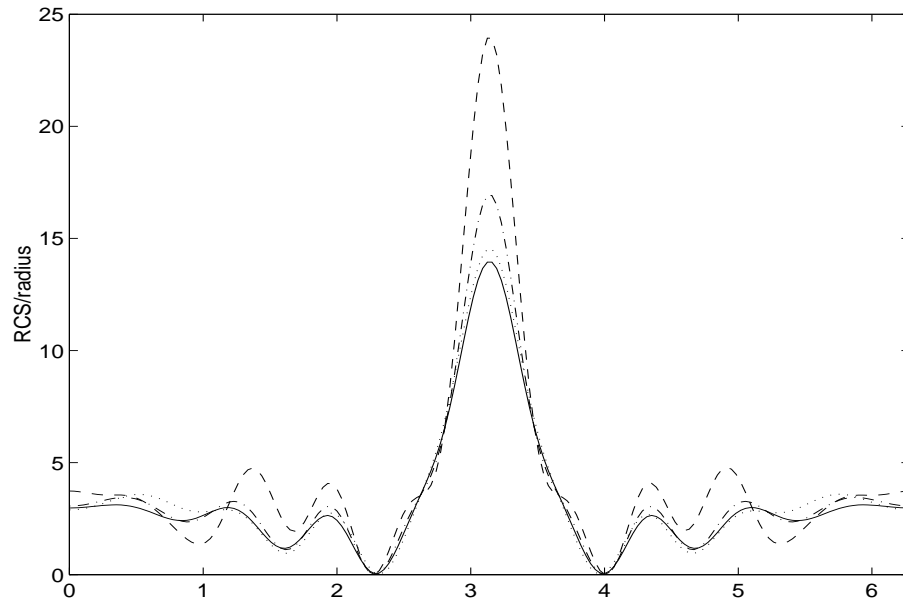


FIG. 15. *SER en fonction de θ pour $ka = \frac{3\pi}{2}$ (- :exact, ... :df1 nw = 10, - - : fddd nw = 10 , - . :fddd nw = 20)*

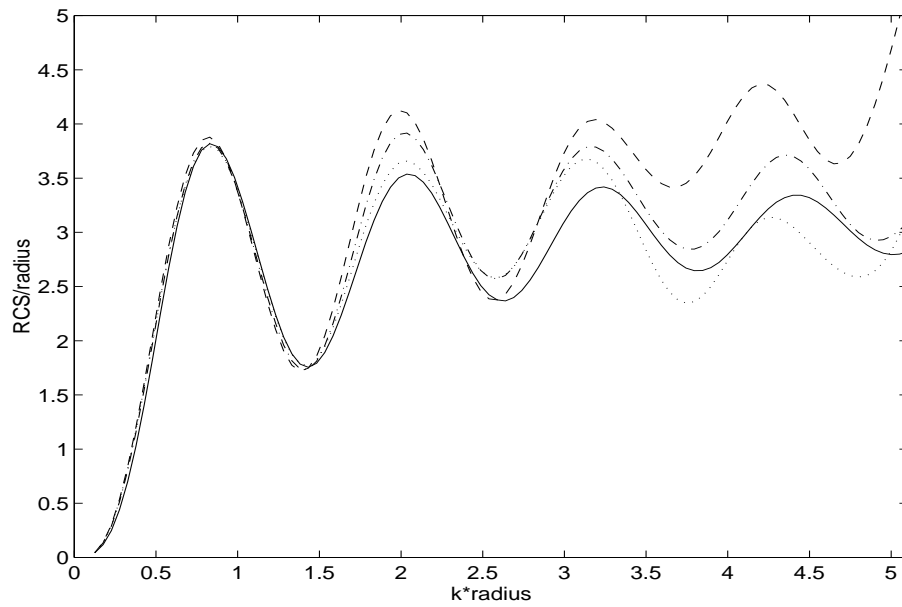


FIG. 16. *SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ (- :exact, ... :df1 nw = 10, - - : fdtw nw = 10, - . :fdtw nw = 20)*

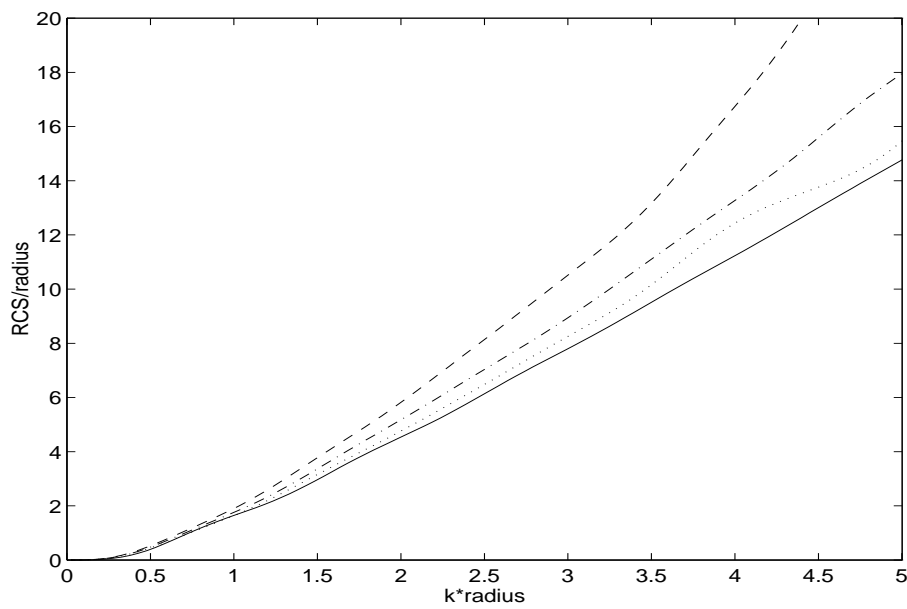


FIG. 17. *SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (- :exact, ... :df1 nw = 10, - - : fdtw nw = 10, - . :fdtw nw = 20)*

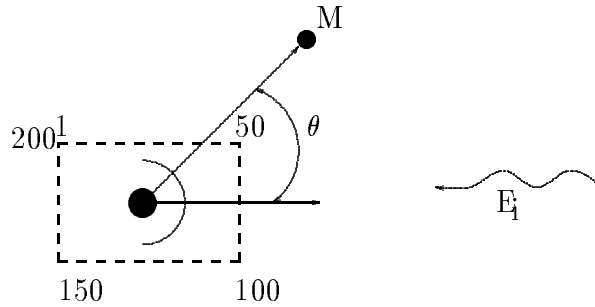


FIG. 18. *Configuration de la gèomètrie*

(cf fig 18 et 25). Cet exemple présente deux singularités aux extrémités. De plus, le champ électromagnétique peut être piégé dans la demi-cavité.

3.2 Demi-disque concave

Le demi disque concave présente sa concavité à l'onde incidente (18). Il est illuminé par une onde dont la dépendance temporelle est donnée par la figure (2). Le pas h_v est fixé égal à 0.1 soit $\frac{\lambda_{min}}{h_v} = 10$. Pour la méthode des domaines fictifs, la frontière du demi-disque est approchée par un polygone de coté $h_s = \frac{3}{2}h_v$. Pour la méthode des différences finies, le demi-disque a un rayon de 10 mailles. On note a le rayon du demi-disque.

Nous rappelons que la référence est maintenant obtenue par une méthode des éléments finis de frontière avec 40 degrés de liberté.

Nous avons remarqué que pour obtenir la convergence des résultats de la SER_{df1} ou SER_{fddd} , il est nécessaire de calculer la transformée de Fourier sur un intervalle de temps plus important. Ceci est essentiellement dû au fait que l'énergie électromagnétique est piégée dans la cavité (cf fig 19 et 20).

La valeur de la SER_{df1} est donnée par les figures (21) et (22) lorsque l'angle d'observation varie. On remarque que cette valeur reste proche de la valeur de référence. L'erreur relative est de l'ordre de 10 %. On note une légère dégradation lorsque le produit ka augmente du à la diminution du nombre de points par longueur d'onde λ_{min} . Sont données sur ces courbes les valeurs de la SER_{fddd} pour deux pas de discrétisation. On note que l'erreur relative pour la SER_{fddd} est plus élevée d'un facteur environ 2 ou 3 par rapport à la valeur de la SER_{df1} lorsque le rapport h_v/λ_{min} est identique pour les deux méthodes. En revanche, l'erreur relative de la SER_{fddd} obtenue pour 20 points par longueur d'onde λ_{min} se rapproche des valeurs obtenues par la méthode des domaines fictifs pour un rapport h_v/λ_{min} égal à 10. Nous avons ensuite fait varier le rapport ka en gardant l'angle d'observation fixé (23 et 24). Les résultats sont identiques aux précédents.

3.3 Demi-disque convexe

Le demi disque convexe présente sa cavité à l'onde incidente (cf fig 25). Pour réaliser les tests numériques, on utilise les mêmes conditions que précédemment.

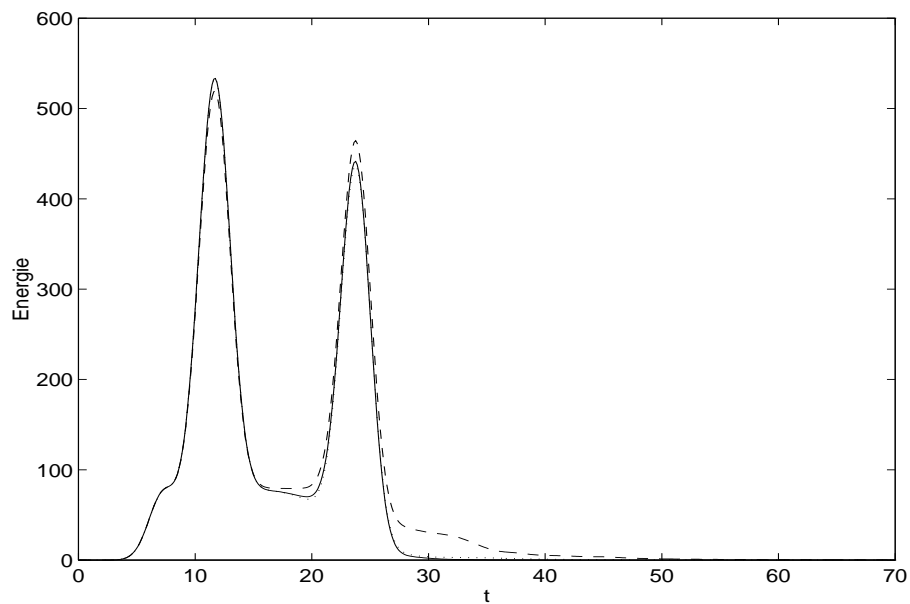


FIG. 19. *Energie électromagnétique dans le domaine de calcul en fonction du temps (-:disque, ... :demi-disque concave, - -: demidisque convexe)*

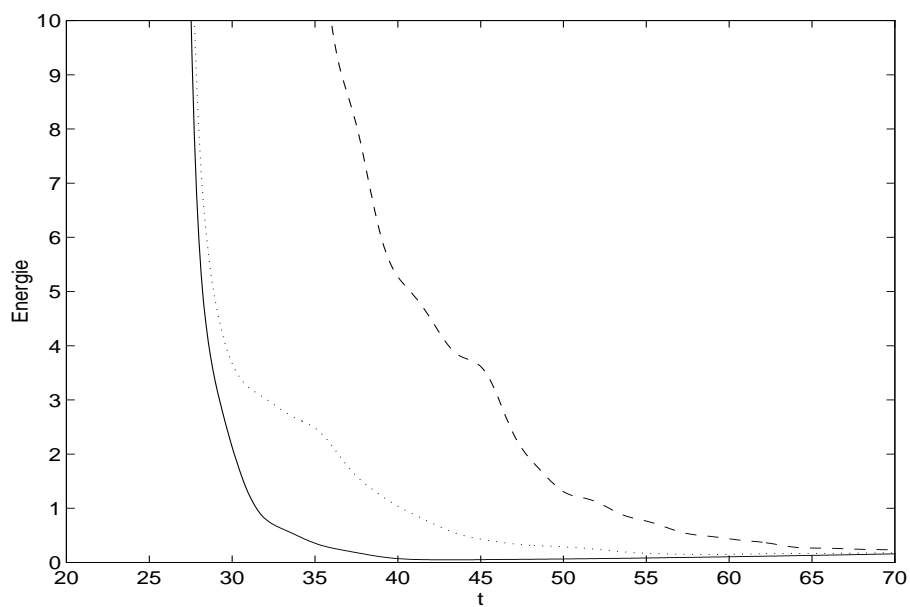


FIG. 20. *Zoom de la figure précédente*

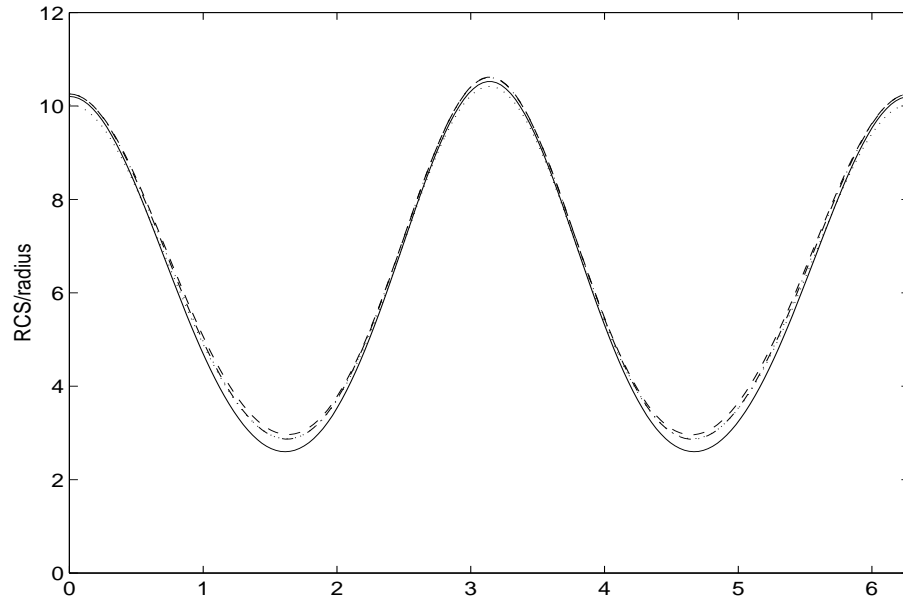


FIG. 21. *SER en fonction de θ pour $ka = 1$ (-:référence, ...:df1, - -: fdd)*

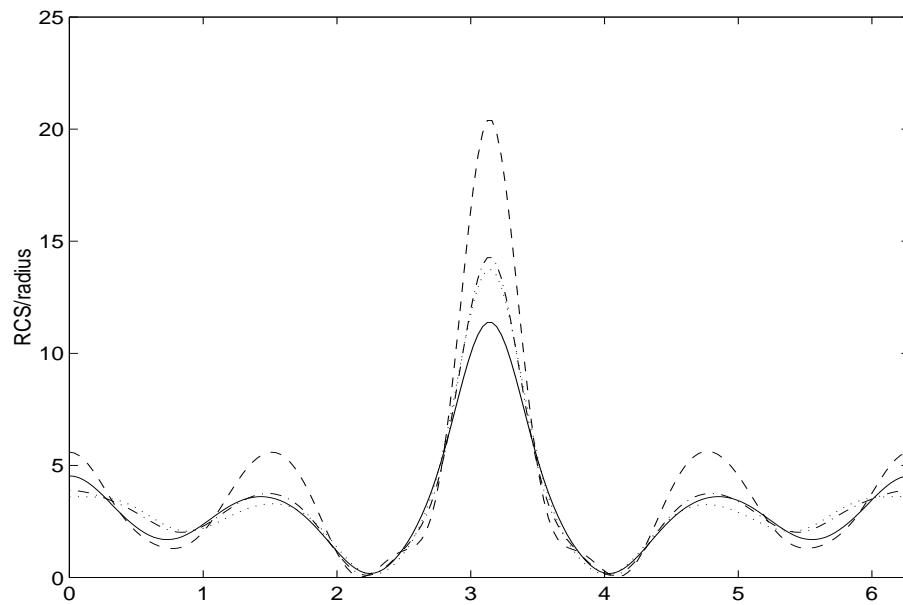


FIG. 22. *SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (-.:exact, ...:df1 $h_s = \frac{\pi h_a}{2}$, - -: fdd $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$)*

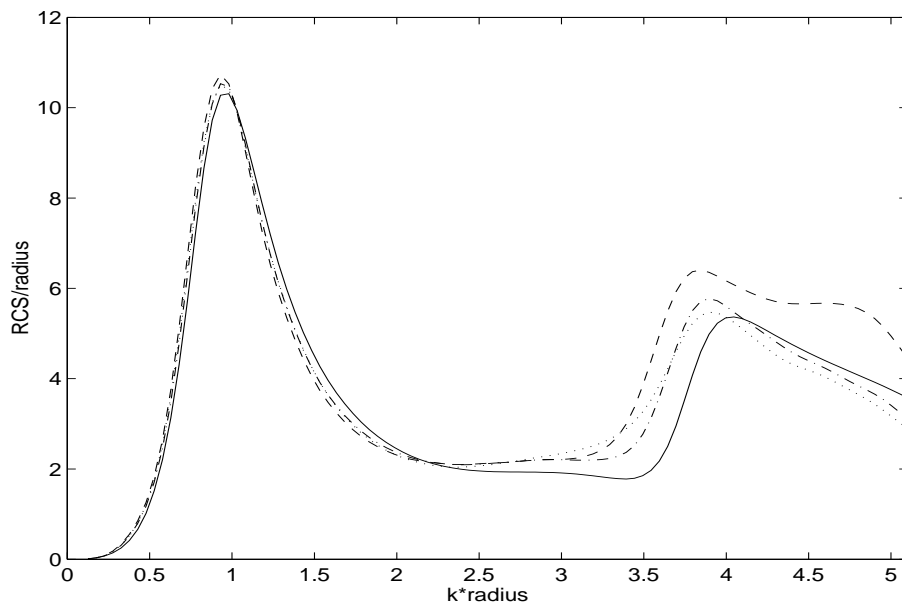


FIG. 23. *SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (- . :exact, ... :df1 $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, - - : fdd $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$)*

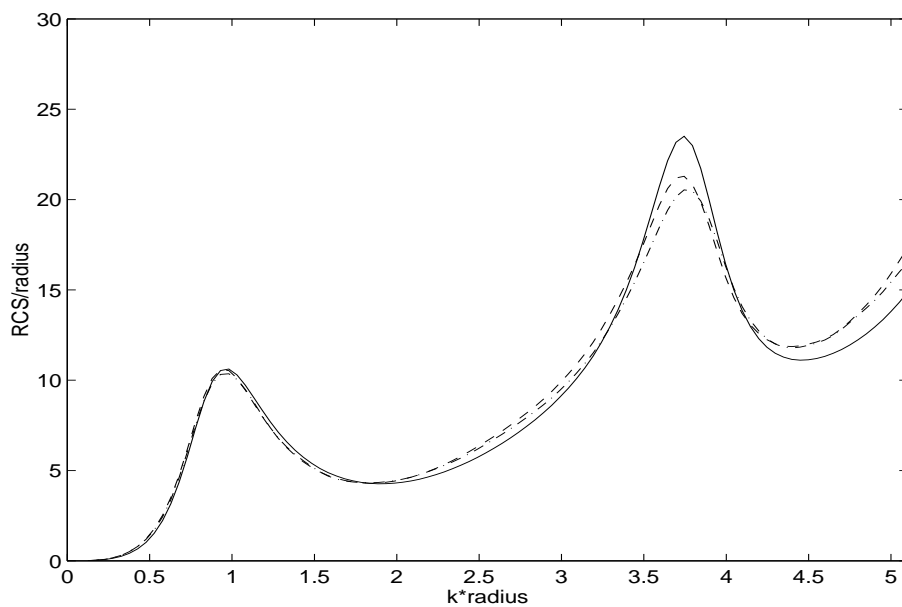


FIG. 24. *SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (- . :exact, ... :df1 $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$, - - : fdd $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$)*

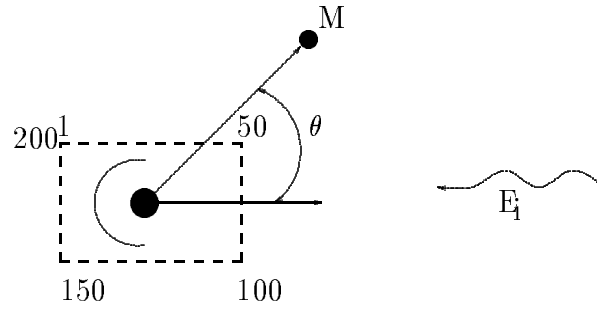
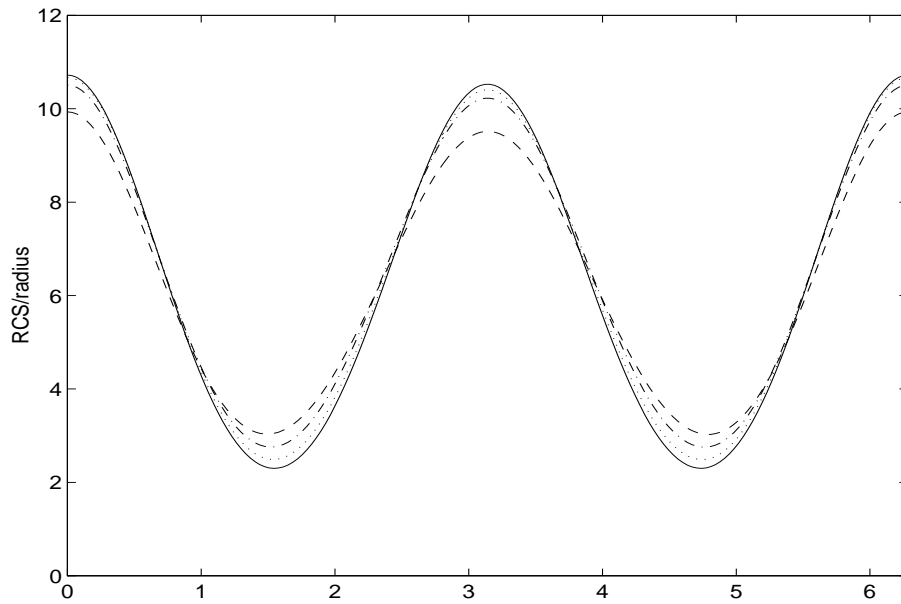


FIG. 25. Configuration de la géométrie

FIG. 26. SER en fonction de θ pour $ka = 1$ (- : exact, ... : df1 nw = 10, - - : fddd nw = 10 , - . : fddd nw = 20)

Nous rappelons que la référence est maintenant obtenue par une méthode d'éléments finis de frontière avec 40 degrés de liberté. La méthode des domaines fictifs fournit les mêmes résultats (26) et (27) dans cette configuration (25) que pour la précédente (18). En revanche, il semble que pour cette configuration, l'erreur relative entre la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis de frontière augmente (27, 28). Elle reste toujours supérieure à l'erreur obtenue par la méthode des domaines fictifs.

Conclusion: la méthode des domaines fictifs permet de calculer de manière assez précise la SER même pour des objets présentant des cavités. De plus, elle fournit des résultats dont la précision est supérieure à ceux obtenus par une méthode de différences finies. L'erreur relative reste faible de l'ordre de 10% (resp. 5%) pour un nombre de points par longueur d'onde égal à 10 (resp. 20) .

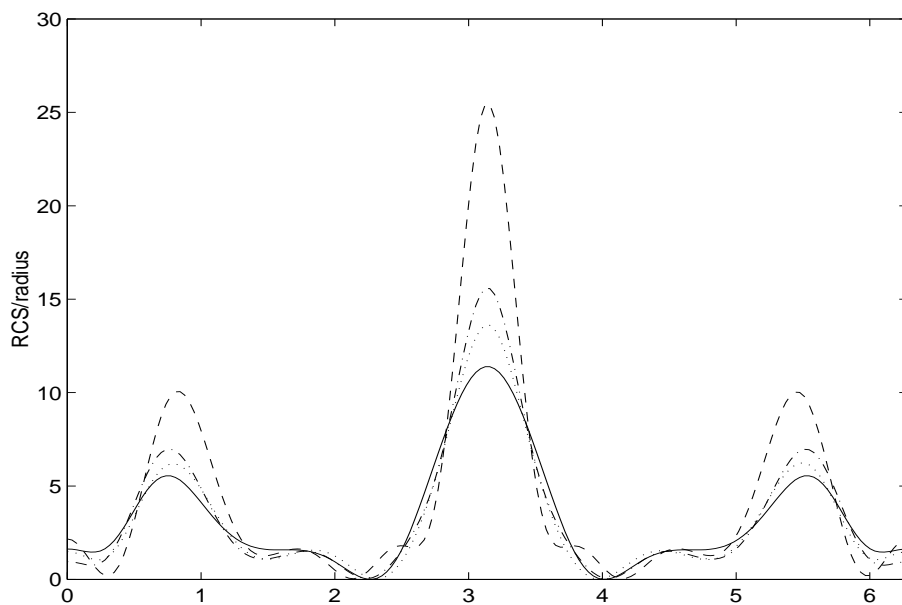


FIG. 27. *SER en fonction de θ pour $ka = \frac{3\pi}{2}$ (- :exact, ... :df1 nw = 10, - - : fddd nw = 10 , - . :fddd nw = 20)*

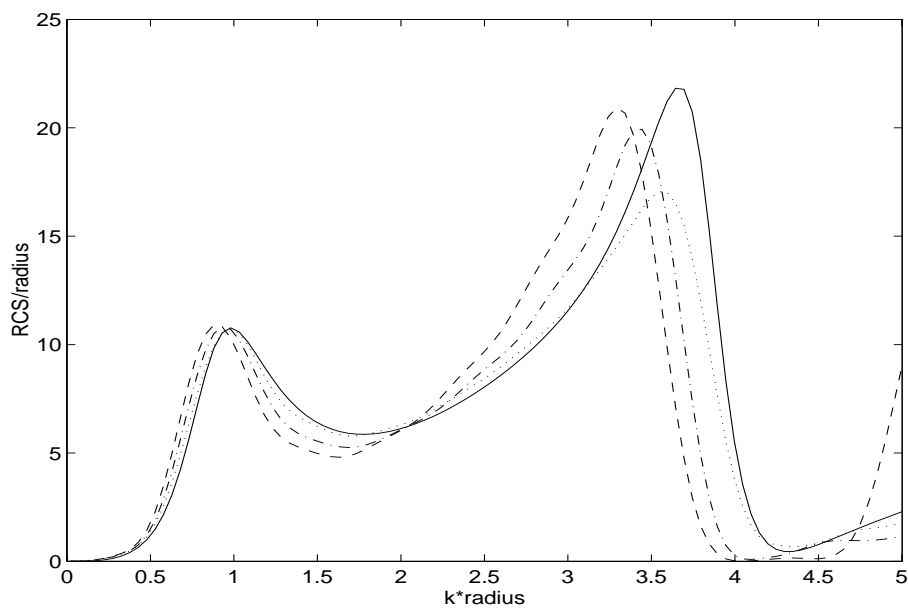


FIG. 28. *SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ (- :exact, ... :df1 nw = 10, - - : fddd nw = 10 , - . :fddd nw = 20)*

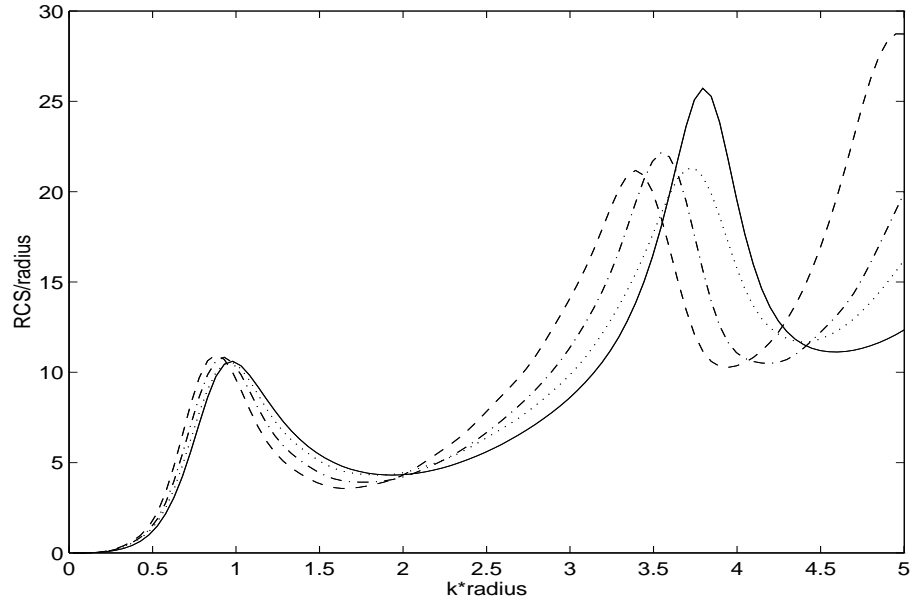


FIG. 29. *SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ (- :exact, ... :df1 $nw = 10$, - - : ftd $nw = 10$, - . : ftd $nw = 20$)*

4 Conclusion

Le tableau suivant permet de présenter les résultats obtenus. Il est important de remarquer qu'à discrétisation fixée c'est-à-dire lorsque le nombre de points par longueur est déterminé, la méthode des domaines fictifs fournit toujours des résultats plus précis que la méthode des différences finies avec approximation en marches d'escalier. Par conséquent, elle va permettre de minimiser la place mémoire et le temps de calcul et ainsi permettre de traiter des cas plus réalistes de manière assez précise.

		Disque	Demidisque convexe	Demidisque concave
méthode	nw	erreur relative moyenne	erreur relative moyenne	erreur relative moyenne
fictif	10	10%	12%	15%
fictif	20	5%	5%	6%
fdtd	10	20%	30%	30%
fdtd	20	10%	12%	15%
fdtd	40	5%	5%	5%

Part III

Ordre élevé et domaines fictifs

5 Position du problème

Une des limitations du schéma de Yee [14] réside dans les phénomènes de dispersion. Schématiquement, le caractère dispersif de tout schéma numérique est lié à la diminution de la vitesse de propagation avec la fréquence, ce qui entraîne des décalages sur les temps d'arrivée des paquets d'ondes autour de chaque fréquence composant l'onde [5]. Or ces décalages s'amplifient avec la distance parcourue. Plus qualitativement on montre que pour obtenir une précision donnée, le pas de discrétisation en espace h nécessaire doit satisfaire une relation

$$(5) \quad (h^k + \alpha h^2) < \epsilon$$

où α est égal à $\frac{c\Delta t}{h}$ et où k est l'ordre du schéma utilisé. Ainsi lorsque l'on augmente le domaine de propagation, le nombre de mailles nécessaire n'augmente pas linéairement avec la taille mais comme une fonction où l'ordre du schéma intervient de façon déterminante. Les schémas d'ordre élevé apparaissent ainsi d'autant plus intéressants que le domaine de propagation est grand. Plusieurs auteurs ont proposé des schémas d'ordre élevé pour les équations de propagation tout d'abord pour l'équation des ondes ([8],[4],[12],[13]) puis plus récemment pour les équations de Maxwell ([9],[2]). L'analyse de ces schémas montrent la diminution notable de la dispersion obtenue grâce à l'ordre élevé. Toutefois, des difficultés demeurent qui sont liées à la prise en compte de la condition à la limite. Par exemple la condition de conducteur parfait même pour un objet dont la frontière est localisée sur le maillage, est délicate à mettre en œuvre (l'utilisation du principe des images n'est pas immédiate pour les coins). Dans ce travail, nous proposons une formulation du problème de diffraction d'une onde par un corps parfaitement conducteur à l'aide de la méthode des domaines fictifs qui permet de construire un schéma numérique coïncidant avec un schéma d'ordre quatre dans l'espace libre. Comme nous ne savons pas démontrer la convergence de ce schéma numérique, nous présenterons des expériences numériques qui tendent à la corroborer.

6 Formulation

Nous nous intéressons à la diffraction d'une onde par un corps parfaitement conducteur Ω_{obs} plongé dans un domaine Ω . La diffraction de l'onde électromagnétique est décrite par les équations de Maxwell suivantes

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 e}{dt^2} + rot\,rot\,e = s \quad \text{dans } \Omega - \Omega_{obs} \\ (e \times n) \times n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{obs} = \partial\Omega_{obs} \end{array} \right.$$

avec des conditions initiales appropriées. La méthode des domaines fictifs repose sur la formulation variationnelle suivante:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\tilde{E}(t), \lambda(t)) \in H(\text{rot}, \Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_{obs}) \text{ tels que} \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{\Omega} \tilde{E} \cdot F \, dx \right) + a(\tilde{E}, F) + b(F, \lambda) = 0 \quad \forall F \in H(\text{rot}) \\ b(\tilde{E}, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in M \end{array} \right.$$

avec $M = H^{\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma_{obs})$ en dimension trois et $M = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{obs})$ en dimension deux et où $a(E, F) = \int_{\Omega} \text{rot}(E) \text{rot}(F) \, dx$ et $b(E, \mu) = \int_{\Gamma_{obs}} ((F \times n) \times n) \cdot \lambda \, d\gamma$.

Les intégrales sur Γ_{obs} dans la formule précédente sont à prendre au sens des crochets de dualité.

La solution du problème (7) est démontrée égale à la restriction de e à $\Omega - \Omega_{obs}$ tandis que λ n'est autre que la trace sur Γ_{obs} de $\text{rot}E \times n$, c'est-à-dire le courant surfacique à une dérivée près. Dans ([6],[7]), nous avons construit un schéma numérique à l'aide des éléments finis de Nédélec de plus bas degré pour évaluer \tilde{E} et des éléments finis de type P0 ou P1 pour le courant surfacique λ . Ce qui conduit au problème semi-discret suivant

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } E_h(t) \in V_h, \lambda_h(t) \in W_h \text{ tels que} \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{\Omega} E_h \cdot F_h \, dx \right) + a(E_h, F_h) + \int_{\Gamma_{obs}} ((F_h \times n) \times n) \cdot \lambda_h \, d\gamma = 0 \quad \forall F_h \in V_h \\ \int_{\Gamma_{obs}} ((E_h \times n) \times n) \cdot \mu_h \, d\gamma = 0 \quad \forall \mu_h \in W_h \end{array} \right.$$

La discrétisation en temps est alors réalisée à l'aide d'un schéma aux différences finies d'ordre deux. On obtient

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_h^{n+1} - 2E_h^n + E_h^{n-1} = -\Delta t^2 M_h^{-1} K_h E_h^n + \Delta t^2 M_h^{-1} B_h \Lambda_h^n \quad (1) \\ B_h^t E_h^n = 0, \quad (2) \end{array} \right.$$

où M_h est la matrice de masse.

K_h la matrice de rigidité définie par

$$(10) \quad K_h(l, k) = \int_C \text{rot}(N_l) \text{rot}(N_k) \, dx$$

où N_k sont les fonctions de base des éléments finis de Nédélec construit sur une grille régulière et est associée à la forme linéaire a . La matrice B dite matrice de frontière est associée à la forme bilinéaire b et est donnée par:

$$(11) \quad B_h = b(N_i, \eta_j)$$

Sur un maillage régulier d'éléments finis de Nédélec de pas égaux notés h_v , on peut séparer les composantes du champ électrique pour chaque pas de temps

$$(12) \quad E(n \times \Delta t) = \sum_{i,j} E_{i+\frac{1}{2},j}^n \vec{x} + \sum_{i,j} E_{i,j+\frac{1}{2}}^n \vec{y}$$

où $E_{i+\frac{1}{2},j}^n$ est la valeur de la composante x au point $((i + \frac{1}{2}) h_v; j h_v)$ et $E_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ est défini de manière similaire. On peut alors démontrer que le système (9) sans obstacle est équivalent à un schéma de type différences finies (Schéma de Yee [14]) lorsque les éléments finis de Nédélec de plus bas degré sont utilisés et après condensation de masse. Plus précisément, le schéma est équivalent à substituer aux opérateurs différentiels du premier ordre des différences d'opérateurs de décalages. Par exemple, l'approximation A_h de l'opérateur de dérivé première $\frac{\partial u}{\partial x}$ est telle que

$$(13) \quad A_h u(x, y) = \frac{\left(u(x_i + \frac{h}{2}, j) - u(x_i - \frac{h}{2}, j) \right)}{h}$$

Les schémas d'ordre élevés de type Sei ([12],[13]) s'appuient sur le même genre d'approximation. On écrit

$$(14) \quad A_h u(x, y) = \sum_{l=1}^L \frac{\alpha_l}{(2l-1)h} \left(u(x_i + \frac{(2l-1)h}{2}, j) - u(x_i - \frac{(2l-1)h}{2}, j) \right)$$

avec

$$(15) \quad \alpha_l = (-1)^{l+1} \frac{\prod_{m \neq l} (2m-1)^2}{\left| \prod_{m \neq l} (2m-1)^2 - (2l-1)^2 \right|}$$

Pour faire le lien avec l'approche des domaines fictifs, on propose la démarche suivante. On transforme le problème en un problème approché qui s'obtient en modifiant la forme bilinéaire $a_h = \int_{\Omega} \text{rot}(E_h) \text{rot}(F_h) dx$ en $\int_{\Omega} \text{rot}_h(E_h) \text{rot}_h(F_h) dx$ où rot_h est obtenu en appliquant à l'opérateur rot la substitution des opérateurs de dérivés premières en leurs équivalents discrets comme indiqué plus haut. Ainsi seule la matrice de rigidité est modifiée dans cette approche. En appliquant la condensation de masse (formule de quadrature sur chaque pavé du maillage), il est facile de montrer que les propriétés du schéma numérique sont celles du schéma initial d'ordre élevé en absence d'obstacle.

Pour conclure la présentation de la méthode, notons que si on peut espérer améliorer ainsi la dispersion du schéma dans les parties homogènes du domaines de calcul, il n'en est pas de même au voisinage de l'obstacle. En effet, pour tirer avantage de l'approximation plus précise du schéma, il est nécessaire d'utiliser la régularité au moins localement de la solution. Or l'obstacle induit un saut à travers la frontière sur la composante normale du rotationnel du champ électrique E (celle-ci est nulle à l'intérieur et non nulle à l'extérieur de l'obstacle). Il y a donc discontinuité au travers de Γ_{obs} de certaines dérivées de la solution. La régularité n'est pas vérifiée en ces points et l'utilisation d'opérateurs aux différences finies précis est inadéquate sur l'obstacle. Toutefois, nous allons montrer sur des exemples numériques que les résultats ne sont pas dégradés et que la réflexion sur les conducteurs parfaits est pratiquement aussi bien prise en compte que pour le schéma d'ordre deux initial.

6.1 Remarques

Avant tout, nous rappelons que lorsque $L = 1$ dans (14), le système (9) en absence d'obstacle est équivalent à un schéma classique de Yee. Le schéma est alors noté schéma 2-2.

Il est important de remarquer que le schéma proposé est stable sous les mêmes conditions qu'en absence d'obstacle quelque soit les valeurs de L dans (14). Ceci peut être démontré en utilisant des considérations énergétiques. La condition de stabilité est donc la même que celle du schéma aux différences finies. Pour le cas où on choisit $L = 2$ dans (14),

$$(16) \quad \frac{\Delta t}{h} < \alpha_{CFL}$$

$$\text{avec } \alpha_{CFL} = \frac{3\sqrt{2}}{7}$$

En revanche, il n'a pas été démontré que le problème discret (9) admet une solution pour $L > 1$.

Dans tout ce qui suit, nous avons choisi l'ordre du schéma égal à quatre; ce qui correspond à $L = 2$ dans l'expression (14). Le schéma est alors noté schéma 2-4.

7 Résultats numériques

La convergence du problème discret va être dans un premier temps étudiée. Ensuite des comparaisons entre les schémas d'ordre deux et d'ordre 4 en espace seront données pour des cas académiques comme le plan métallique ainsi que le cylindre circulaire.

7.1 Tests de Convergence

Si la stabilité du schéma numérique d'ordre 4 est prouvée, il n'en ait pas de même pour la convergence du problème discret. C'est pour pouvoir essayer de répondre à cette question que des tests de convergence vont être d'abord présentés. Nous allons d'abord nous intéresser au champ proche et ensuite au champ lointain ou plus précisément à la Surface Equivalente Radar.

7.1.1 Champ proche-Réflexion sur un plan métallique

On s'intéresse à la réflexion sur un plan vertical illuminé par une onde plane qui se propage dans la direction x . L'onde plane (cf. fig 30) a une dépendance en temps donnée par

$$(17) \quad \begin{cases} g(t) = \left(\exp \left(\frac{t - t_{in}}{t_{max}} \right)^2 \right) & \text{si } 0. \leq t \leq t_f \\ g = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $t_f = 2 t_{in}$; $t_{in} = 0.5s$ et $t_{max} = 0.145s$

La plus petite longueur d'onde, λ_{min} , contenue dans l'impulsion incidente est de l'ordre de $0.2m$.

Le pas en temps Δt est choisi tel que $\frac{\Delta t}{h_v} = 2$ afin de satisfaire la condition de stabilité du schéma numérique (2-4).

Le plan vertical est discrétisé par segments de pas h_s tel que $h_v = h_s$. Le rapport $\frac{h_v}{h_s}$ est gardé constant dans ce paragraphe. La plan est positionné en un point x_b (cf fig 31) tel que

$$(18) \quad x_b = (i + l) h_v \text{ tel que } 0 < l < 1$$

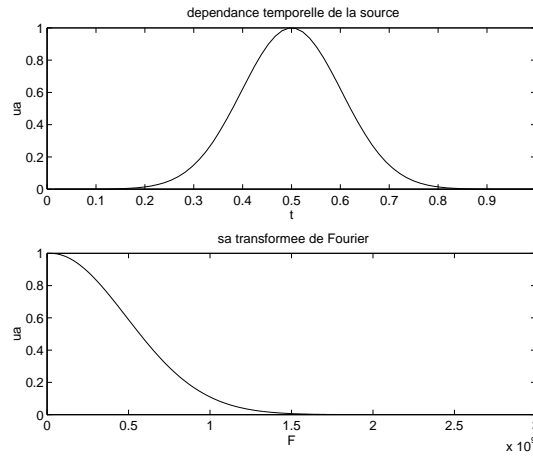


FIG. 30. *Evolution temporelle de la source et sa transformée de Fourier*

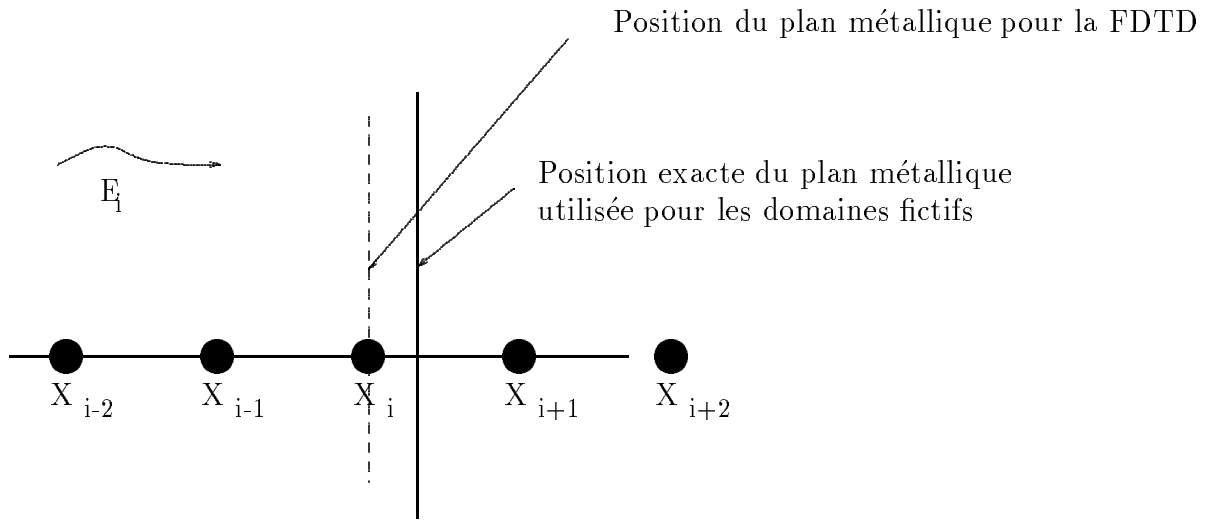


FIG. 31. *Configuration de la géométrie*

La plan ne coïncide pas avec le maillage. Nous allons faire varier le nombre de points par longueur d'onde noté par la suite nw et défini par $nw = \frac{\lambda_{min}}{h_v}$. La variation du nombre de points par longueur d'onde (cf. fig. 32 et 33) ne semble pas avoir affectée la valeur du champ tangent au plan. Ce qui laisse à penser que la solution du problème discret a bien convergé vers la solution du problème de diffraction.

7.1.2 Champ lointain- SER

Nous allons considérer maintenant le cas particulier du cylindre circulaire. Pour cet exemple, des expressions analytiques peuvent être trouvées. Nous nous placerons dans la même configuration que celle de la figure (1). Le disque est éclairé par une onde plane dont la dépendance temporelle (cf fig (2)) est donnée par

$$(19) \quad g(t) = \frac{d}{dt} \left(\exp \left(-(\pi F_{sou}(t - 1/F_{sou})^2) \right) \right)$$

où F_{sou} , la fréquence de la source est fixée à $37.5 MHz$.

Nous avons fait varier le nombre de points par longueur d'onde nw tout en gardant le

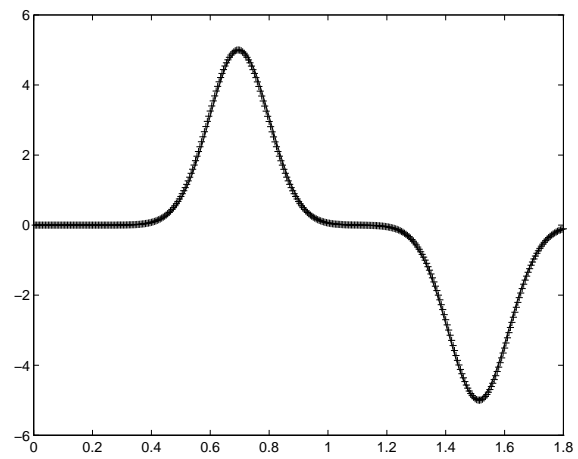


FIG. 32. *Champ électrique tangent au plan ($-\text{:nw}=10$, $+\text{:nw}=20$) en fonction du temps*

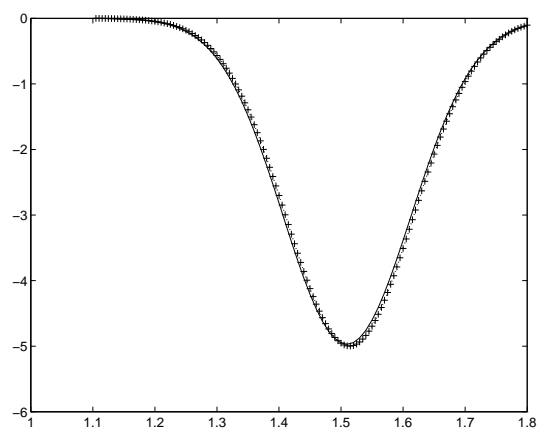


FIG. 33. *Zoom de la figure précédente*

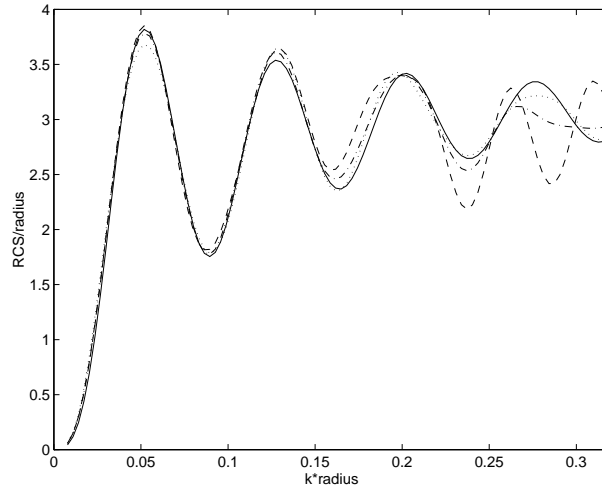


FIG. 34. *SER à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:analytique ,-.: $DF_{2.4nw} = 10$,-.: $DF_{2.4nw} = 20$,.: $DF_{2.4nw} = 40$)*

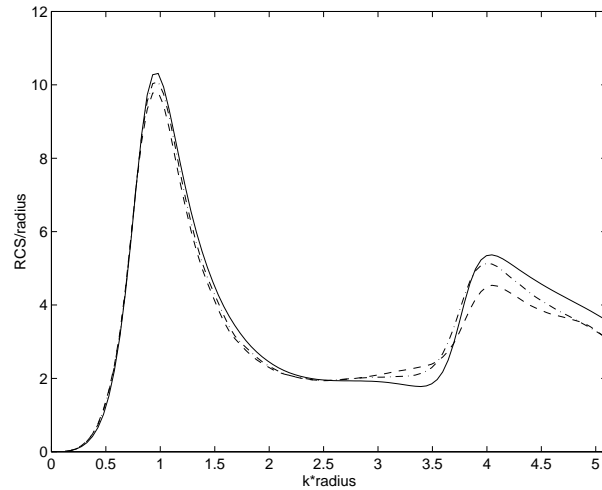


FIG. 35. *SER à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:analytique ,-.: $DF_{2.4nw} = 10$,-.: $DF_{2.4nw} = 20$)*

rapport $\frac{h_v}{h_s}$ constant. Les expressions analytiques sont données par une décomposition en fonction de Bessel (1). Les courbes de la figure 34 montrent bien la convergence du problème discret vers la solution analytique lorsque le nombre de points par longueur d'onde augmente.

La convergence du problème discret a aussi été étudiée dans le cas des structures ouvertes. Les configurations des cavités (cf fig 18. 25) ont été analysées. La convergence du problème a été analysée (cf fig 35. 36).

Conclusion: dans tous les cas testés, le schéma numérique converge vers la solution du problème de diffraction qu'il est sensé modéliser.

7.2 Comparaison avec le schéma 2-2

Nous allons maintenant regarder comment les résultats obtenus par la méthode des domaines fictifs sont sensibles à l'ordre du schéma c'est-à-dire au choix de L dans (14).

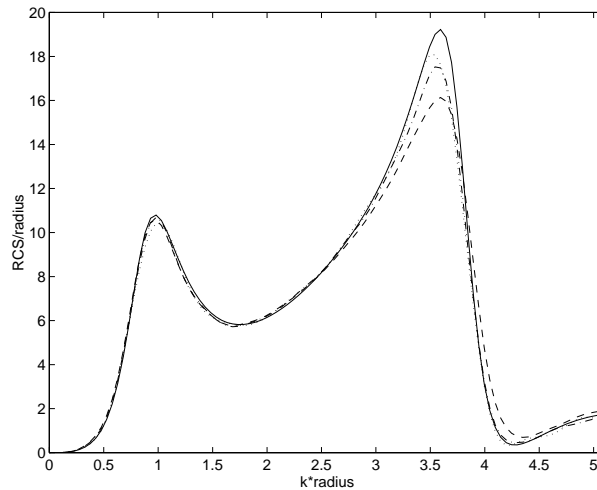


FIG. 36. SE_R à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:analytique, -: $DF_{2,4}nw = 10$, -.: $DF_{2,4}nw = 20$, : $DF_{2,4}nw = 40$)

La réflexion sur un plan métallique et la diffraction pour quelques cas académiques comme le cylindre circulaire ou le demi-cylindre vont être étudiée. Dans le cas du plan métallique, on utilise la configuration de la figure 31 et des comparaisons de ces résultats avec ceux obtenus par une méthode de différences finies sont aussi réalisées. Afin de simplifier l'écriture, on note

- $FDTD_{2-2}$: la méthode de différences finies utilisant un schéma d'ordre 2 en espace et en temps
- $FDTD_{2-4}$: la méthode de différences finies utilisant un schéma d'ordre 2 en temps et d'ordre 4 en espace
- DF_{2-2} : la méthode des domaines fictifs utilisant un schéma d'ordre 2 en espace et en temps
- DF_{2-4} : la méthode des domaines fictifs utilisant un schéma d'ordre 2 en temps et d'ordre quatre en espace;

Remarque: On rappelle que lors du calcul de diffraction par un obstacle à l'aide de la méthode $FDTD_{2-4}$, le calcul du champ à l'extérieur fait intervenir des valeurs du champ à l'intérieur de l'obstacle. Elles sont alors obtenues en utilisant le principe des images. Plus précisément, le champ électrique tangent à la surface de l'obstacle est alors antisymétrique par rapport à cette surface. En revanche, le champ électrique normal est symétrique par rapport à la surface de l'obstacle.

Nous allons d'abord étudier la réflexion sur un plan métallique. Le cas du cylindre circulaire sera ensuite traité.

7.2.1 Réflexion sur un plan métallique

Nous nous plaçons dans la même configuration que celle décrite au paragraphe (3.1.1). Le nombre de points par longueur nw est fixé égal à 10. Nous rappelons que dans le cas de la méthode des domaines fictifs, le plan ne coïncide pas avec le maillage. Les courbes obtenues à l'aide de la méthode des domaines fictifs sont pratiquement pour cet exemple indépendantes du choix du schéma numérique (2-2) ou (2-4) (cf fig 37). Nous allons maintenant comparer ces résultats avec ceux obtenus par différences finies. Dans ce dernier cas, le plan est positionné au point $x_i = i * h_v$ et il coïncide avec le maillage (cf fig 31). La condition

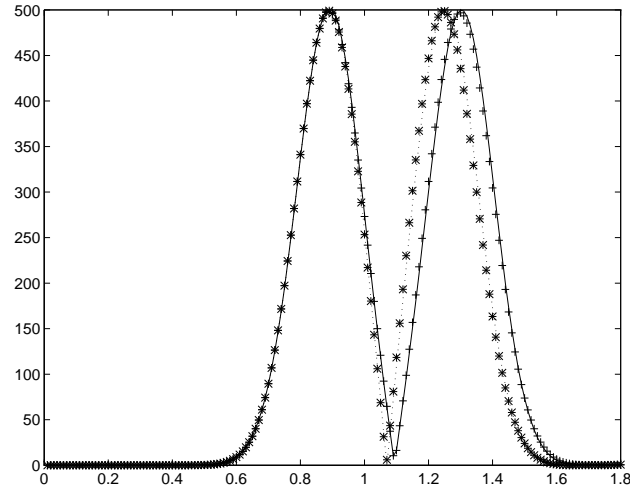


FIG. 37. Valeur du champ électrique au point P1 (-:FDTD_{2.2},+:FDTD_{2.4},...:DF_{2.2},*:DF_{2.4})

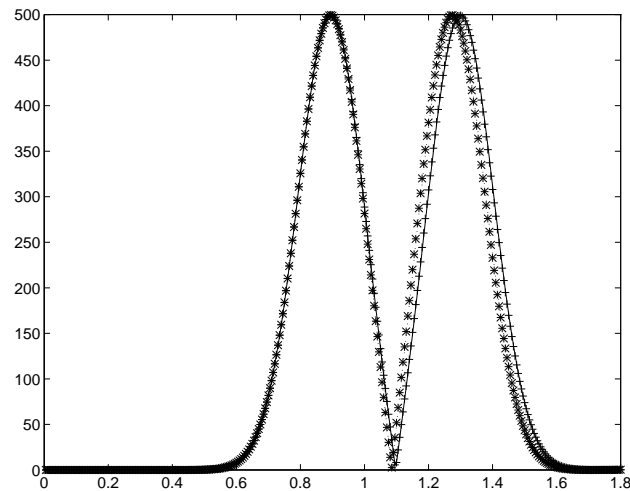


FIG. 38. Valeur du champ électrique au point P1 (-:FDTD_{2.2},+:FDTD_{2.4},...:DF_{2.2},*:DF_{2.4})

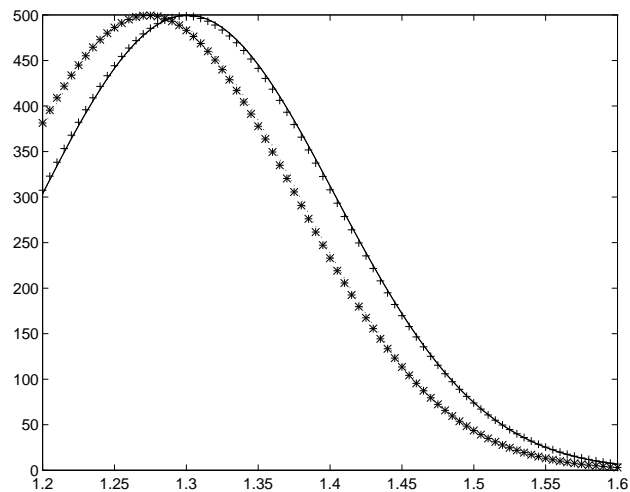
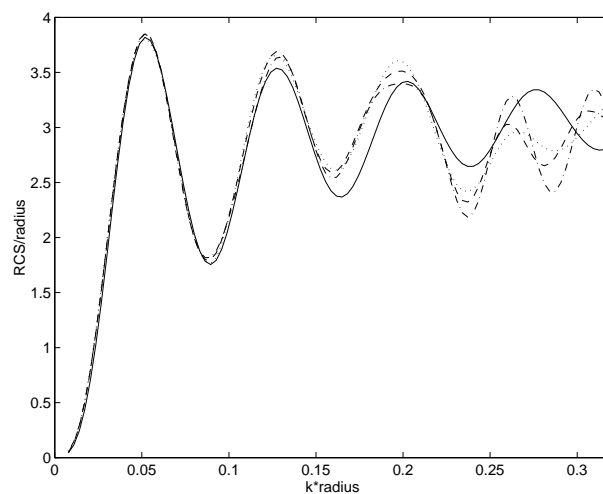
à la limite est prise alors en tous les points tels que $x = x_i = i * h_v$. On notera que les courbes obtenues par la méthode FDTD sont identiques quel que soit le choix du schéma numérique (2-2) ou (2-4). Un décalage entre les deux méthodes FDTD et DF persiste et est indépendant de l'ordre du schéma utilisé.

L'influence de la discrétisation en espace a ensuite été étudiée. Nous avons réalisé le même test numérique en changeant uniquement le nombre de points par longueur d'onde $nw = 20$ (cf fig 38 et 39). Les mêmes conclusions que précédemment peuvent être données. Lorsque le nombre de points par longueur augmente, la courbe obtenue par la méthode FDTD se rapproche de celle obtenue à l'aide de la méthode DF.

Conclusion: l'ordre du schéma numérique n'altère pas les résultats obtenus par les domaines fictifs. De plus, ces derniers restent plus précis que ceux obtenus par la FDTD avec discrétisation en marches d'escalier. Il est maintenant intéressant de regarder si ce comportement persiste sur l'analyse du champ lointain.

7.2.2 SER

Nous allons analyser l'effet de la modification de l'ordre du schéma sur la SER. Le cas

FIG. 39. *Zoom de la figure précédente*FIG. 40. *SER à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:analytique, - -: $DF_{2,2}$, -.: $DF_{2,4}$)*

académique du disque est étudié. On se place dans la même configuration que celle décrite au paragraphe (3.1). Le nombre de points par longueur est fixé égal à 10.

Le changement d'ordre (cf fig 40 et 41) affecte relativement faiblement la SER. Ces résultats sont identiques lorsque on augmente le nombre de points $n_w = 20$ (cf fig 42 et 43) Des résultats identiques sont aussi obtenus pour les cas académiques de cavités (cf fig 44,45,46).

Conclusion: il s'avère que pour tous les cas testés, l'ordre du schéma modifie peu la valeur de la SER.

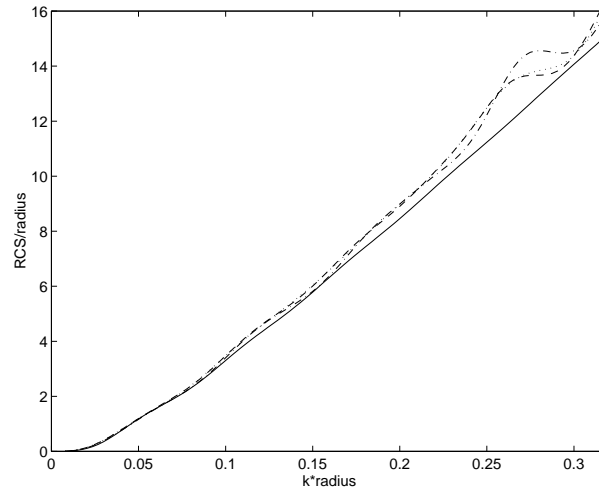


FIG. 41. *SER* à $\theta = \pi$ en fonction de ka (-:analytique, -: $DF_{2.2}$, ...: $DF_{2.2}$, -.: $DF_{2.4}$)

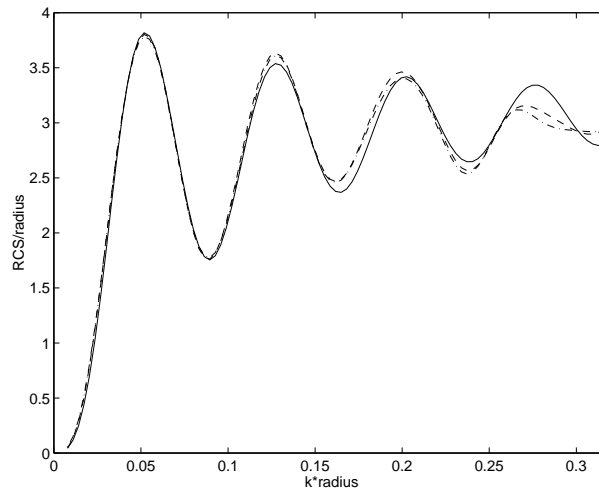


FIG. 42. *SER* à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:analytique, ...: $DF_{2.2}$, -.: $DF_{2.4}$)

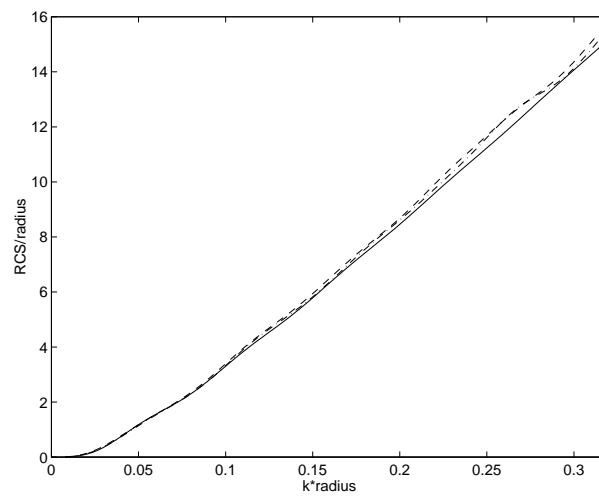


FIG. 43. *SER* à $\theta = \pi$ en fonction de ka (-:analytique, -.: $DF_{2.2}$, -.: $DF_{2.4}$)

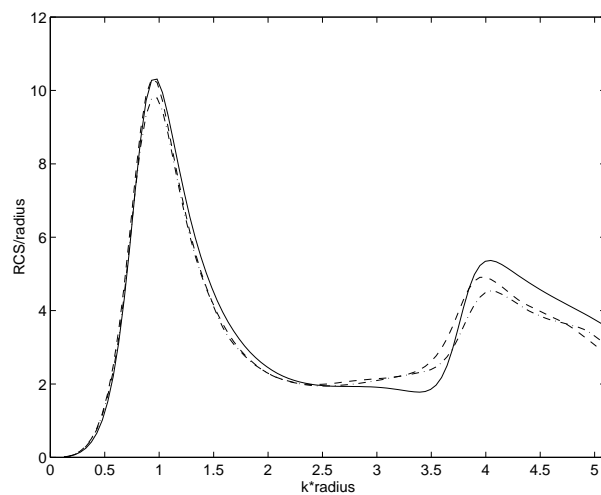


FIG. 44. *SER* à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:analytique, - -: $DF_{2,2}$, -.: $DF_{2,4}$)

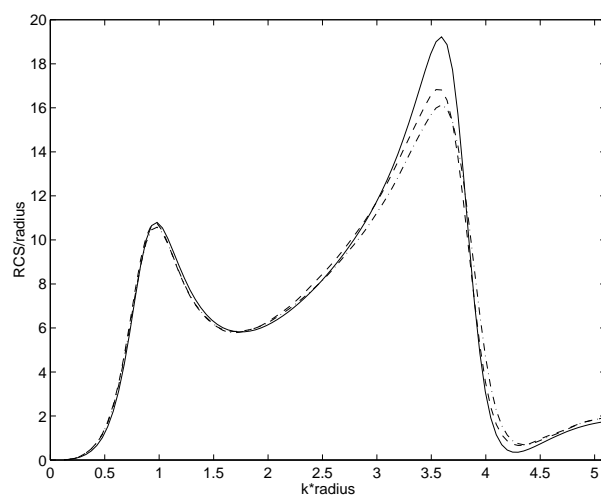


FIG. 45. *SER* à $\theta = 0$ en fonction de ka (-:équations intégrales, - -: $DF_{2,2}$, -.: $DF_{2,4}$)

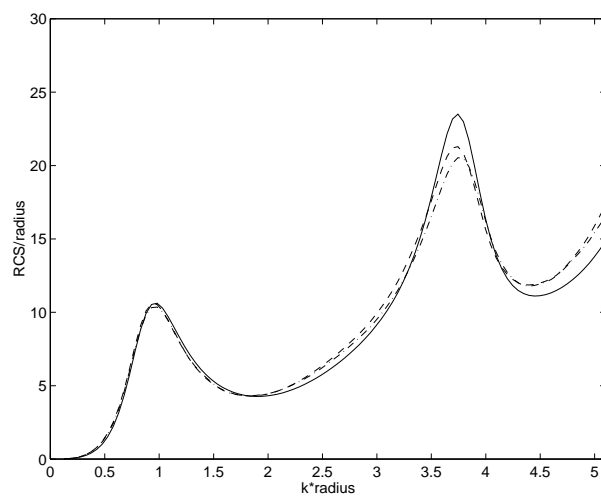


FIG. 46. *SER* à $\theta = \pi$ en fonction de ka (-:équations intégrales, - -: $DF_{2,2}$, -.: $DF_{2,4}$)

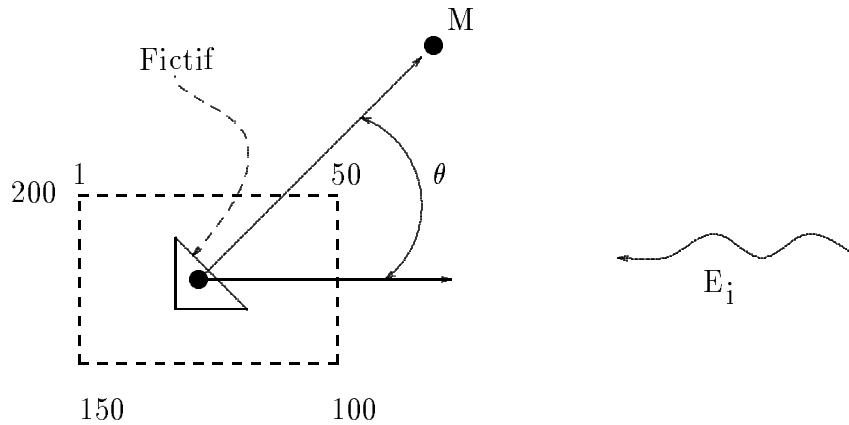


FIG. 47. Configuration de la geometrie du cas Hyb1

Part IV

Méthode hybride: Domaines fictifs et FDTD

8 introduction

La méthode des domaines fictifs couplée à une transformation champ proche-champ lointain permet de calculer la SER avec une précision relativement bonne. Mais cette méthode nécessite de discrétiser tout le corps diffractant, ce qui peut s'avérer prohibitif en taille mémoire pour des gros objets. De plus, elle demande l'inversion d'un système creux lors de la détermination du multiplicateur de Lagrange. Le temps de résolution de ce système peut ne plus être négligeable devant le temps de calcul d'une itération du schéma de Yee. D'autre part, une approximation en marche d'escalier pour certaines parties de l'obstacle peut s'avérer suffisante pour le calcul du champ électromagnétique. Il est donc intéressant de regarder la possibilité d'une hybridation entre la méthode des domaines fictifs et l'approximation en marches d'escalier. Seules certaines parties de l'obstacle sont discrétisées et le courant est uniquement calculé en ces endroits. Ceci réduit considérablement le stockage du maillage de l'obstacle et le temps de calcul du courant. Afin de simplifier, on note

- df1 : la méthode où le champ électromagnétique est calculé par les domaines fictifs,
- fdtd: la méthode classique des différences finies avec approximation en marche d'escalier de la frontière;
- hyb: la méthode d'hybridation couplant les deux méthodes

Dans ce paragraphe, nous allons maintenant analyser la possibilité d'une telle hybridation. Le cas simple d'un triangle rectangle isocèle a été considéré.

En effet, deux cas particuliers vont être étudiés:

- dans le premier cas, nous avons uniquement calculé le courant par la méthode des domaines fictifs uniquement sur l'hypoténuse du triangle et annulé les valeurs du champ électrique tangent sur les deux autres côtés (cf fig 47). Ce cas sera noté cas Hyb1;
- dans le second cas, seul le courant sur une partie de la pointe du triangle a été calculé par la méthode des domaines fictifs (cf fig 48). Ce cas est noté cas Hyb2.

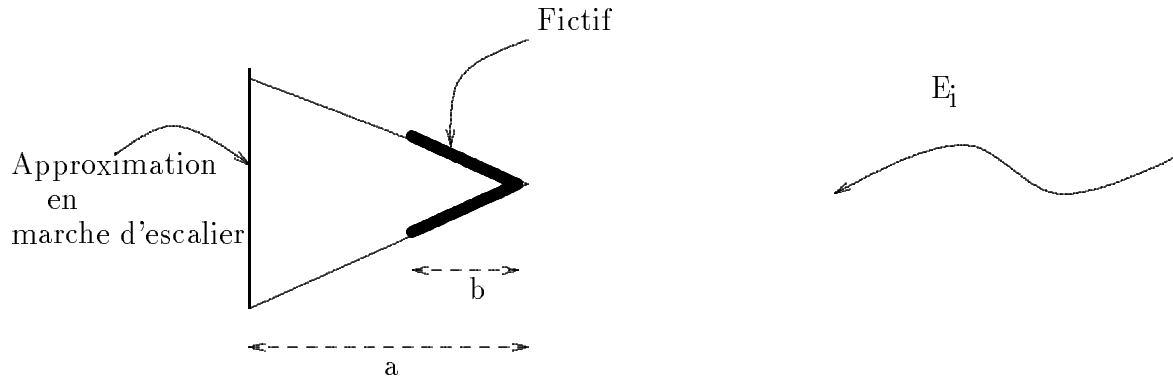


FIG. 48. Configuration de la geometrie dans le cas Hyb2

Une fois la configuration définie, il faut maintenant déterminer la manière dont le raccordement entre la méthode des domaines fictifs et la FDTD avec approximation en marches d'escalier va être réalisé. Nous n'avons pas dans cette étude analysé complètement le rôle du raccordement sur la solution de la méthode hybride. Mais cependant, différents types de raccordements ont été étudiés. Rappelons que lors de la méthode des domaines fictifs, on est amené à rechercher le champ électrique dans tout le domaine de calcul ainsi qu'une nouvelle inconnue définie sur la frontière de l'obstacle qui n'est autre que le courant. La détermination de ces deux quantités passe par la résolution d'un système (9) ou d'un système équivalent.

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_h^{n+1} = 2E_h^n - E_h^{n-1} + \Delta t^2 M_h^{-1} s_h^n - \Delta t^2 M_h^{-1} K_h E_h^n - \Delta t^2 M_h^{-1} B_h^t \lambda_h^n \quad (1) \\ \lambda_h^n = (B_h M_h^{-1} B_h^t)^{-1} B_h M_h^{-1} (s_h^n - K_h E_h^n), \quad (2) \end{array} \right.$$

La matrice B_h représente le couplage entre le champ électrique et le courant. Elle permet d'imposer la condition à la limite sur le conducteur.

Lors de la configuration Hyb1, sur les deux cotés du triangle, cette condition à la limite est imposée directement par la méthode FDTD avec approximation en marches d'escalier. Le champ électrique sur ces deux cotés n'est donc pas couplé au courant présent sur l'hypoténuse (qui lui est calculé par la méthode des domaines fictifs). Il est donc nécessaire d'annuler les coefficients de la matrice B_h qui réalisaient ce couplage. En revanche, dans la configuration Hyb2, aucune indication n'est apparue pour réaliser le raccordement. C'est pourquoi nous allons essayer d'analyser deux possibilités de raccordement.

- La frontière du triangle entre les points [A A1 B1 B] (cf fig 49) est approchée par des marches d'escalier et on impose que le champ électrique tangent est nul. Le courant calculé par la méthode des domaines fictifs a un support défini par deux segments de droite $[A, C]$ $[C, B]$. Ce cas est noté *raccor*₁.
- On réalise le même raccordement et en plus on impose que le champ électrique tangent sur la droite verticale joignant A et B (cf fig 50) soit nul. Ce raccordement est noté *raccor*₂.

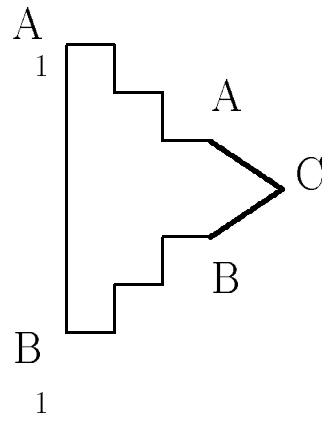


FIG. 49. *Raccordement 1 dans le cas Hyb2*

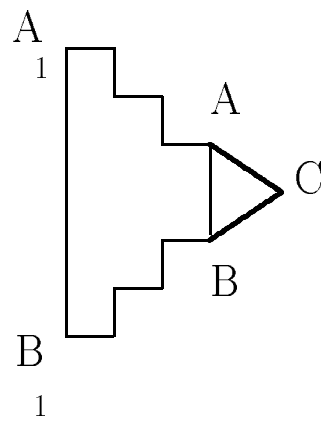


FIG. 50. *Raccordement 2 dans le cas Hyb2*

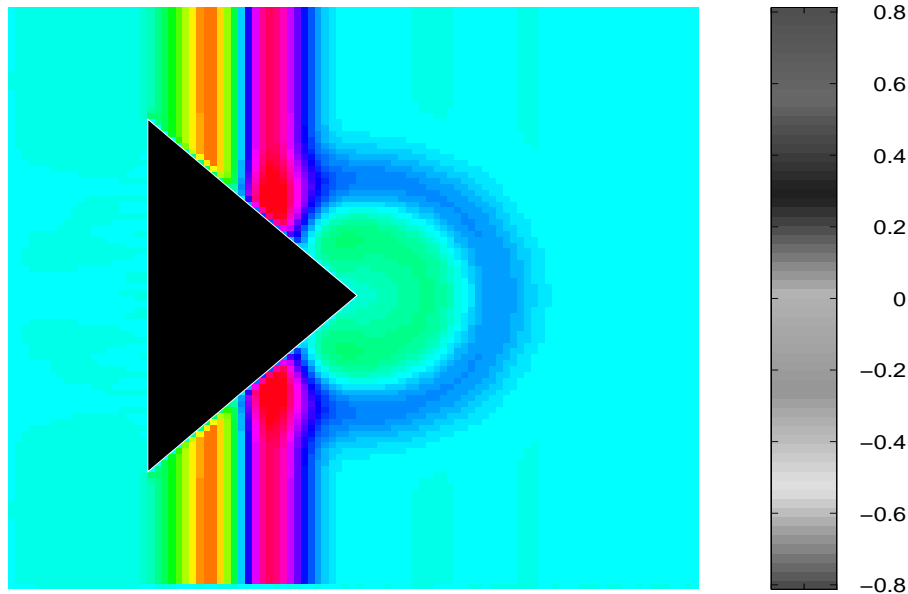


FIG. 51. *Champ électrique vertical au bout de 300 itérations en temps obtenu par la méthode df1*

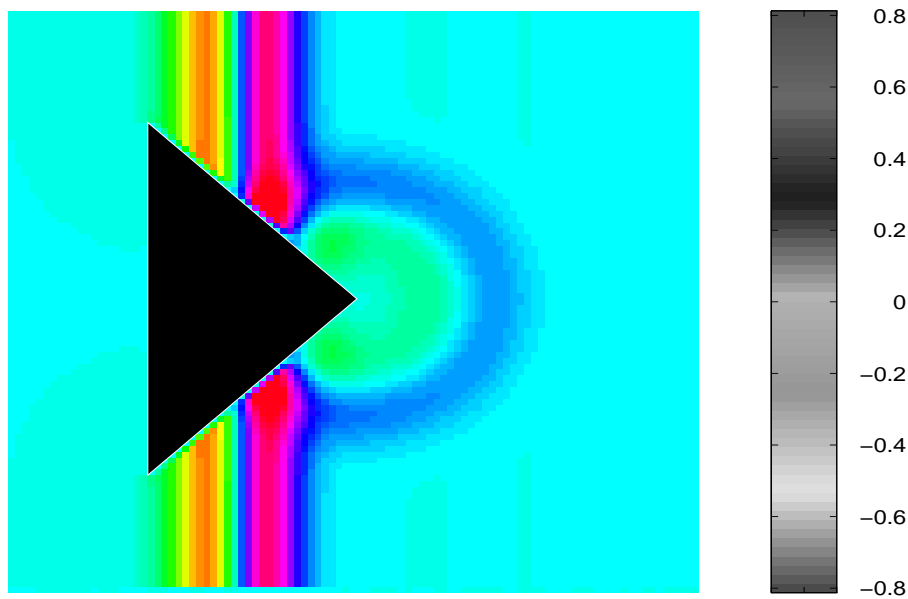


FIG. 52. *Champ électrique au bout de 300 itérations en temps obtenu par la méthode hybride*

Le rôle du raccordement sera étudié au paragraphe (10.2). Dans ce qui suit, pour la configuration, nous nous sommes placés dans le cas raccor1.

Dans tous les cas, le triangle (cf fig 47 et fig 48) est éclairé par une onde plane dont la dépendance temporelle est donnée par la figure (2). La plus petite longueur d'onde, λ_{min} , contenue dans l'impulsion incidente est de l'ordre de $4m$. De plus, la longueur d'un côté du triangle a (cf fig 48) est prise égale à $5 \lambda_{min}$.

Les figures 51 (resp 52) donnent les valeurs du champ électrique vertical pour la configuration du cas Hyb2 calculé par la méthode df1 (resp hyb). Ces deux figures sont similaires, ce qui tend à prouver que le champ proche obtenu par la méthode hyb est relativement bien

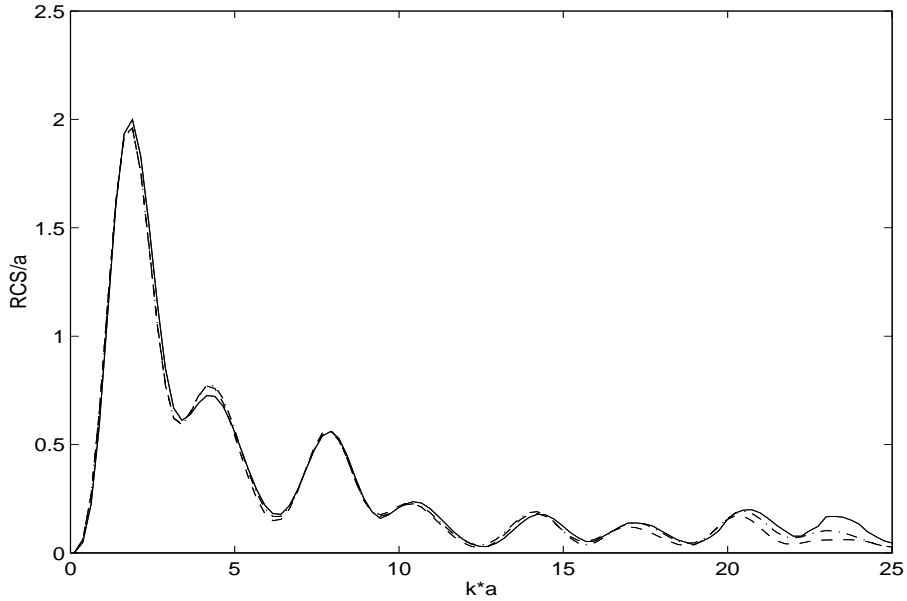


FIG. 53. *SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas Hyb2 (-:ei, -:hyb $nw = 10$, -:hyb $nw = 20$)*

calculé.

Nous rappelons que la solution de référence pour le calcul de la surface équivalente radar est donnée par une méthode d'éléments finis de frontière avec 20 points par longueur d'onde λ_{min}

9 Tests de convergence

Dans un premier temps, la convergence du problème discret pour la méthode hybride va être analysée. Afin d'étudier l'influence de la discretisation, nous avons fait varier les pas de discretisation h_v tout en gardant le rapport $\frac{h_s}{h_v}$ égal à 1.5. Les figures (53 et 54) donnent les valeurs de la SER normalisée en fonction du rapport ka pour deux angles d'observation $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. On remarque, que lorsque le nombre de points par longueur d'onde augmente, les courbes obtenues par la méthode hyb se rapprochent des valeurs obtenues par la méthode de référence. Les mêmes conclusions sont obtenues pour le cas hyb2. **Conclusion:** dans les deux cas testés, la méthode hybride converge bien vers la solution recherchée. (55 et 56).

10 Etude paramétrique

10.1 Variation de la longueur

Il est apparu intéressant de faire varier la longueur b dans le cas hyb2 (cf. fig. 48). Les figures (57 et 58) donnent la SER pour deux valeurs de b . On note que pour le calcul de la SER rétrodiffusée, la variation de b fait varier l'erreur relative $\frac{SER_{ei} - SER_{hyb}}{SER_{ei}}$ du facteur identique.

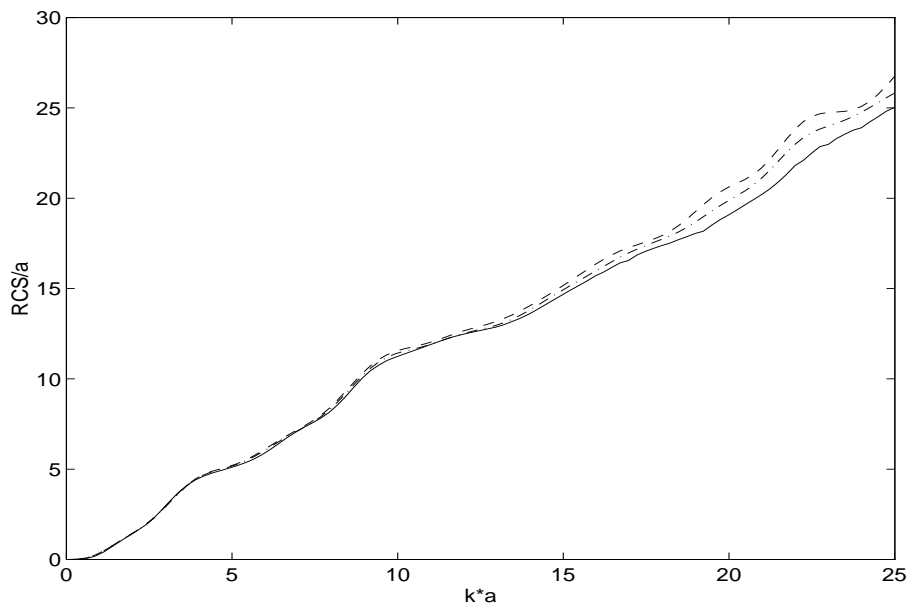


FIG. 54. *SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ pour le cas Hyb2 (-:ei, - -:hyb $n_w = 10$,-.:hyb $n_w = 20$)*

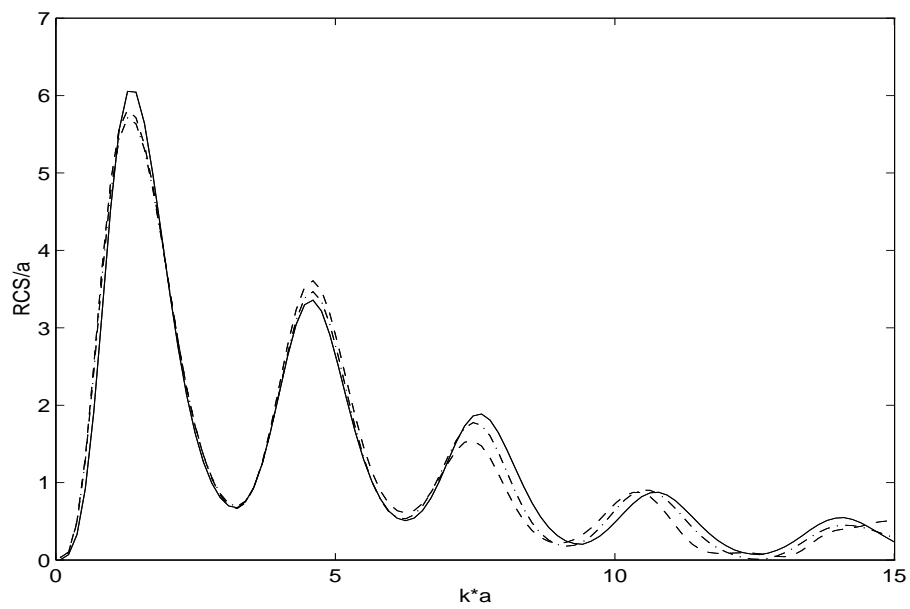


FIG. 55. *SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas Hyb2 (-:ei, - -:hyb $n_w = 10$,-.:hyb $n_w = 20$)*

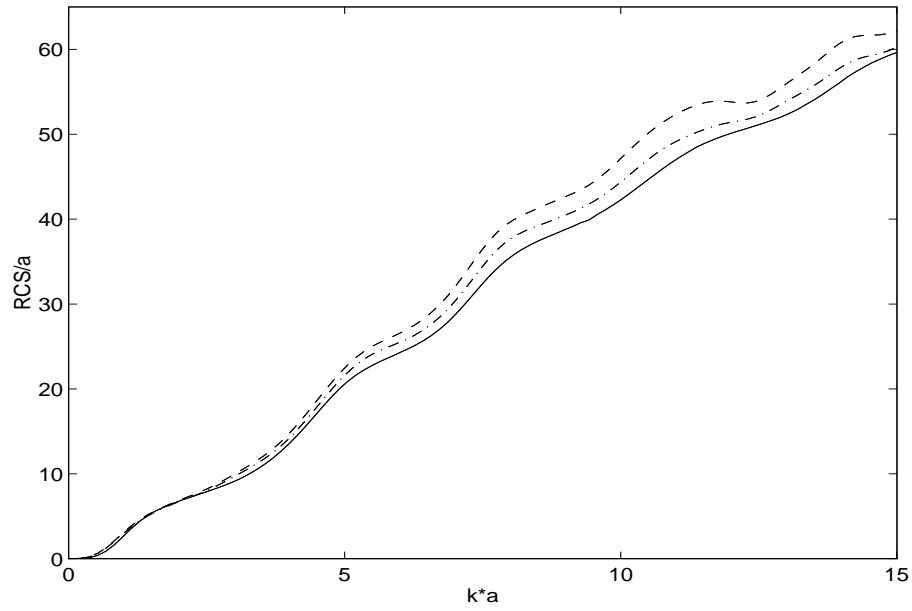


FIG. 56. *SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ pour le cas Hyb2 (-:ei, -:hyb $nw = 10$,-.:hyb $nw = 20$)*

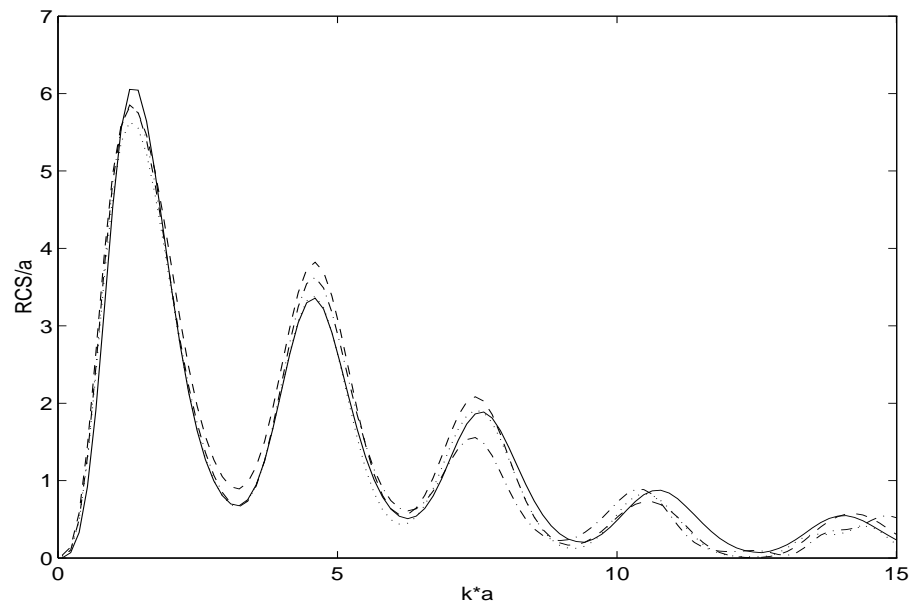


FIG. 57. *SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas 2 (-:ei, ...:df1, -:hyb $b = 2\lambda_{min}$,-.:hyb $b = \lambda_{min}$)*

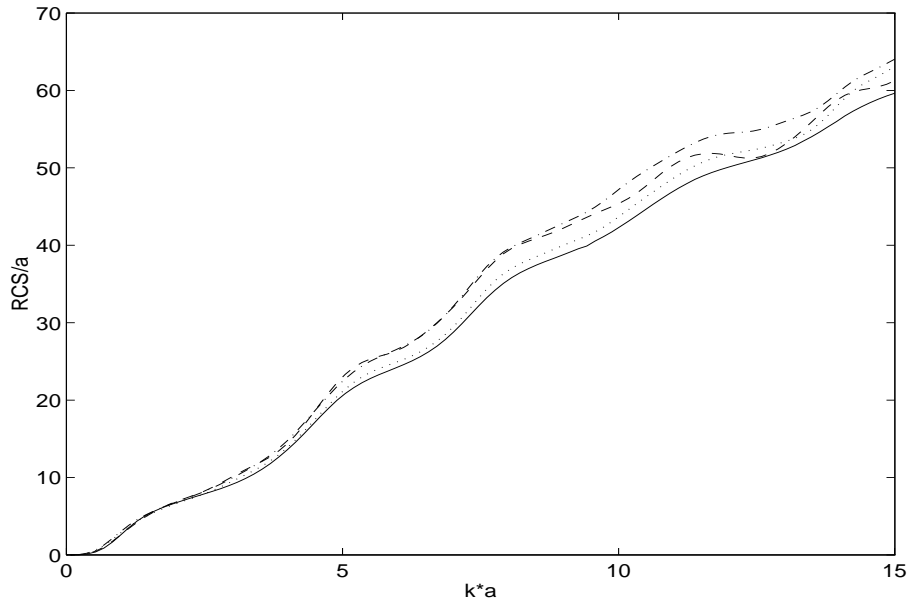


FIG. 58. *SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ pour le cas 2 (-:ei, ...:df1,- -:hyb $b = 2\lambda_{min}$,-.:hyb $b = \lambda_{min}$)*

En revanche, pour la SER diffusée vers l'arrière du triangle, l'erreur relative n'est pas modifiée lorsque b varie.

10.2 Variation du raccordement

Comme expliqué précédemment, nous allons essayer de regarder le rôle du raccordement. Pour la configuration Hyb1, un seul type de raccordement a été réalisé et a été défini plus haut. Nous avons analysé deux types de raccordements possibles pour la configuration Hyb2. Ces raccordements ont été décrits précédemment et sont notés $raccor_1$ et $raccor_2$. On note que dans les deux cas, les champs électriques sont très proches. Quant aux valeurs de la SER, elle est peu affectée par la modification du raccordement. L'erreur relative est du même ordre de grandeur pour ces deux façons de raccorder les deux méthodes et vaut environ en moyenne 3%.

Conclusion: la manière dont nous avons réalisé le raccordement a peu modifié les résultats obtenus. Cependant il faudrait faire une étude plus exhaustive et en particulier analyser le cas où le support du courant a une intersection vide avec la frontière approchée en marches d'escalier.

11 Comparaison avec les autres méthodes

Il est maintenant intéressant de pouvoir comparer les valeurs de SER obtenues par les différentes méthodes. La solution de référence est calculée par une méthode des éléments finis de frontière avec 20 points par rapport à la plus petite longueur d'onde d'observation. Sont aussi données les valeurs de la SER en fonction du produit ka en gardant l'angle d'observation constant pour les deux cas de configuration (cf fig 61 62 63 64). La discrétisation choisie pour les méthodes df1, hyb et ftdt est de 10 points par rapport à la plus petite longueur d'onde soit λ_{min} . On note que les courbes obtenues par les méthodes df1, hyb sont très proches et qu'elles s'écartent peu de celle obtenue par la méthode de référence.

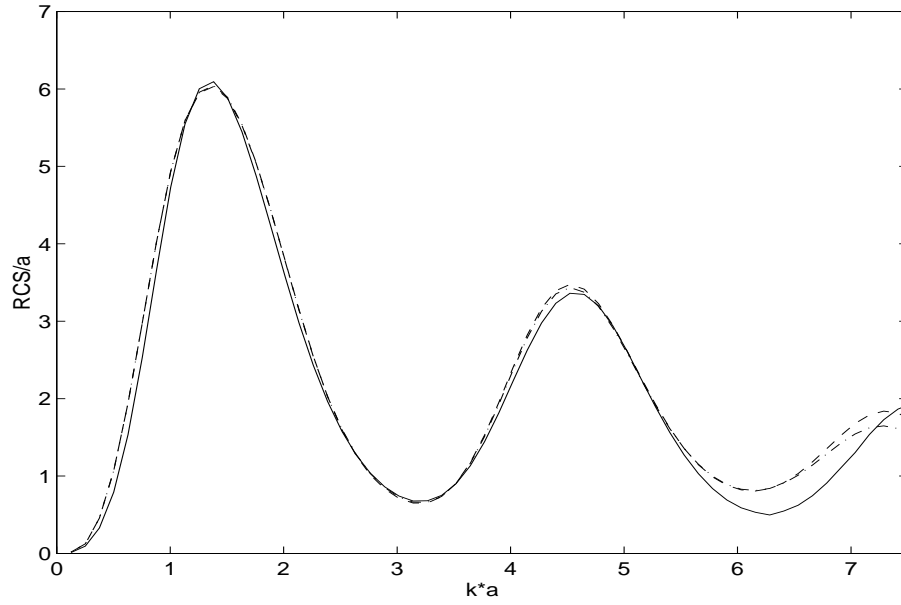


FIG. 59. *SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas 2 (-:ei, -.:hyb raccor₁, - -:hyb raccor₂)*

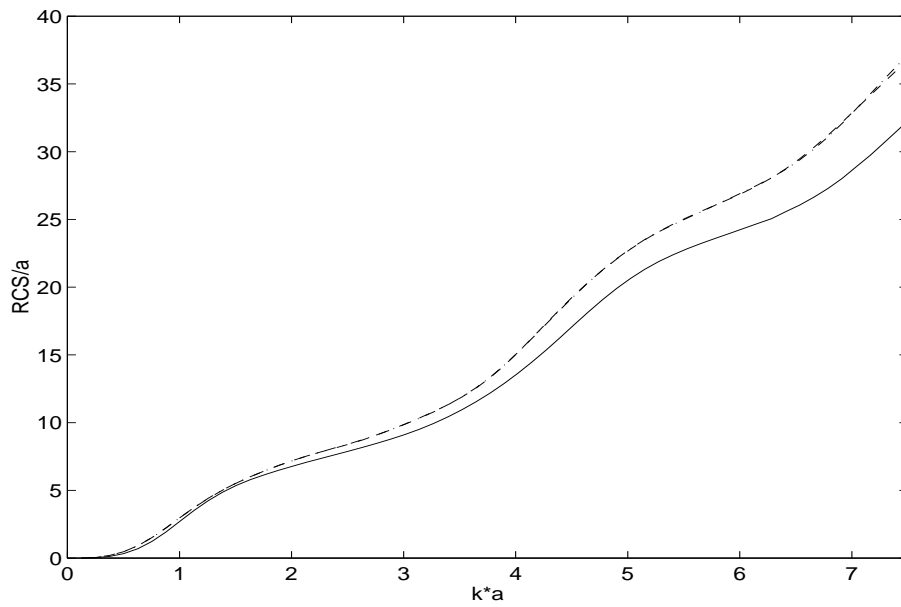


FIG. 60. *SER en fonction de ka pour $\theta = \pi$ pour le cas 2 (-:ei, ...:df1, -.:hyb raccor₁, -.:hyb raccor₂)*

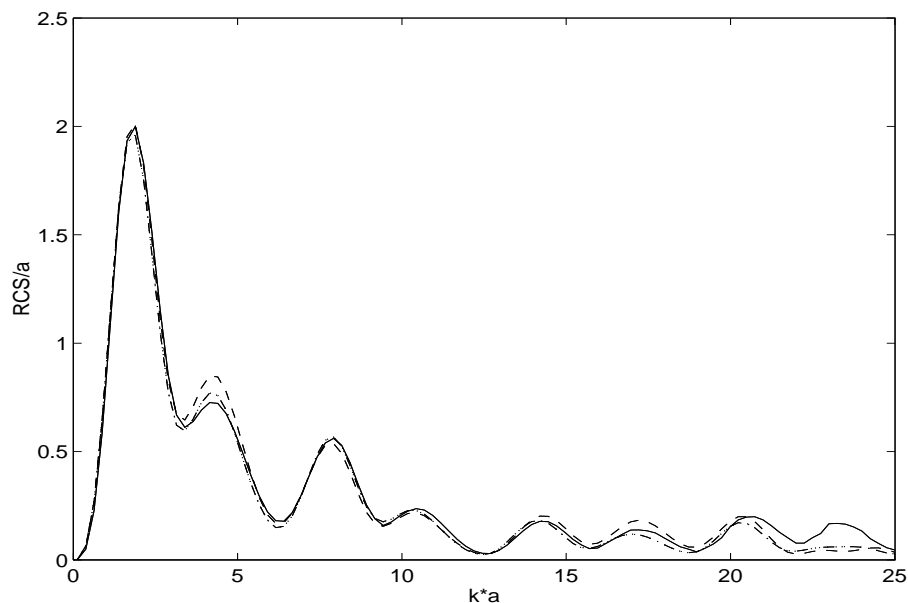


FIG. 61. *SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas 1 (-:ei, ...:df1,- -:fddt,-.:hyb)*

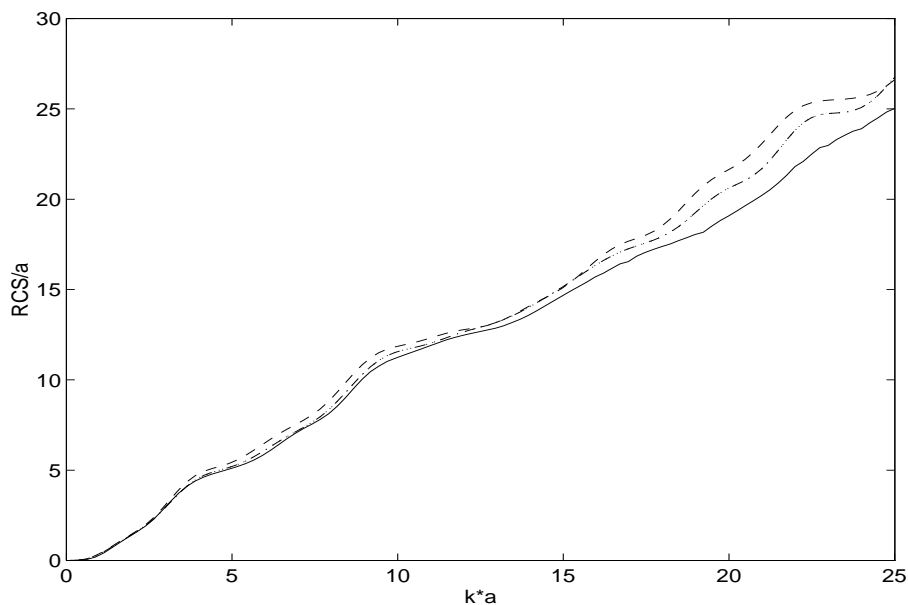


FIG. 62. *SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas 1 (-:ei, ...:df1,- -:fddt,-.:hyb)*

Afin de mieux quantifier les résultats, l'erreur relative (3) par rapport à la valeur de référence a été aussi calculée. On remarque que l'erreur sur la SER calculée par la méthode hybride est environ de l'ordre de 8% alors que pour la méthode df1 l'erreur relative est plus de 3%. Il est à remarquer aussi que lorsque le nombre de points par longueur augmente, les deux méthodes df1 et hyb tendent à produire des erreurs relatives du même ordre de grandeur 5%.

L'erreur relative obtenue avec la méthode hybride est en général inférieure à celle obtenue par une méthode FDDT d'un facteur deux.

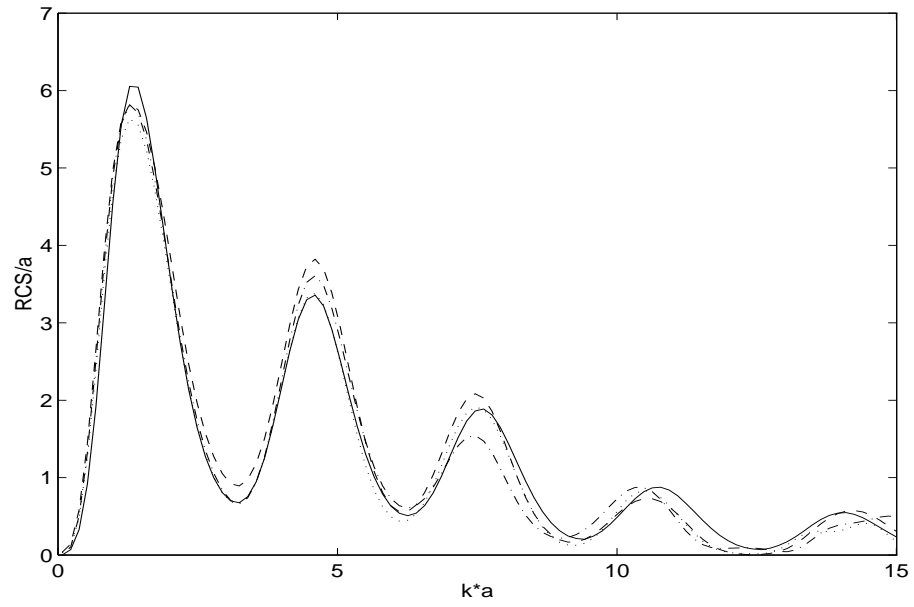


FIG. 63. *SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas 2 (-:ei, ...:df1,- :fddd,-.:hyb)*

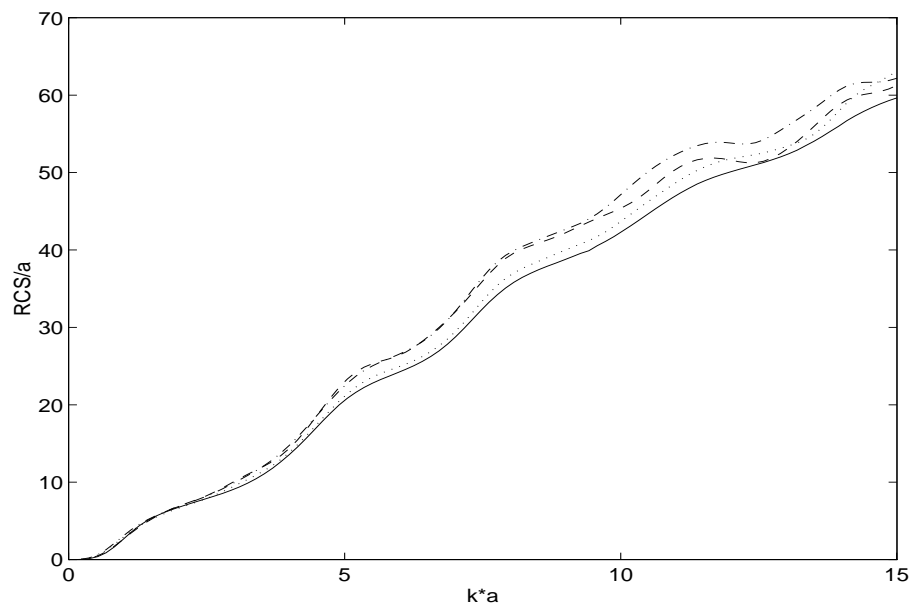


FIG. 64. *SER en fonction de ka pour $\theta = 0$ pour le cas 2 (-:ei, ...:df1,- :fddd,-.:hyb)*

Part V

Conclusion

Nous avons analysé la faisabilité de la détermination de la SER à l'aide de la méthode des domaines fictifs. Des tests de validation ont été réalisés. Ils montrent en particulier dans le cas du disque conducteur que lorsque on augmente le nombre de points par longueur d'onde, les calculs convergent bien vers la solution analytique. La discrétisation de l'obstacle a été étudiée. Il semble qu'elle influe peu sur le calcul à condition toutefois que le rapport entre les deux maillages ne soit pas trop éloigné de un. Les calculs de SER par la méthode des domaines fictifs ont été ensuite comparés à ceux issus d'une méthode par différences finies où la frontière de l'obstacle est approchée par des marches d'escalier. Il s'avère que pour tous les cas testés, les résultats obtenus à la méthode des domaines fictifs sont plus précis. On note un facteur 2-3 entre les erreurs relatives pour les deux méthodes. Ce facteur est pratiquement indépendant de la géométrie de l'obstacle même lorsque celui-ci présente des singularités. Nous avons aussi comparé les résultats obtenus par la méthode des domaines fictifs avec ceux obtenus par une méthode des éléments finis de frontière. Cette dernière méthode est toujours plus précise mais elle nécessite un calcul par fréquence d'observation. En revanche, la méthode des domaines fictifs permet en une seule fois d'obtenir la SER pour toutes les fréquences contenues dans l'excitation. Les tests numériques ont été réalisés avec au moins 10 points par longueur d'onde et un rapport du maillage surfacique et volumique de l'ordre de 1.5.

Dans un second temps, nous avons proposé une formulation du problème de diffraction d'une onde par un corps parfaitement conducteur à l'aide de la méthode des domaines fictifs qui permet de construire un schéma numérique coïncidant avec un schéma d'ordre quatre dans l'espace libre. Des tests de convergence ont montré que le schéma obtenu est stable. Des comparaisons avec le schéma d'ordre deux ont ensuite été réalisées. Elles ont permis de montrer que l'ordre du schéma influe peu sur les résultats.

Dans le troisième chapitre, une hybridation entre la méthode des domaines fictifs et l'approximation en marche d'escalier a été réalisée. Les premiers résultats sont fort encourageants. Ils montrent que les calculs de SER par cette méthode sont très proches des résultats obtenus par la méthode des domaines fictifs. En particulier, l'erreur sur la SER est environ de 8% lorsque le nombre de points par longueur d'onde est de 10. De plus, les résultats obtenus par la méthode hybride sont toujours plus précis que ceux obtenus par une méthode FDTD avec approximation en marches d'escalier.

References

- [1] A. Bendali and M. Souilah. Consistency estimates for a double layer potential and application to the numerical analysis of the boundary element approximation of acoustic scattering by a penetrable object. *Meth. of Comp.*, 62:65–91, 1994.
- [2] A. Taflov. *Computational Electrodynamics, The Finite-Difference Time Domain method*. Artech House, London, 1995.
- [3] Y. Chang and R.F. Harrington. A surface formulation for characteristic modes of bodies. Technical Report 2 AD/A 000 285 NTIS, U.S. department of commerce, *Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France*, 1974.
- [4] G. Cohen and P. Joly. Fourth order schemes for the heterogeneous acoustics equation. *Meth. in Appl. Mech. and Engin.*, 80:397–407, 1990.
- [5] Gary Cohen, editor. *Ecole des Ondes INRIA, Méthodes numériques d'ordre élevé pour les ondes en régime transitoire*. INRIA, collection didactique, 1994.
- [6] F. Collino, P. Joly, and F. Millot. Fictitious domain method for unsteady problems: application to electromagnetic scattering. *Third International Conference on mathematical and numerical*

aspects of wave propagation, 1995.

- [7] F. Collino, P. Joly, and F. Millot. Fictitious domain method for unsteady problems: application to electromagnetic scattering. Technical Report TR/EM/96/32, C.E.R.F.A.C.S, 42 Av. G. Coriolis, 31520, Toulouse France, 1996.
- [8] M.A. Dablain. The application of high order differencing for the scalar wave equation . *Geophysics*, 51(1):54–66, 1986.
- [9] T. Devèze. Application de schémas d'ordre 4 aux équations de maxwell. *Ecole des Ondes INRIA, Méthodes numériques d'ordre élevé pour les ondes en régime transitoire*, 1994.
- [10] C. Furse, S. Mathur, and OM P. Gandhi. Improvement to the Finite Difference Time Domain method for calculating the Radar Cross section of a perfectly conducting target. *IEEE trans. on microwave theory and techniques.*, 38(7):919–927, Jul. 1990.
- [11] J.C. Nedelec. Integral equations with non-integrable kernels. *Integral Equations Operator theory*, 5:561–572, 1982.
- [12] A. Sei. *Etude de schémas numériques pour des modèles de propagation d'ondes en milieu hétérogène*. PhD thesis, *Université Paris IX-Dauphine, 1991*, 1991.
- [13] A. Sei. Dispersion analysis of numerical wave propagation and its computational consequences. Technical Report TR93-51, Rice Univ., Novembre 1993.
- [14] K.S. Yee. Numerical Solutions of Initial Boundary Value Problems involving Maxwell's Equations in isotropic media. *IEEE trans. on Antennas and Propagation.*, 14:302–307, 1966.