

# SER et méthode des domaines fictifs

F. Collino\*<sup>†</sup>      P. Joly\*<sup>†</sup>      F. Millot<sup>†</sup>

July 20, 2001

**CERFACS REPORT IR/EM/96/32**

## Sommaire

Ce document constitue la première version du rapport d'avancement de l'étude réalisée pour le compte de l'Aérospatiale. Intitulée " COMPLEMENTS MATHEMATIQUES POUR LA METHODE FDTD APPLIQUEE AUX CALCULS DE SER", cette étude a été entreprise par l'équipe Electromagnétisme du CERFACS. Elle comprend deux paragraphes et une annexe. Le premier paragraphe étudie la détermination de la SER par la méthode dite des domaines fictifs. Le second analyse la possibilité d'une hybridation entre la méthode des domaines fictifs et la méthode FDTD avec approximation en marches d'escalier de la frontière. Quant à l'annexe, elle constitue un article décrivant la méthode des domaines fictifs appliquée aux problèmes de diffraction (article soumis à JCP). Elle résulte de travaux antérieurs à l'étude demandée par l'Aérospatiale.

---

\*INRIA, Domaine de Rocquencourt 78153 Le Chesnay

<sup>†</sup>CERFACS, 42 avenue G. Coriolis 31057 Toulouse

**Contents**

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Calcul de la surface équivalente radar sur des exemples génériques</b>	<b>6</b>
2.1	Tests de validité . . . . .	7
2.1.1	Tests de convergence . . . . .	7
2.1.2	Discretisation de l'obstacle . . . . .	9
2.2	Comparaison avec les autres méthodes . . . . .	13
2.2.1	Disque . . . . .	15
2.2.2	Demi-disque concave . . . . .	19
2.2.3	Demi-disque convexe . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Méthode hybride: Domaines fictifs et FDTD</b>	<b>21</b>
3.1	Introduction . . . . .	21
3.2	Champ proche-sismogramme . . . . .	26
3.3	SER . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>29</b>

## List of Figures

1	<i>configuration de la géométrie</i> . . . . .	8
2	<i>Variation temporelle de la source avec sa transformée de Fourier</i> . . . . .	8
3	<i>SE<math>R_{df1}</math> en fonction de l'angle d'observation pour <math>ka = 1</math> (- : valeur analytique, - : <math>h_v = 0.4, \dots : h_v = 0.2, - : h_v = 0.1</math>) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.</i> . . . . .	10
4	<i>SE<math>R_{df1}</math> en fonction de l'angle d'observation pour <math>ka = \frac{3\pi}{2}</math> (- : valeur analytique, - : <math>h_v = 0.4, \dots : h_v = 0.2, - : h_v = 0.1</math>) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.</i> . . . . .	10
5	<i>SE<math>R_{df1}</math> en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = 0</math> (- : valeur analytique, - : <math>h_v = 0.4, \dots : h_v = 0.2, - : h_v = 0.1</math>) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.</i> . . . . .	11
6	<i>SE<math>R_{df1}</math> en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = \pi</math> (- : valeur analytique, - : <math>h_v = 0.4, \dots : h_v = 0.2, - : h_v = 0.1</math>) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.</i> . . . . .	11
7	<i>SE<math>R_{df1}</math> en fonction de l'angle d'observation pour <math>ka = \frac{3\pi}{2}</math> (- : valeur analytique, - : <math>h_v = 0.4, \dots : h_v = 0.2, - : h_v = 0.1</math>) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.</i> . . . . .	12
8	<i>SE<math>R_{df2}</math> en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = 0</math> (- : valeur analytique, - : <math>h_v = 0.4, \dots : h_v = 0.2, - : h_v = 0.1</math>) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.</i> . . . . .	12
9	<i>SE<math>R_{df2}</math> en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = \pi</math> (- : valeur analytique, - : <math>h_v = 0.4, \dots : h_v = 0.2, - : h_v = 0.1</math>) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.</i> . . . . .	13
10	<i>SER en fonction de <math>\theta</math> pour <math>ka = \frac{3\pi}{2}</math> (La frontière du disque est approchée par des arcs de cercle de longueur <math>h_s</math>) (- : <math>h_s = \pi h_v, \dots : h_s = \frac{\pi h_v}{2}, - : h_s = \frac{\pi h_v}{4}</math>) . . . . .</i>	14
11	<i>SER en fonction de <math>\theta</math> pour <math>ka = 1</math> (- : la frontière est approchée par des arcs de cercle de longueur <math>h_s = \frac{\pi h_v}{2}, \dots : la frontière est approchée par des segments de longueur <math>h_s = \frac{\pi h_v}{2}, - : la frontière est approchée par des segments <math>h_s = \frac{\pi h_v}{4}</math>) . . . . .</math></math></i>	14
12	<i>SER en fonction de <math>\theta</math> pour <math>ka = 1</math> (- : la frontière est approchée par des arcs de cercle de longueur <math>h_s = \frac{\pi h_v}{2}, \dots : la frontière est approchée par des segments de longueur <math>h_s = \frac{\pi h_v}{2}, - : la frontière est approchée par des segments <math>h_s = \frac{\pi h_v}{4}</math>) . . . . .</math></math></i>	15
13	<i>Champ électromagnétique le long de <math>C_a</math> pour <math>ka = 1</math> (- : exact, ... : df1, - : ftd) . . . . .</i>	16
14	<i>SER en fonction de <math>\theta</math> pour <math>ka = 1</math> (- : exact, ... : df1, - : ftd <math>h_v = 0.2</math>, - : ftd <math>h_v = 0.1</math>) . . . . .</i>	16
15	<i>Champ électromagnétique le long de <math>C_a</math> pour <math>ka = \frac{3\pi}{2}</math> (- : exact, ... : df1, - : ftd) . . . . .</i>	17

16	<i>SER en fonction de <math>\theta</math> pour <math>ka = \frac{3\pi}{2}</math> ( -:exact, ... :df1, - -: ftdt)</i> . . . . .	17
17	<i>SER en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = 0</math> ( -:exact, ... :df1, - -: ftdt <math>h_v = 0.2</math>, -.:ftdt <math>h_v = 0.1</math>)</i> . . . . .	18
18	<i>SER en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = \pi</math> ( -:exact, ... :df1, - -: ftdt <math>h_v = 0.2</math>, -.:ftdt <math>h_v = 0.1</math>)</i> . . . . .	18
19	<i>configuration de la géométrie</i> . . . . .	19
20	<i>Energie électromagnétique dans le domaine de calcul en fonction du temps (</i> <i>-:disque, ... :demi-disque concave, - -: demidisque convexe)</i> . . . . .	20
21	<i>Zoom de la figure précédente</i> . . . . .	20
22	<i>SER en fonction de <math>\theta</math> pour <math>ka = 1</math> ( -:référence, ... :df1, - -: ftdt)</i> . . . . .	21
23	<i>SER en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = \pi</math> ( - . :exact, ... :df1 <math>h_s = \frac{\pi h_v}{2}</math>, - -: ftdt <math>h_s = \frac{\pi h_v}{4}</math>)</i> . . . . .	22
24	<i>SER en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = \pi</math> ( - . :exact, ... :df1 <math>h_s = \frac{\pi h_v}{2}</math>, - -: ftdt <math>h_s = \frac{\pi h_v}{4}</math>)</i> . . . . .	22
25	<i>SER en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = \pi</math> ( - . :exact, ... :df1 <math>h_s = \frac{\pi h_v}{2}</math>, - -: ftdt <math>h_s = \frac{\pi h_v}{4}</math>)</i> . . . . .	23
26	<i>configuration de la géométrie</i> . . . . .	23
27	<i>SER en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = \pi</math> ( - . :exact, ... :df1 <math>h_s = \frac{\pi h_v}{2}</math>, - -: ftdt <math>h_s = \frac{\pi h_v}{4}</math>)</i> . . . . .	24
28	<i>SER en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = \pi</math> ( - . :exact, ... :df1 <math>h_s = \frac{\pi h_v}{2}</math>, - -: ftdt <math>h_s = \frac{\pi h_v}{4}</math>)</i> . . . . .	24
29	<i>SER en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = \pi</math> ( - . :exact, ... :df1 <math>h_s = \frac{\pi h_v}{2}</math>, - -: ftdt <math>h_s = \frac{\pi h_v}{4}</math>)</i> . . . . .	25
30	<i>SER en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = \pi</math> ( - . :exact, ... :df1 <math>h_s = \frac{\pi h_v}{2}</math>, - -: ftdt <math>h_s = \frac{\pi h_v}{4}</math>)</i> . . . . .	25
31	<i>configuration de la geometrie</i> . . . . .	26
32	<i>configuration des points où sont pris les sismogrammes</i> . . . . .	27
33	<i>valeur du champ électrique au point M1 (3,4) (-:fictif ,...: ftdt,- -:hyb, et erreur absolue )</i> . . . . .	27
34	<i>valeur du champ électrique au point M2 (3,4) (-:fictif ,...: ftdt,- -:hyb)</i> . . . . .	28
35	<i>valeur du champ électrique au point M3 (13,3) (-:fictif ,...: ftdt,- -:hyb)</i> . . . . .	28
36	<i>valeur du champ électrique au point M4 (3,13) (-:fictif ,...: ftdt,- -:hyb)</i> . . . . .	29
37	<i>SER en fonction de <math>\theta</math> pour <math>ka = 1</math> (-:ei, ...:df1,- -:ftdt,-.:hyb)</i> . . . . .	30
38	<i>SER en fonction de <math>\theta</math> pour <math>ka = \pi</math> (-:ei, ...:df1,- -:ftdt,-.:hyb)</i> . . . . .	30
39	<i>SER en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = 0</math> (-:ei, ...:df1,- -:ftdt,-.:hyb)</i> . . . . .	31
40	<i>SER en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = \frac{\pi}{2}</math> (-:ei, ...:df1,- -:ftdt,-.:hyb)</i> . . . . .	31
41	<i>SER en fonction de <math>ka</math> pour <math>\theta = \pi</math> (-:ei, ...:df1,- -:ftdt,-.:hyb)</i> . . . . .	32

## 1 Introduction

Le calcul de la diffraction d'ondes par des objets métalliques ou revêtus ont de nombreuses applications dans l'aéronautique, citons par exemple l'évaluation de la surface équivalente radar (SER) des avions. Pour une onde monochromatique, la méthode numérique la plus précise est la méthode dite méthode des éléments finis de frontière. Le problème est alors posé sous la forme d'une équation intégrale dont l'inconnue est le courant surfacique sur l'objet diffractant. Après discrétisation, on obtient un système linéaire plein qui peut être de très grande taille pour les objets tridimensionnels. Cette méthode a ainsi un domaine d'application limité principalement par la taille de la mémoire des ordinateurs actuels. En outre certaines applications nécessitent la connaissance de l'onde sur une large plage de fréquences: on doit alors assembler puis résoudre autant de systèmes linéaires que de fréquences présentes dans la plage d'intérêt. Une alternative consiste à poser le problème de la diffraction dans le domaine temporel puis à appliquer une transformation de Fourier. On obtient ainsi la réponse du système pour l'ensemble des fréquences présentes dans le signal incident.

La résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires qui régissent la propagation des ondes électromagnétiques s'appuient principalement<sup>1</sup> sur des méthodes d'éléments finis ou, plus couramment, des méthodes aux différences finies (FDTD pour "finite difference time difference method"). La méthode par éléments finis, quoique présentant l'avantage de rendre compte correctement de la géométrie de l'objet diffractant, a pour inconvénient majeur de nécessiter l'inversion d'un système linéaire creux à chaque pas de temps, la condensation de masse étant à l'heure actuelle inaccessible pour les éléments tétraédriques. La FDTD connaît, de par la simplicité de sa mise en œuvre sur ordinateur, et comme en témoigne le récent livre de A.Taflove, une popularité croissante dans de nombreux domaines d'application. Le champ est calculé sur une grille régulière et une simple formule explicite permet l'itération temporelle. Ainsi, nulle résolution de système linéaire n'est requise et l'algorithme se prête bien à un traitement parallèle sur ordinateur. Toutefois, une difficulté demeure quant à la géométrie de l'objet sur lequel on doit imposer la condition à la limite, celle-ci pouvant être très mal approchée sur le maillage régulier de la grille de calcul. Pour certaines géométries, l'approximation dite en "marches d'escaliers" génèrent des diffractions parasites qui entachent le résultat du calcul si la discrétisation est par trop lâche. Des solutions, reposant sur une modification du schéma au voisinage de l'objet ont été proposées mais elles ont l'inconvénient majeur de diminuer de façon notable le pas de temps utilisé pour le calcul.

La méthode des domaines fictifs peut être une solution à cette difficulté. Par sa formulation générale, elle permet une prise en compte correcte de la géométrie et l'objet diffractant apparaît comme simple terme source dans les équations de la FDTD, ce terme source étant obtenu par résolution d'un "petit" système linéaire creux. L'idée consiste à prolonger la solution du problème extérieur à l'intérieur du domaine défini par le conducteur. Ce prolongement est unique si il est choisi comme la solution des équations de Maxwell qui est contrainte par la condition à la limite à la surface du conducteur. Cette contrainte fait naître un multiplicateur de Lagrange qui n'est autre que le courant surfacique sur l'objet. Ainsi, on est passé de la détermination d'un champ défini sur le domaine extérieur à l'objet à celle, conjointe, d'un champ défini sur tout l'espace et du courant à la surface du conducteur. Lors de la discrétisation, on peut choisir un maillage régulier pour le champ et un maillage surfacique classique pour le courant. Dans cette courte introduction, nous ne décrivons pas les détails de la méthode et renvoyons le lecteur intéressé à l'annexe constitué

---

<sup>1</sup> J'oublie ici les équations intégrales dans le domaine temporel qui sont l'objet d'une recherche très vivace

d'un article soumis à JCP. Toutefois, nous pouvons néanmoins mettre en avant les points suivants.

- La condition de stabilité du schéma n'est pas affectée par la présence de l'objet diffractant.
- Les maillages, volumique pour le champ électromagnétique, surfacique pour le courant, peuvent être choisis indépendamment, à la restriction prêt que le rapport entre le pas pour le courant et pas pour le champ ne soit pas trop petit.
- Les premiers tests numériques montrent une amélioration notable de la méthode des domaines fictifs par rapport à la FDTD avec discrétisation en marches d'escaliers du conducteur.

L'un des buts de ce rapport est d'analyser quantitativement cette amélioration sur des exemples de calcul de RCS à deux dimensions. On commencera par le cas, académique, du disque conducteur, puis du demi-disque conducteur.

Comme nous l'avons dit, la détermination du courant surfacique nécessite l'inversion à chaque pas de temps d'un système linéaire creux. La matrice du système linéaire couple deux degrés de liberté du courant si les éléments surfaciques qui les supportent intersectent un même cube de la grille de calcul sur lequel est évalué le champ électromagnétique. Si à deux dimensions d'espace, le temps de résolution reste faible en regard à celui nécessaire à l'intégration du schéma pour le champ, il peut ne pas en être de même pour le cas de gros objets. Comme de plus, l'approximation par marches d'escalier peut s'avérer suffisante pour une partie de l'objet, il est tentant de coupler les deux méthodes, en n'approchant par domaines fictifs qu'une partie du conducteur. Le courant n'est alors recherché que sur une partie de l'objet, diminuant ainsi la taille du système linéaire à inverser. Dans une seconde série d'expériences numériques bidimensionnelle, nous analyserons la potentialité d'une telle méthode mixte.

## 2 Calcul de la surface équivalente radar sur des exemples génériques

La SER permet de caractériser la puissance rayonnée par un corps diffractant à l'infini (i.e loin du corps) dans une direction considérée. Plus précisément, le processus de diffraction d'une onde plane génère à l'infini une onde sphérique qui est modulée suivant la direction d'observation. C'est cette modulation qui est caractérisée par la SER.

Le calcul du champ rayonné à l'infini peut être obtenu à partir du champ proche de l'obstacle. Pour cela, on définit une surface arbitraire  $C_a$  entourant le corps diffractant. Elle sépare alors la région intérieure contenant le corps diffractant de la région extérieure. Le champ électromagnétique tangent à cette surface virtuelle  $C_a$  est calculé de manière précise par une méthode numérique (par exemple la méthode des domaines fictifs). Une transformation champ proche-champ lointain permet ensuite de déduire l'amplitude du champ diffracté à l'infini et donc de calculer la SER. Une autre méthode pour calculer la SER est de calculer les valeurs du courant sur la surface du conducteur et d'utiliser une transformation champ proche-champ lointain pour déduire l'amplitude de diffraction et donc la SER. Plus précisément, une source dont la réponse fréquentielle possède une certaine excursion en fréquence, excite le milieu. Une transformée de Fourier discrète des valeurs du champ électromagnétique localisées sur la courbe  $C_a$  est réalisée sur l'intervalle de temps du calcul. Ainsi, pour chaque fréquence de l'excitation, l'amplitude de diffraction est calculée. On remarquera que en un seul calcul, la SER est obtenue sur toute une plage de fréquences.

Dans un premier temps, nous allons analyser la faisabilité de la détermination de la SER à l'aide de la méthode des domaines fictifs. Des tests de convergence sont effectués sur des cas canoniques. L'influence de la discrétisation de l'obstacle est étudiée. Dans un deuxième temps, ces calculs de SER sont comparés aux résultats obtenus par d'autres méthodes numériques en particulier la FDTD avec approximation en marche d'escalier de la frontière de l'obstacle couplée à une transformation champ proche-champ lointain et la méthode des éléments finis de frontière ou méthode d'équations intégrales. Dans tout ce qui suit, l'onde est polarisée transverse électrique. Les corps diffractants sont supposés parfaitement conducteurs.

## 2.1 Tests de validité

De part sa formulation, la méthode des domaines fictifs permet de calculer le champ proche de l'obstacle et donc en particulier le champ tangent à une surface virtuelle  $C_a$  entourant le corps diffractant. Mais aussi, elle détermine le courant électrique porté par le corps (lié au multiplicateur de Lagrange). On peut utiliser l'une ou l'autre des méthodes pour calculer la SER. Afin de simplifier l'écriture, on note:

- $SER_{df1}$  : la SER calculée par la transformation champ proche-champ lointain où le champ électromagnétique tangent à la surface virtuelle  $C_a$  est obtenu par la méthode des domaines fictifs.
- $SER_{df2}$ : la SER calculée par la transformation champ proche-champ lointain où la dérivée temporelle du courant électrique sur l'obstacle est obtenue par la méthode des domaines fictifs.

La discrétisation de la méthode des domaines fictifs fait intervenir deux maillages indépendants :

- un maillage "volumique" permettant de discrétiser l'espace où le champ électromagnétique est recherché et dont le pas est noté  $h_v$  (dans notre cas, un maillage cubique),
- un maillage "surfaique" discrétisant l'obstacle dont le pas est noté  $h_s$ .

Dans un premier temps, on va regarder l'évolution des résultats obtenus par les méthodes df1 et df2 lorsque le pas  $h_v$  tend vers zéro afin de valider la méthode. Dans un second temps, l'influence de la discrétisation de l'obstacle est étudiée. Ces tests sont réalisés sur le cas canonique du disque parfaitement conducteur. Des expressions analytiques du champ électromagnétique et de la SER peuvent être alors trouvées.

**Remarque:** lors du calcul de la SER, la définition de la surface  $C_a$  entourant l'obstacle est arbitraire. On choisit un rectangle localisé sur le maillage volumique.

### 2.1.1 Tests de convergence

L'expression analytique de la SER pour un disque de rayon  $a$  illuminé par une onde plane dont le vecteur d'onde vaut  $k$ , s'écrit

$$(1) \quad SER_{the}(\theta, k, a) = \frac{4}{k} \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} \cos(n\theta) + \frac{J'_0(ka)}{H_0^{(2)'}(ka)} \right)^2$$

où  $J'_n$  est la dérivée de la fonction de Bessel d'ordre  $n$  et  $H_n^{(2)'}$  la dérivée de la fonction de Hankel de deuxième espèce d'ordre  $n$  et  $\theta$  est l'angle de la direction d'observation. Le disque est éclairé par une onde plane (cf fig 1) dont la dépendance temporelle (cf fig (2))

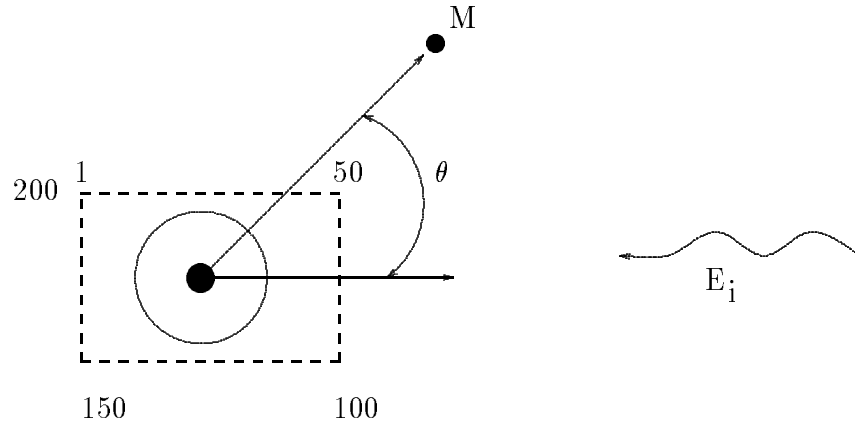


FIG. 1. configuration de la géométrie

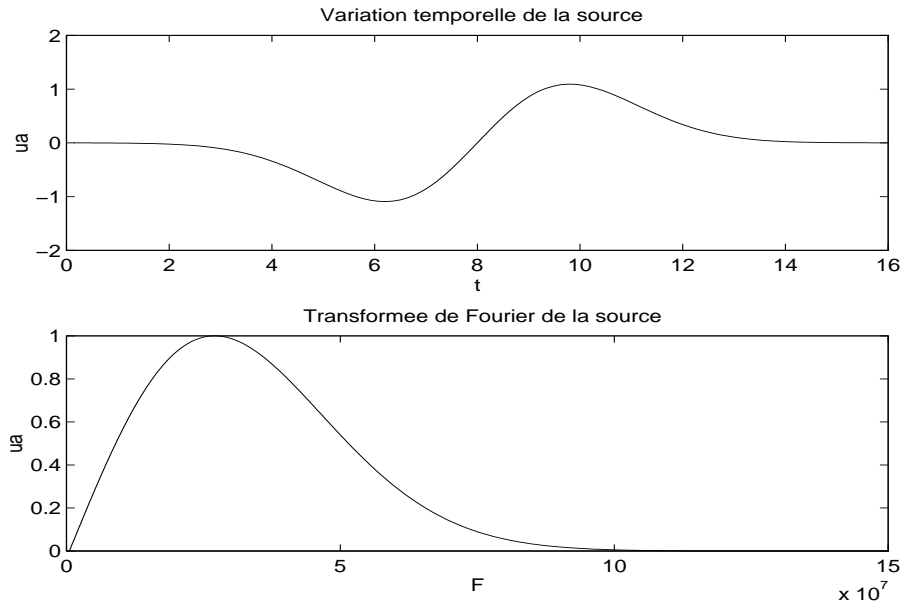


FIG. 2. Variation temporelle de la source avec sa transformée de Fourier

est donnée par

$$(2) \quad g(t) = \frac{d}{dt} \left( \exp \left( -(\pi F_{sou}(t - 1/F_{sou}))^2 \right) \right)$$

où  $F_{sou}$ , la fréquence de la source est fixée à  $37.5 \text{ MHz}$ .

La plus petite longueur d'onde,  $\lambda_{min}$ , contenue dans l'impulsion incidente est de l'ordre de  $4m$ .

Le pas en temps  $\Delta t$  est choisi tel que  $\frac{\Delta t}{h_v} = \sqrt{2}$  afin de satisfaire la condition de stabilité du schéma numérique.

La frontière du disque est approchée par un polygone dont les côtés ont une longueur

égale à  $h_s$ . Ce pas est choisi égal à  $\frac{3h_v}{2}$ . Le rapport  $h_s/h_v$  est gardé constant dans ce paragraphe.

La valeur de la SER dépend essentiellement de deux paramètres,  $ka$  et l'angle d'observation  $\theta$ . Celui-ci est compté dans le sens direct à partir du centre du cercle(cf fig (1)). Nous avons d'abord fixé la valeur du produit  $ka$  et regardé les variations de la SER en fonction de  $\theta$  pour différentes valeurs du pas volumique  $h_v$ . La valeur analytique de la SER en fonction  $\theta$  pour  $ka = 1$  est donnée par la figure (3). Sur cette figure, sont aussi représentées les valeurs de la  $SER_{df1}$  pour trois pas de discrétisation  $h_v$ . Les quatre courbes sont pratiquement confondues. Afin de mieux quantifier leur écart, l'erreur relative de la SER par rapport à la valeur analytique

$$(3) \quad err = \left| \frac{SER_{df1} - SER_{the}}{SER_{the}} \right|$$

est donnée par la figure (3). Celle-ci est en moyenne inférieure à 5 % et diminue avec le pas en espace. La figure (4) donne les mêmes résultats mais pour  $ka = \frac{3\pi}{2}$ . On note que l'écart entre les courbes est dans ce cas-ci plus important. En effet, le nombre de points par rapport à la longueur d'onde d'observation a diminué d'un facteur 5.

Il est maintenant intéressant de faire varier le produit  $ka$  en gardant l'angle d'observation fixé. La plus petite longueur d'onde contenue dans l'onde incidente limite l'excursion possible en  $ka$ . En effet

$$(4) \quad ka = kh_v \frac{a}{h_v} = 2\pi \frac{h_v}{\lambda} \frac{a}{h_v}$$

Si le rapport  $a/h_v$  est de l'ordre de 20 et que le nombre de points par longueur d'onde est fixé égal à 20, cela impose une valeur de  $ka$  inférieure à  $2\pi$ . Les courbes (5) et (6) donnent les valeurs de la SER en fonction de  $ka$  pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  et l'erreur relative pour trois valeurs de  $h_v$ .

On remarque que sur tous les cas testés, la  $SER_{df1}$  converge bien vers la valeur analytique de la SER lorsque le pas  $h_v$  tend vers zéro. De plus, en dehors des couples  $(\theta, ka)$  où la SER est proche de zéro, l'erreur commise sur la SER reste relativement faible. En particulier, lorsque  $h_v$  vaut 0.2 (c'est-à-dire dans le cas où le nombre de points par longueur d'onde  $\lambda_{min}$  vaut 20), l'erreur relative est toujours inférieure à 5%.

Des résultats comparables ( 7,8 et 9) sont obtenus en utilisant la méthode df2.

**Conclusion:** dans tous les cas testés, il s'avère que la SER calculée par les méthodes df1 ou df2 converge bien vers la valeur analytique quand le pas  $h_v$  tend vers zéro. En revanche, il est difficile au vu des tests effectués de préférer une des deux méthodes. C'est pourquoi dans les paragraphes suivants, seule la méthode df1 sera utilisée. Nous allons maintenant regarder l'influence de la discrétisation de l'obstacle et en particulier l'effet du rapport  $h_s/h_v$ .

### 2.1.2 Discrétisation de l'obstacle

La prise en compte de la contrainte à la limite de l'obstacle fait apparaître une matrice "dite matrice de frontière" (cf annexe). Celle-ci couple le champ électrique avec le multiplicateur de Lagrange c'est-à-dire au courant. Elle nécessite de calculer l'intersection entre les deux maillages volumique et surfacique. De plus, les éléments non nuls de cette matrice résultent d'une intégration curviligne le long de la frontière de l'obstacle.

Dans un premier temps, la frontière du disque est discrétisée en arc de cercle de longueur  $h_s$ . Le courant est alors cherché constant sur chaque arc de cercle. Le pas  $h_v$  est fixé à 0.2 c'est-à-dire que le nombre de points par longueur d'onde  $\lambda_{min}$  vaut 20). La modification

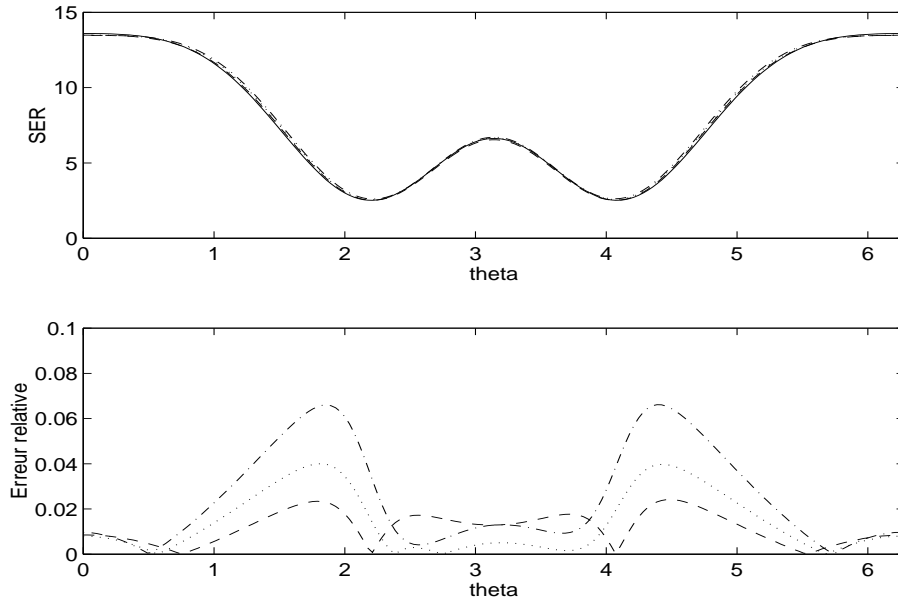


FIG. 3.  $SER_{df1}$  en fonction de l'angle d'observation pour  $ka = 1$  (- : valeur analytique, -.- :  $h_v = 0.4$ , ... :  $h_v = 0.2$ , - - :  $h_v = 0.1$ ) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

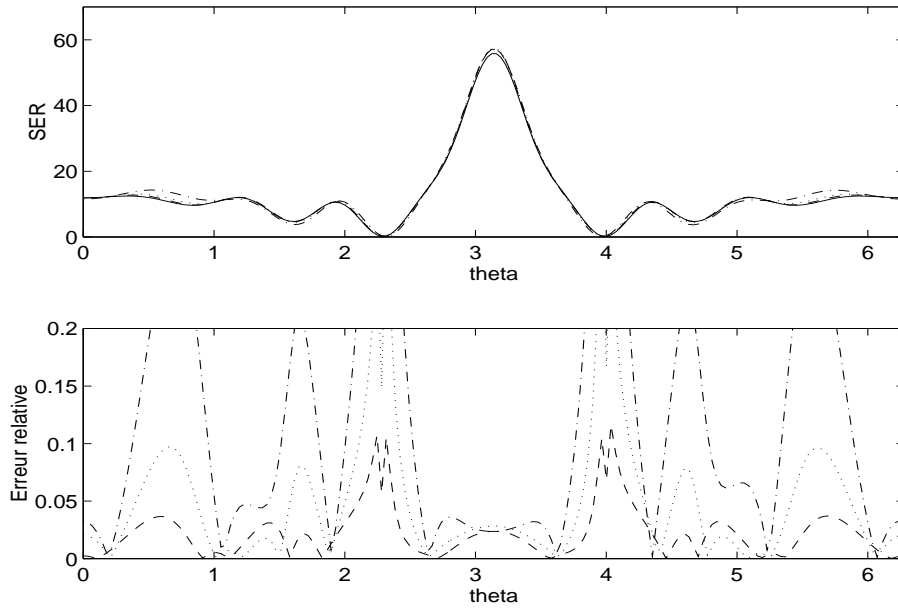


FIG. 4.  $SER_{df1}$  en fonction de l'angle d'observation pour  $ka = \frac{3\pi}{2}$  (- : valeur analytique, -.- :  $h_v = 0.4$ , ... :  $h_v = 0.2$ , - - :  $h_v = 0.1$ ) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

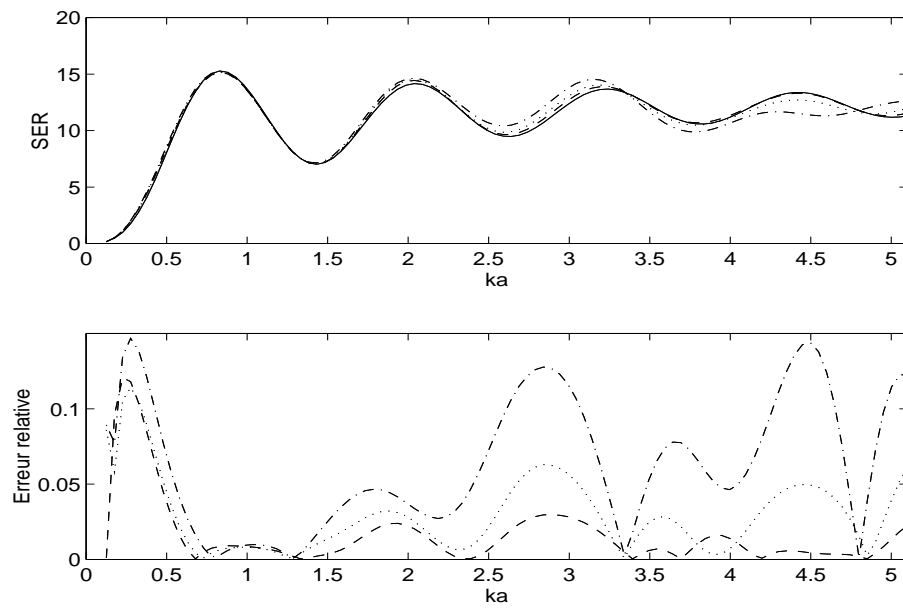


FIG. 5.  $SER_{df1}$  en fonction de  $ka$  pour  $\theta = 0$  (- : valeur analytique, - :  $h_v = 0.4$ , ... :  $h_v = 0.2$ , - :  $h_v = 0.1$ ) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

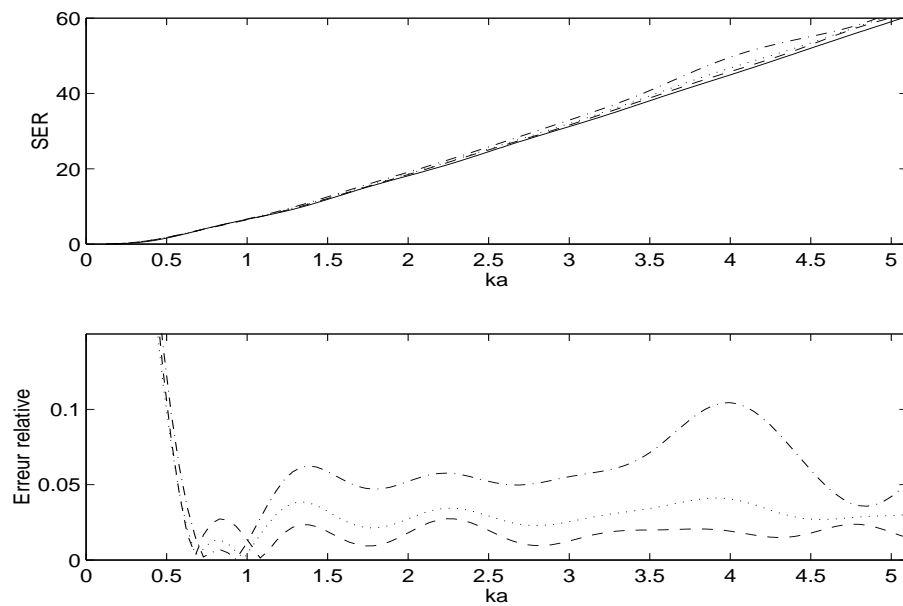


FIG. 6.  $SER_{df1}$  en fonction de  $ka$  pour  $\theta = \pi$  (- : valeur analytique, - :  $h_v = 0.4$ , ... :  $h_v = 0.2$ , - :  $h_v = 0.1$ ) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

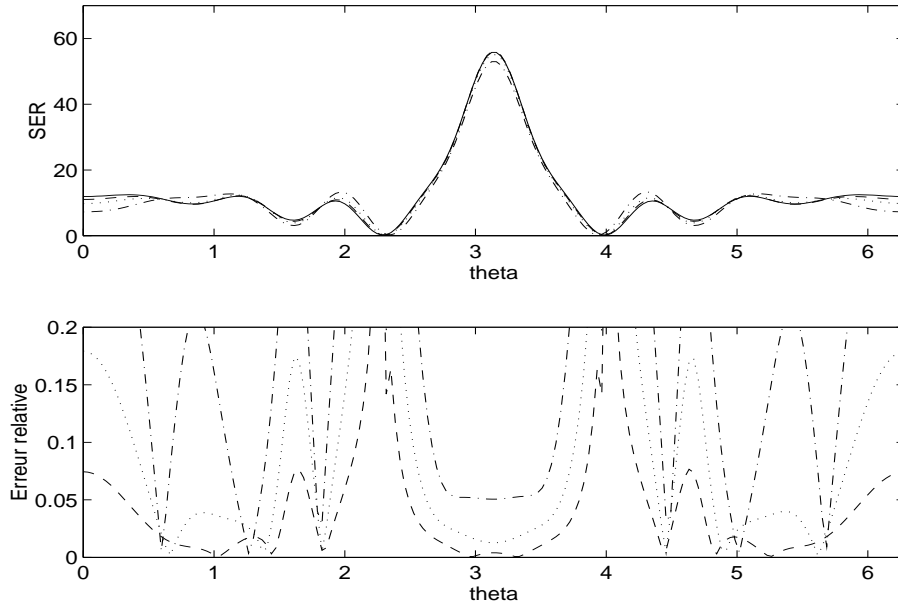


FIG. 7.  $SER_{df1}$  en fonction de l'angle d'observation pour  $ka = \frac{3\pi}{2}$  (- : valeur analytique, -.- :  $h_v = 0.4$ , ... :  $h_v = 0.2$ , - - :  $h_v = 0.1$ ) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

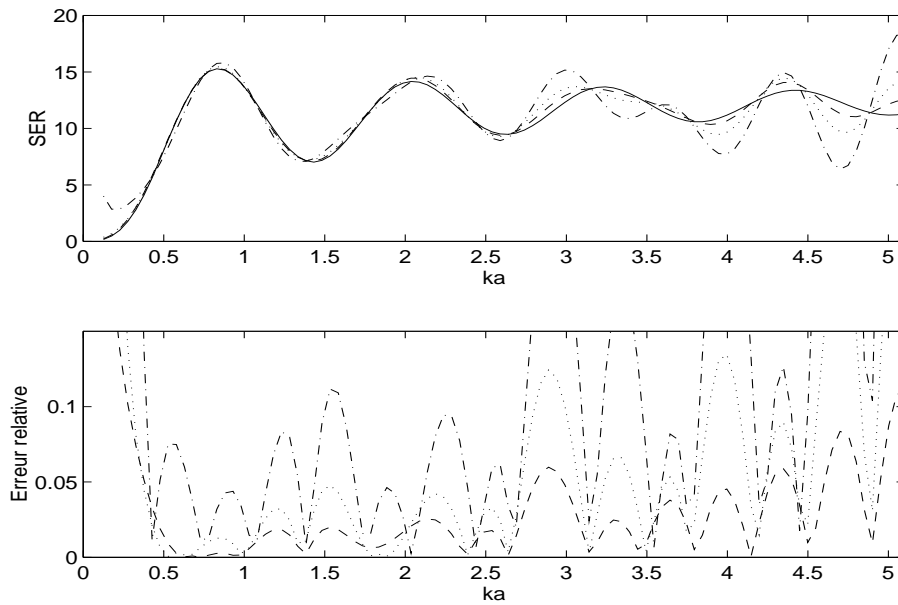


FIG. 8.  $SER_{df2}$  en fonction de  $ka$  pour  $\theta = 0$  (- : valeur analytique, -.- :  $h_v = 0.4$ , ... :  $h_v = 0.2$ , - - :  $h_v = 0.1$ ) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

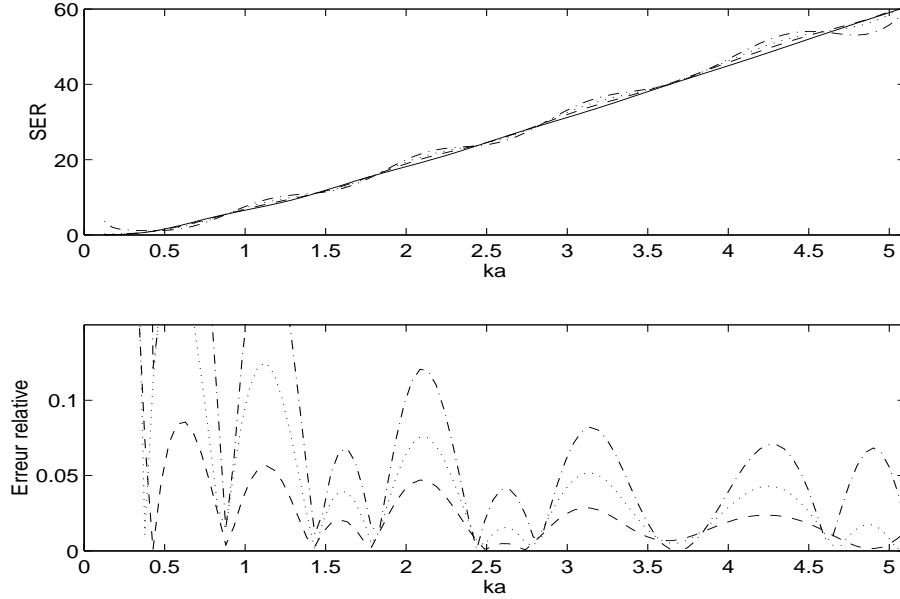


FIG. 9.  $SER_{df2}$  en fonction de  $ka$  pour  $\theta = \pi$  ( - : valeur analytique, -.- :  $h_v = 0.4$ , ... :  $h_v = 0.2$ , -.- :  $h_v = 0.1$ ) et erreur relative par rapport à la valeur analytique.

de la longueur des arcs (10) entraîne peu d'évolution des valeurs de la SER à condition toutefois que le rapport  $\frac{h_s}{h_v}$  ne devienne pas trop petit. La frontière du disque est ensuite approchée par un polygone dont les côtés ont tous la même longueur égale à  $h_s$ . Le courant est alors constant sur ces segments. Les résultats obtenus (11) et (12) sont identiques aux précédents. On voit peu de modification des courbes d'erreurs lorsque le rapport  $h_s/h_v$  varie. On note aussi que l'approximation en polygone et celle par arc de cercle de la frontière donnent à peu près les mêmes résultats.

**Conclusion** On remarque que la discrétisation de l'obstacle influe peu sur le calcul de la SER à condition toutefois que le rapport  $h_s/h_v$  reste au voisinage de un.

Il est maintenant intéressant de comparer les résultats obtenus par les domaines fictifs avec ceux obtenus par une méthode classique de différences finies. Le paragraphe suivant va réaliser cette comparaison sur quelques cas canoniques : disque, demi-arc de cercle.

## 2.2 Comparaison avec les autres méthodes

La façon la plus simple de traiter les conducteurs parfaits dans la méthode des différences finies est d'approcher la frontière de l'obstacle par une courbe en escalier qui coïncide avec le maillage. Il est alors facile d'imposer la condition de champ électrique tangent égal à zéro en annulant certaines composantes du champ sur cette courbe en escalier. Par abus de langage, cette méthode dans la suite du rapport sera notée méthode de différences finies. Afin de comparer cette méthode à celle des domaines fictifs, on définit

- $SER_{fddd}$  : la SER calculée par la transformation champ proche-champ lointain(1) où le champ électromagnétique tangent à la surface virtuelle  $C_a$  est obtenu par la méthode de différences finies et où la frontière de l'obstacle est approchée en marches d'escalier.

Le cas canonique du disque est d'abord analysé.

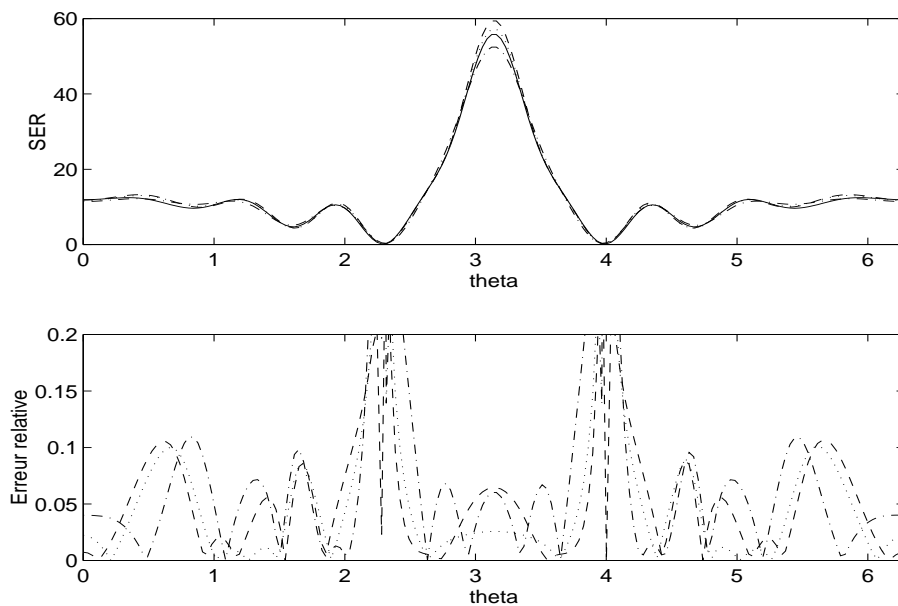


FIG. 10. *SER en fonction de  $\theta$  pour  $ka = \frac{3\pi}{2}$  (La frontière du disque est approchée par des arcs de cercle de longueur  $h_s$ ) ( - . :  $h_s = \pi h_v$ , ... :  $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$ , - - :  $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$  )*

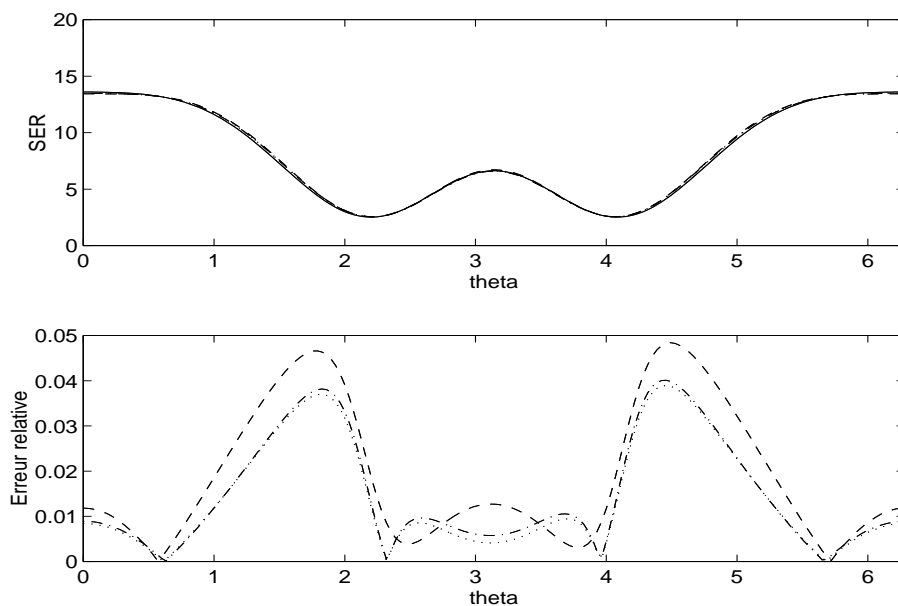


FIG. 11. *SER en fonction de  $\theta$  pour  $ka = 1$  ( - . : la frontière est approchée par des arcs de cercle de longueur  $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$ , ... : la frontière est approchée par des segments de longueur  $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$ , - - : la frontière est approchée par des segments  $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$  )*

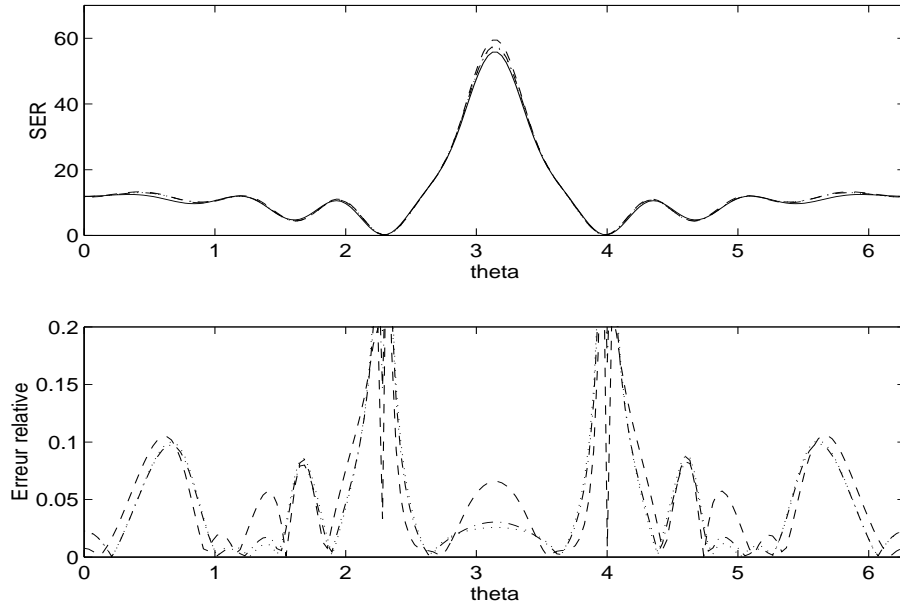


FIG. 12. *SER en fonction de  $\theta$  pour  $ka = 1$  ( - . : la frontière est approchée par des arcs de cercle de longueur  $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$ , ... : la frontière est approchée par des segments de longueur  $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$ , - - : la frontière est approchée par des segments  $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$  )*

### 2.2.1 Disque

Le disque est éclairé par une onde dont la dépendance temporelle est donnée par la figure (2). Le pas  $h_v$  est fixé égal à 0.2 soit  $\frac{\lambda_{min}}{h_v} = 20$ . Pour la méthode des domaines fictifs, la frontière du disque est approchée par un polygone de côté  $h_s = \frac{3}{2}h_v$ . Pour la méthode des différences finies, le disque a un rayon de 20 mailles.

Les figures (13) et (15) donnent les valeurs du champ électromagnétique le long du contour  $C_a$  (cf fig 1) pour deux valeurs de  $ka$ . On notera une bonne concordance sur les parties réelles du champ alors qu'on peut voir un écart entre les courbes pour les parties imaginaires surtout dans la zone d'ombre. De plus, lorsque le produit  $ka$  augmente, les valeurs du champ obtenu par différences finies s'écartent de la valeur analytique. Ce qui n'est pas le cas lorsque le champ proche est calculé par les domaines fictifs à l'exception faite de la zone d'ombre.

Pour une discrétisation en espace fixée, la valeur de la SER obtenue à l'aide des domaines fictifs est plus proche des valeurs analytiques (cf figures 14, 16,17 et 18 ). Sur ces figures, est aussi dessinée la valeur de la  $SER_{fdd}$  lorsque  $h_v$  vaut 0.1 soit 40 points par longueur d'onde  $\lambda_{min}$  et que le disque a un rayon de 40 mailles. On notera que cette courbe se rapproche des valeurs obtenues par la méthode des domaines fictifs mais pour une discrétisation de 20 points par longueur d'onde  $\lambda_{min}$ .

**Remarque:** nous avons été surpris d'obtenir des erreurs relatives assez importantes (5% à 10 %) pour une discrétisation de 20 points par  $\lambda_{min}$  lorsque on utilise soit la méthode des différences finies soit la méthode des domaines fictifs.

**Conclusion** Sur le cas du disque, la méthode des domaines fictifs permet de calculer de manière précise la SER. De plus, les résultats obtenus sont plus proches des valeurs analytiques que ceux obtenus par une méthode de différences finies. Ceci est dû au fait que la méthode des domaines fictifs permet de mieux prendre en compte la condition à la limite

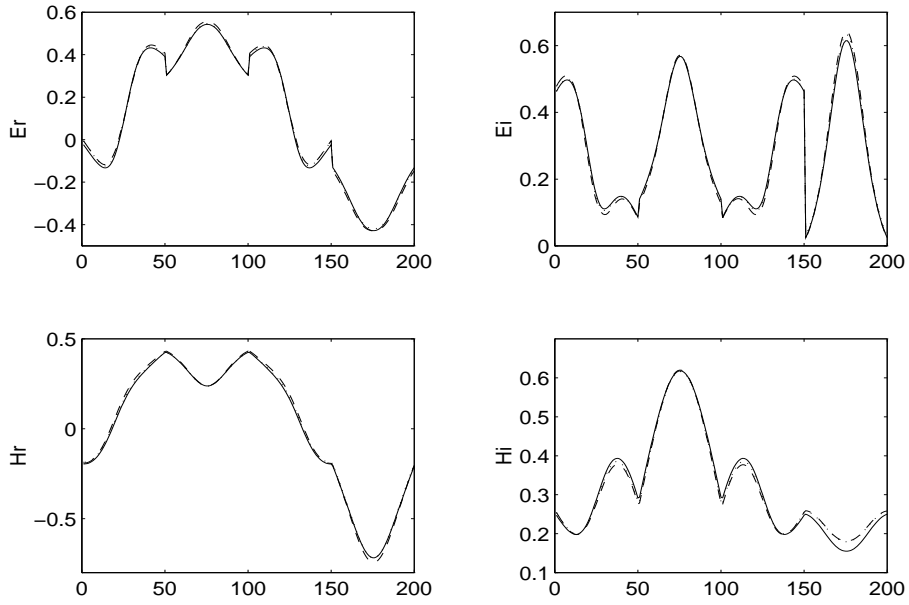


FIG. 13. Champ électromagnétique le long de  $C_a$  pour  $ka = 1$  ( - :exact, ... :df1, - -:ftdt)

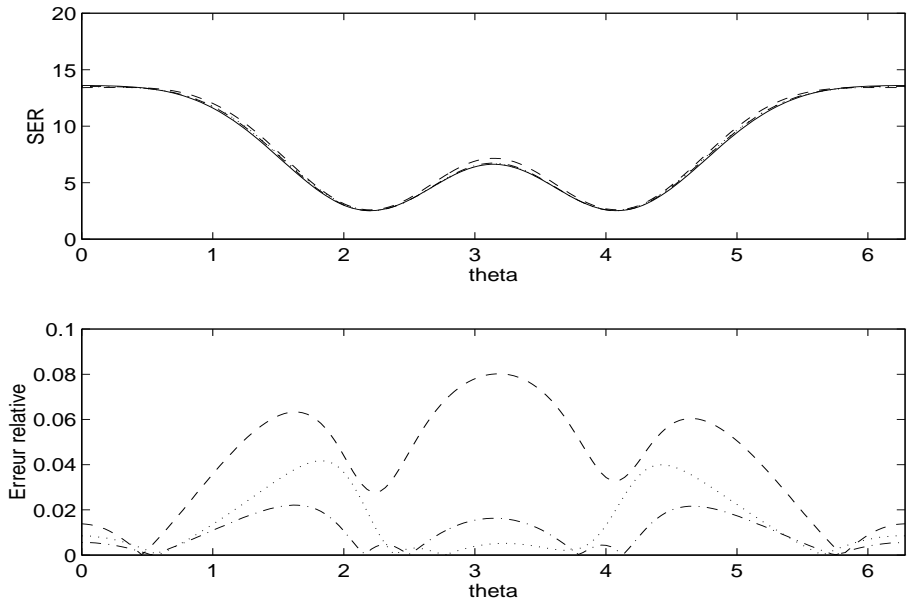


FIG. 14. SER en fonction de  $\theta$  pour  $ka = 1$  ( - :exact, ... :df1, - -: ftdt  $h_v = 0.2$  , - . :ftdt  $h_v = 0.1$ )

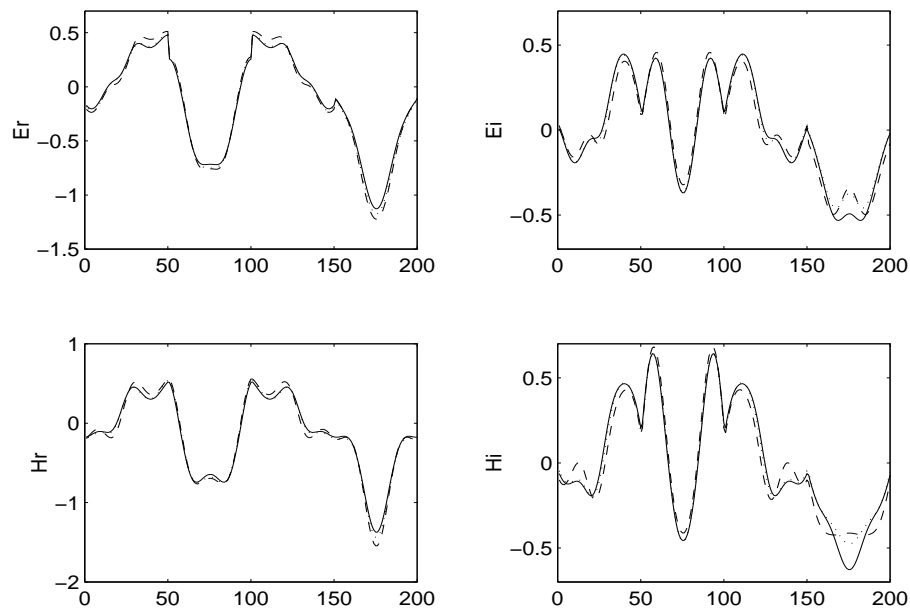


FIG. 15. Champ électromagnétique le long de  $C_a$  pour  $ka = \frac{3\pi}{2}$  ( - :exact, ... :df1, - - :ftd)

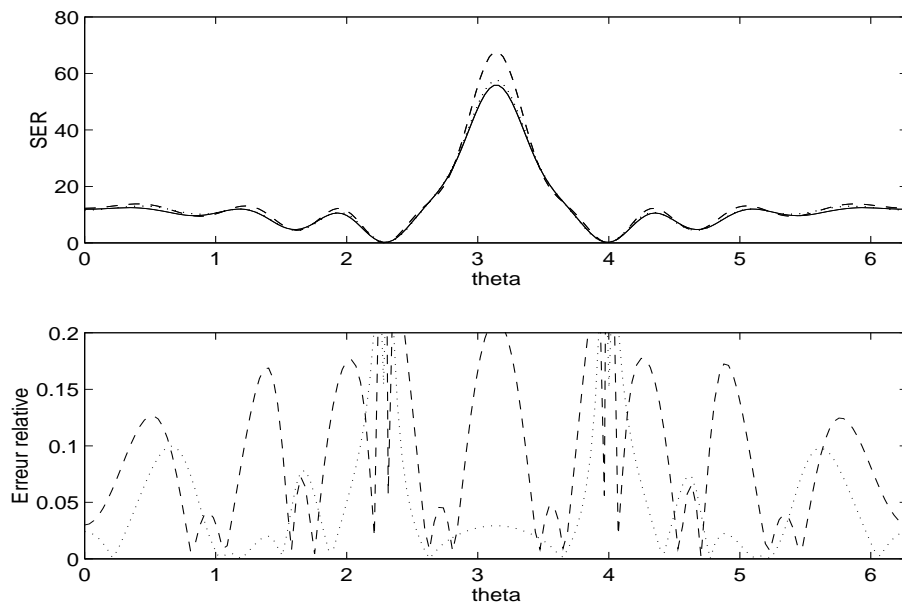


FIG. 16. SER en fonction de  $\theta$  pour  $ka = \frac{3\pi}{2}$  ( - :exact, ... :df1, - - :ftd)

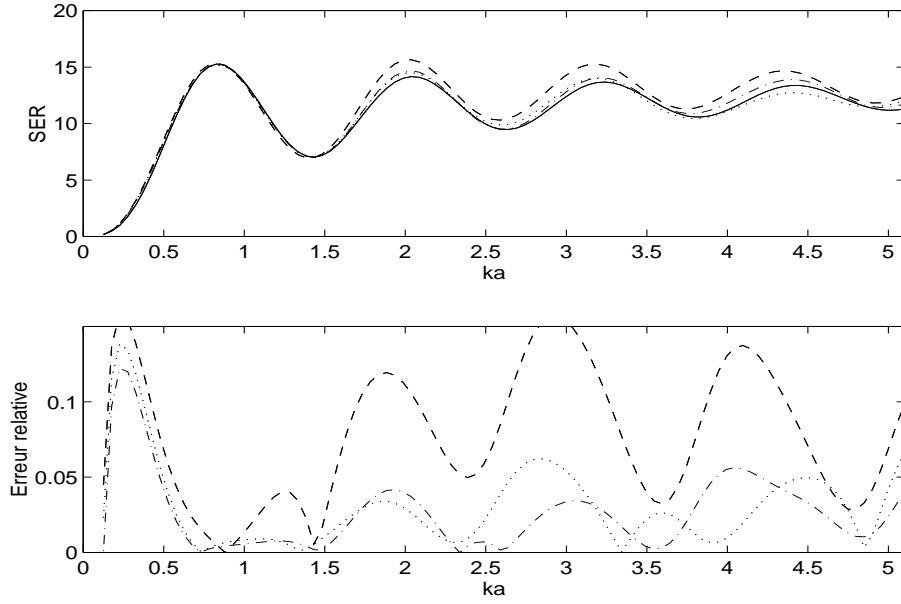


FIG. 17.  $SER$  en fonction de  $ka$  pour  $\theta = 0$  ( - :exact, ... :df1, - - : ftd  $h_v = 0.2$  , - . :ftd  $h_v = 0.1$ )

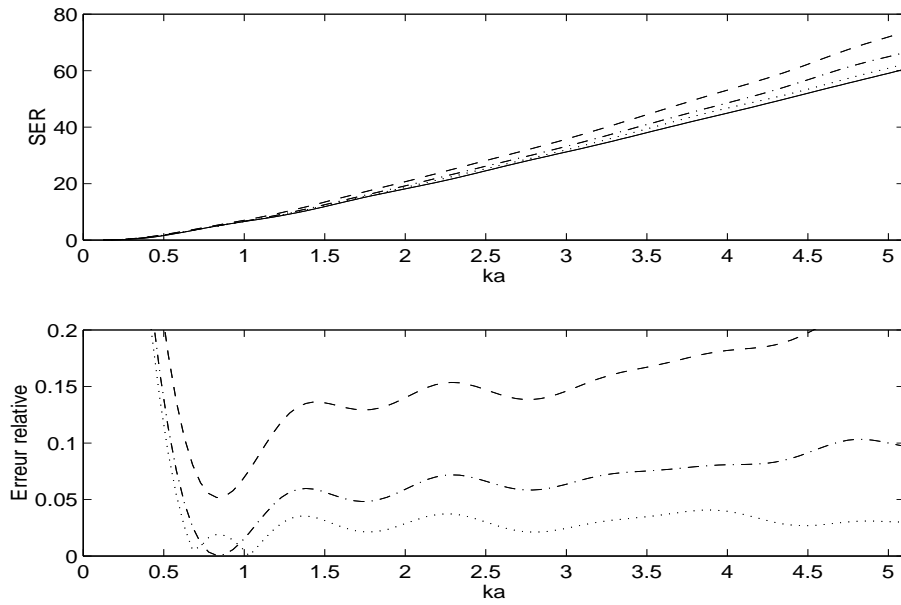
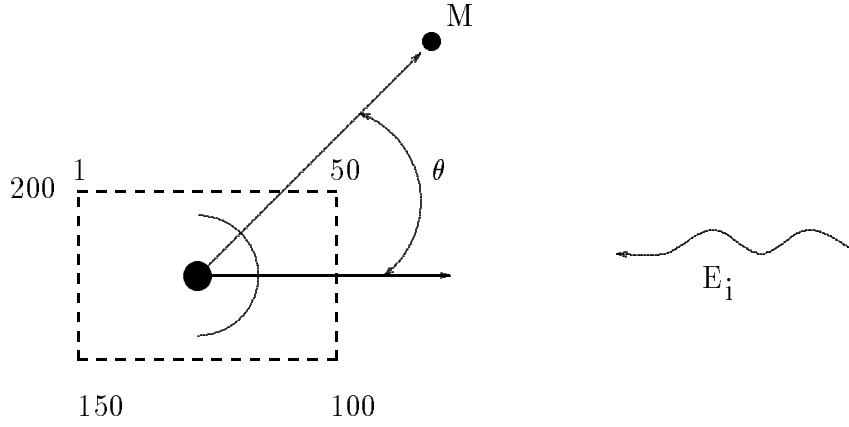


FIG. 18.  $SER$  en fonction de  $ka$  pour  $\theta = \pi$  ( - :exact, ... :df1, - - : ftd  $h_v = 0.2$  , - . :ftd  $h_v = 0.1$ )

FIG. 19. *configuration de la gèomètrie*

et de calculer de manière plus précise le champ près de l'obstacle.

Les corps diffractants testés ont été jusqu'à présent des corps réguliers sans singularité et convexes. En particulier, ils ne présentent pas de cavité où le champ électromagnétique pourrait se piéger. C'est pourquoi il nous est apparu intéressant de calculer la SER par les domaines fictifs sur des corps présentant quelques singularités.

**Remarque** Nous avons aussi comparé les résultats obtenus par la méthode des domaines fictifs avec ceux obtenus par une méthode des éléments finis de frontière. Il s'avère toujours que les valeurs obtenues à l'aide de la méthode des éléments finis de frontière sont toujours de précision supérieure. C'est pourquoi pour les cas suivants où des expressions analytiques ne peuvent être trouvées, cette méthode donnera les valeurs de référence.

Dans les paragraphes suivants, nous allons étudier le cas canonique du demi-arc de cercle (cf fig 19 et 26). Cet exemple présente des deux singularités aux extrémités. De plus, le champ électromagnétique peut être piégé dans la demi-cavité.

### 2.2.2 Demi-disque concave

Le demi disque concave présente sa concavité à l'onde incidente (19). Il est illuminé par une onde dont la dépendance temporelle est donnée par la figure (2). Le pas  $h_v$  est fixé égal à 0.2 soit  $\frac{\lambda_{min}}{h_v} = 20$ . Pour la méthode des domaines fictifs, la frontière du demi-disque est approchée par un polygone de côté  $h_s = \frac{3}{2}h_v$ . Pour la méthode des différences finies, le demi-disque a un rayon de 20 mailles. On note a le rayon du demi-disque. Nous rappelons que la référence est maintenant obtenue par une méthode des éléments finis de frontière avec 40 degrés de liberté.

Nous avons remarqué que pour obtenir la convergence des résultats de la  $SER_{df1}$  ou  $SER_{fdd}$ , il est nécessaire de calculer la transformée de Fourier sur un intervalle de temps plus important. Ceci est essentiellement dû au fait que l'énergie électromagnétique est piégée dans la cavité (cf fig 20 et 21).

La valeur de la  $SER_{df1}$  est donnée par les figures (22) et (23) lorsque l'angle d'observation varie. On remarque que cette valeur reste proche de la valeur de référence. L'erreur relative est de l'ordre de 5 %. On note une légère dégradation lorsque le produit  $ka$  augmente du fait que le nombre de points par longueur d'onde  $\lambda_{min}$  diminue. Sont données sur ces

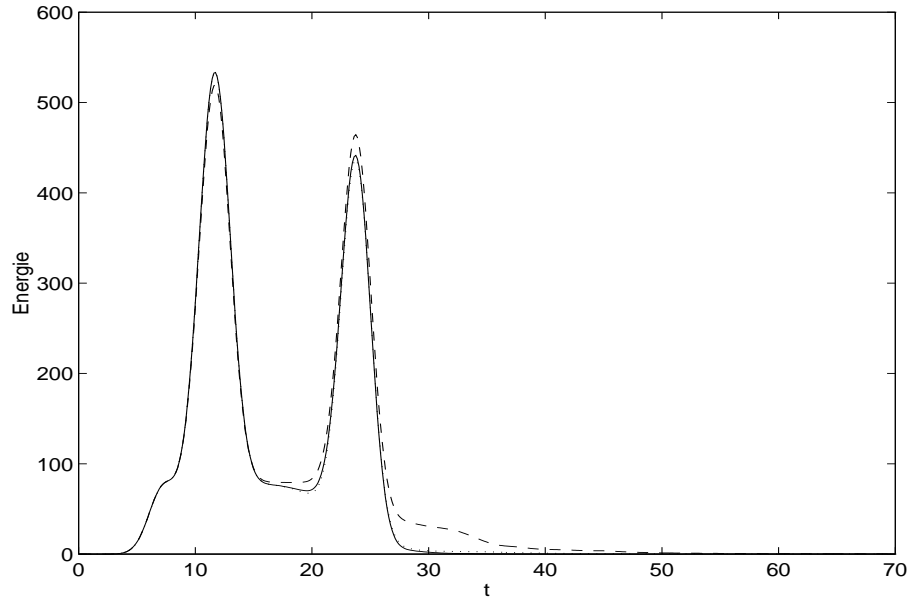


FIG. 20. *Energie électromagnétique dans le domaine de calcul en fonction du temps ( - : disque, ... : demi-disque concave, - - : demidisque convexe)*

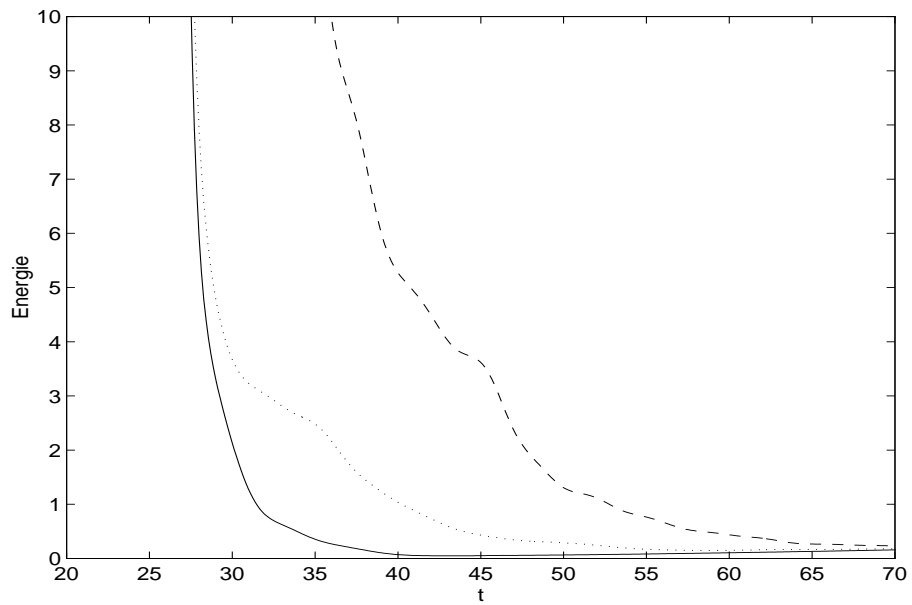


FIG. 21. *Zoom de la figure précédente*

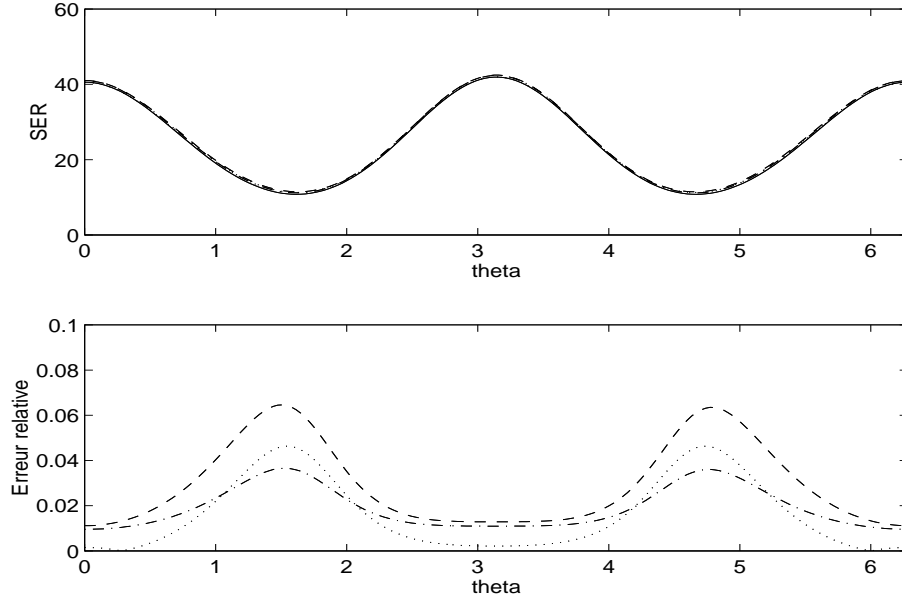


FIG. 22.  $SER$  en fonction de  $\theta$  pour  $ka = 1$  ( -:référence, ... :df1, - -: fdt)

courbes les valeurs de la  $SER_{fdtd}$  pour deux pas de discrétisation. On note que l'erreur relative pour la  $SER_{fdtd}$  est plus élevée d'un facteur environ 2 ou 3 par rapport à la valeur de la  $SER_{df1}$  lorsque le rapport  $h_v/\lambda_{min}$  est identique pour les deux méthodes. En revanche, l'erreur relative de la  $SER_{fdtd}$  obtenue pour 40 points par longueur d'onde  $\lambda_{min}$  se rapproche des valeurs obtenues par la méthode des domaines fictifs pour un rapport  $h_v/\lambda_{min}$  égal à 20.

Nous avons ensuite fait varier le rapport  $ka$  en gardant l'angle d'observation fixé (24 et 25). Les résultats sont identiques aux précédents.

### 2.2.3 Demi-disque convexe

Le demi disque convexe présente sa cavité à l'onde incidente (26). Pour réaliser les tests numériques, on utilise les mêmes conditions que précédemment.

Nous rappelons que la référence est maintenant obtenue par une méthode des éléments finis de frontière avec 40 degrés de liberté. La méthode des domaines fictifs fournit les mêmes résultats (27) et (28) dans cette configuration (26) que pour la précédente (19). En revanche, il semble que pour cette configuration, l'erreur relative entre la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis de frontière augmente (28, 29). Elle reste toujours supérieure à l'erreur obtenue par la méthode des domaines fictifs.

**Conclusion:** la méthode des domaines fictifs permet de calculer de manière assez précise la SER même pour des objets présentant des cavités. De plus, elle fournit des résultats dont la précision est supérieure à ceux obtenus par une méthode de différences finies. L'erreur relative reste faible de l'ordre de 5%.

## 3 Méthode hybride: Domaines fictifs et FDTD

### 3.1 Introduction

La méthode des domaines fictifs couplée à une transformation champ proche-champ lointain permet de calculer la SER avec une précision relativement bonne. Mais cette méthode nécessite de discrétiser tout le corps diffractant, ce qui peut s'avérer prohibitif en taille

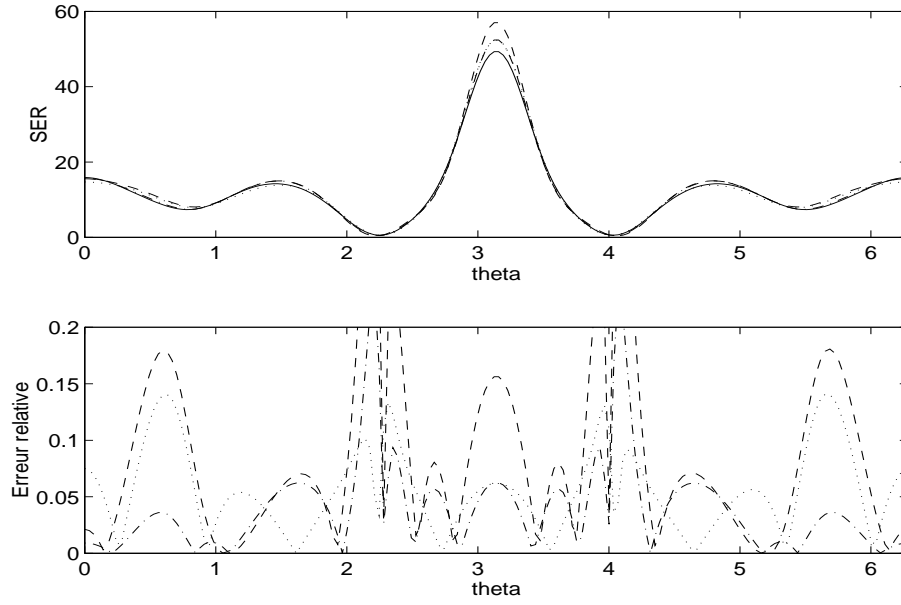


FIG. 23. SER en fonction de  $ka$  pour  $\theta = \pi$  ( - . : exact, ... :df1  $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$ , - - : ftd  $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$  )

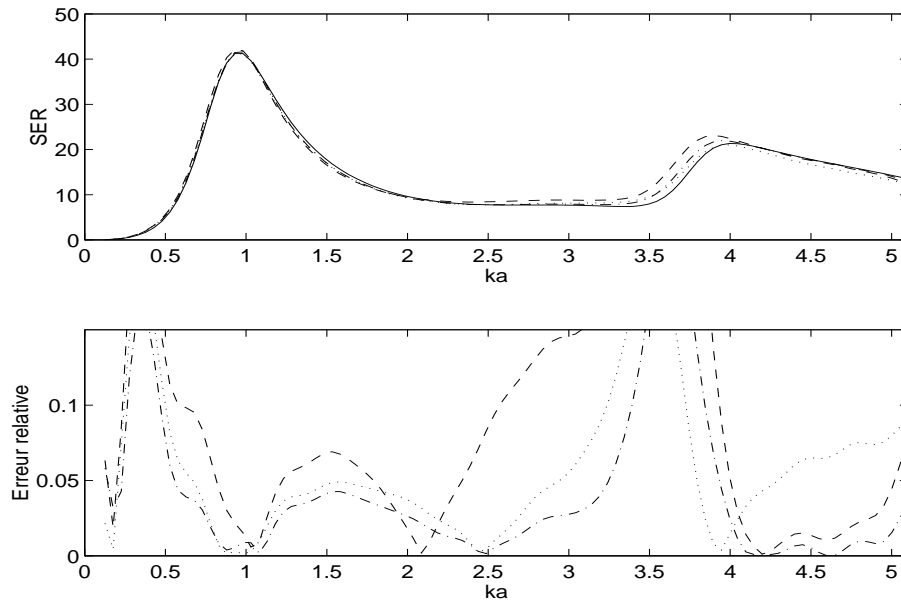


FIG. 24. SER en fonction de  $ka$  pour  $\theta = \pi$  ( - . : exact, ... :df1  $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$ , - - : ftd  $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$  )

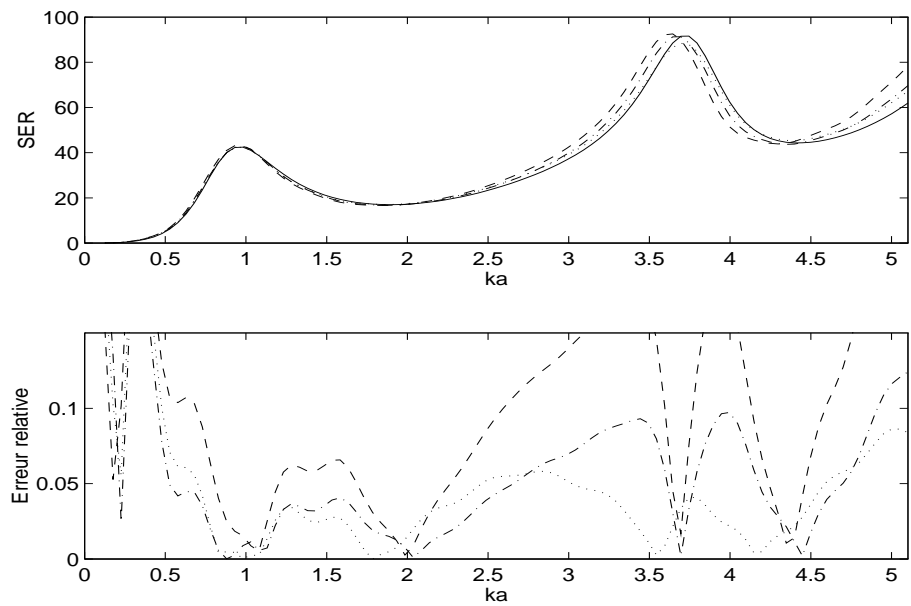


FIG. 25. SER en fonction de  $ka$  pour  $\theta = \pi$  ( - . . :exact, ... : $df1$   $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$ , - - :  $fdtd$   $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$  )

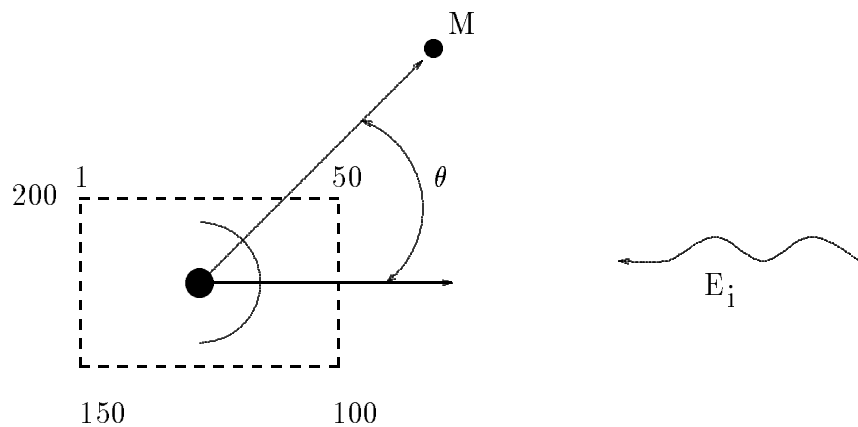


FIG. 26. configuration de la géométrie

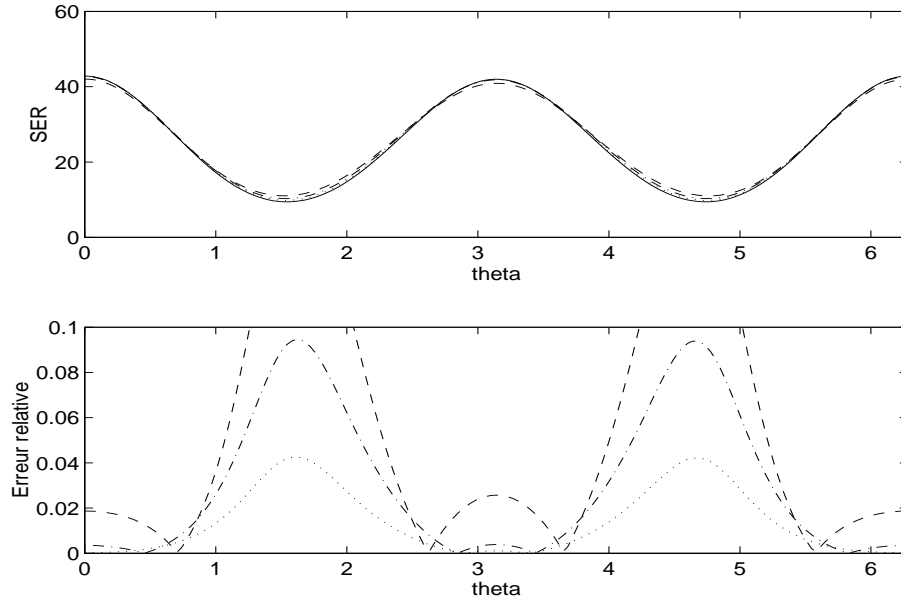


FIG. 27. SER en fonction de  $ka$  pour  $\theta = \pi$  ( - . . :exact, ... :df1  $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$ , - - : fdd  $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$  )

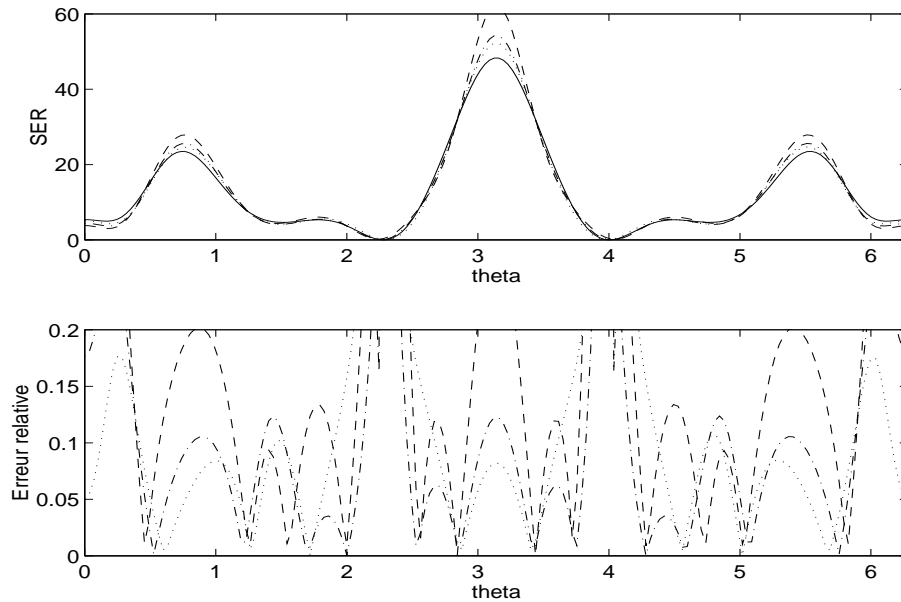


FIG. 28. SER en fonction de  $ka$  pour  $\theta = \pi$  ( - . . :exact, ... :df1  $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$ , - - : fdd  $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$  )

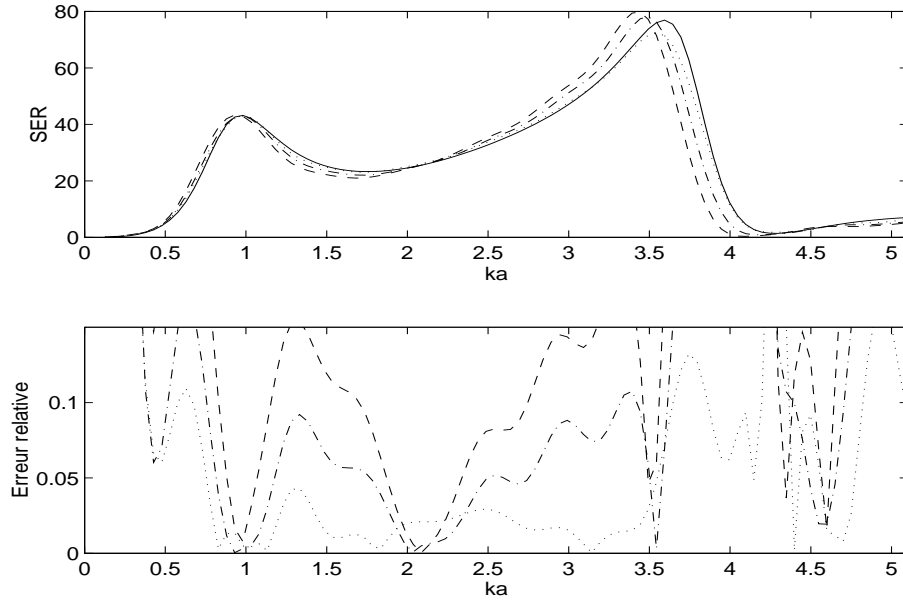


FIG. 29. *SER en fonction de  $ka$  pour  $\theta = \pi$  ( - . :exact, ... :df1  $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$ , - - : fddd  $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$  )*

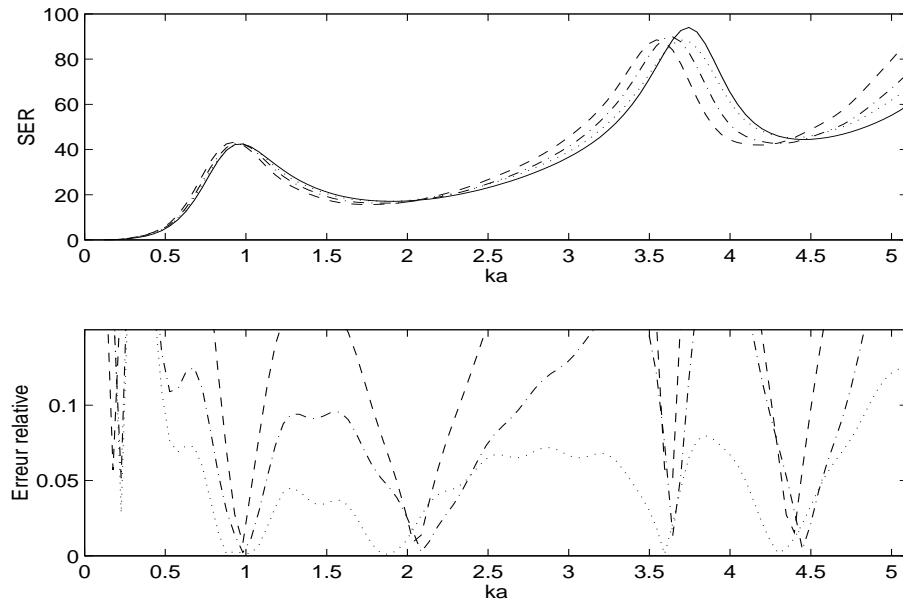
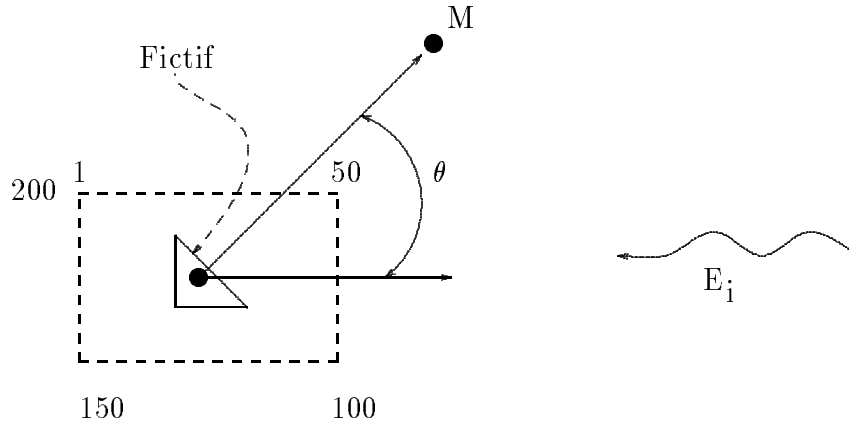


FIG. 30. *SER en fonction de  $ka$  pour  $\theta = \pi$  ( - . :exact, ... :df1  $h_s = \frac{\pi h_v}{2}$ , - - : fddd  $h_s = \frac{\pi h_v}{4}$  )*

FIG. 31. *configuration de la geometrie*

mémoire pour des gros objets. De plus, elle demande l'inversion d'un système creux lors de la détermination du multiplicateur de Lagrange. Le temps de résolution de ce système peut ne plus être négligeable devant le temps de calcul. D'autre part, une approximation en marche d'escalier pour certaines parties de l'obstacle peut s'avérer suffisante pour le calcul du champ électromagnétique. Il est donc intéressant de regarder la possibilité d'une hybridation entre la méthode des domaines fictifs et l'approximation en marches d'escalier. Seules certaines parties de l'obstacle sont discrétisées et le courant est uniquement calculé en ces endroits. Ceci réduit considérablement le stockage du maillage de l'obstacle et le temps de calcul du courant. Afin de simplifier, on note

- *df1* : la méthode où le champ électromagnétique est calculé par les domaines fictifs,
- *fdtd*: la méthode classique des différences finies avec approximation en marche d'escalier de la frontière;
- *hyb*: la méthode d'hybridation couplant les deux méthodes

Dans ce paragraphe, nous allons maintenant analyser la possibilité d'une telle hybridation. Le cas simple d'un triangle rectangle isocèle a été considéré. Dans un premier temps, nous avons uniquement calculé le courant par la méthode des domaines fictifs uniquement sur l'hypoténuse du triangle et annulé les valeurs du champ électrique tangent sur les deux autres côtés.

Le triangle (cf fig 31) est éclairé par une onde plane dont la dépendance temporelle est donnée par la figure (2). Le pas en espace vaut  $h_v = 0.2$  soit 20 points par longueur d'onde  $\lambda_{min}$ . La longueur d'un côté du triangle est noté  $a$  et vaut  $a = 40 \times h_v$ . La frontière du triangle est approchée par un polygone dont les côtés ont une longueur égale à  $h_s = h_v = 0.2$ . Dans un premier temps, nous allons d'abord comparer les valeurs des champs proches calculés par les différentes méthodes.

### 3.2 Champ proche-sismogramme

La figure (33) donne les valeurs des composantes du champ électrique au point M1. Toutes les courbes sont pratiquement confondues. Afin de mieux juger de l'écart entre les courbes, nous avons aussi pour chaque composante représenté l'erreur absolue par rapport à la valeur obtenue par la méthode des domaines fictifs

$$(5) \quad err_x = |ex_{df1} - ex_{hyb \text{ ou } fdtd}|$$

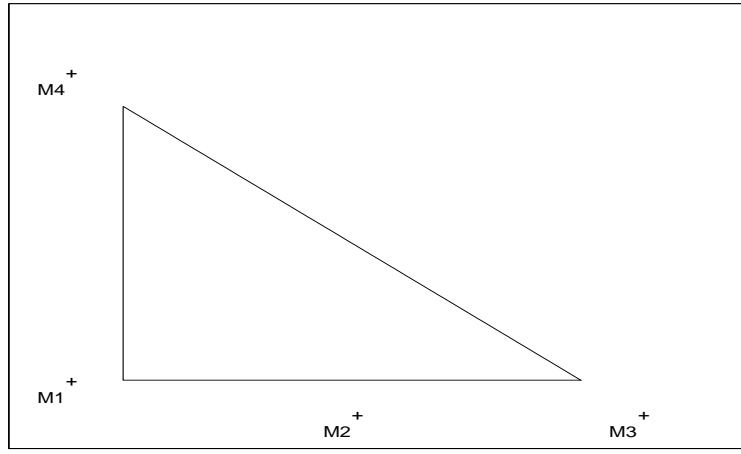


FIG. 32. configuration des points où sont pris les sismogrammes

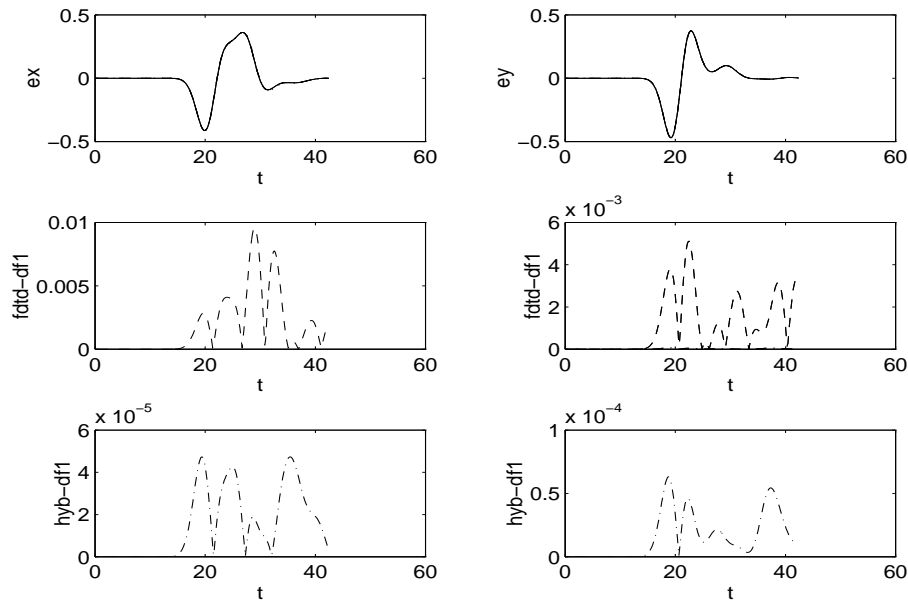


FIG. 33. valeur du champ électrique au point M1 (3,4) (-:fctif, ...: fctd, -:hyb, et erreur absolue )

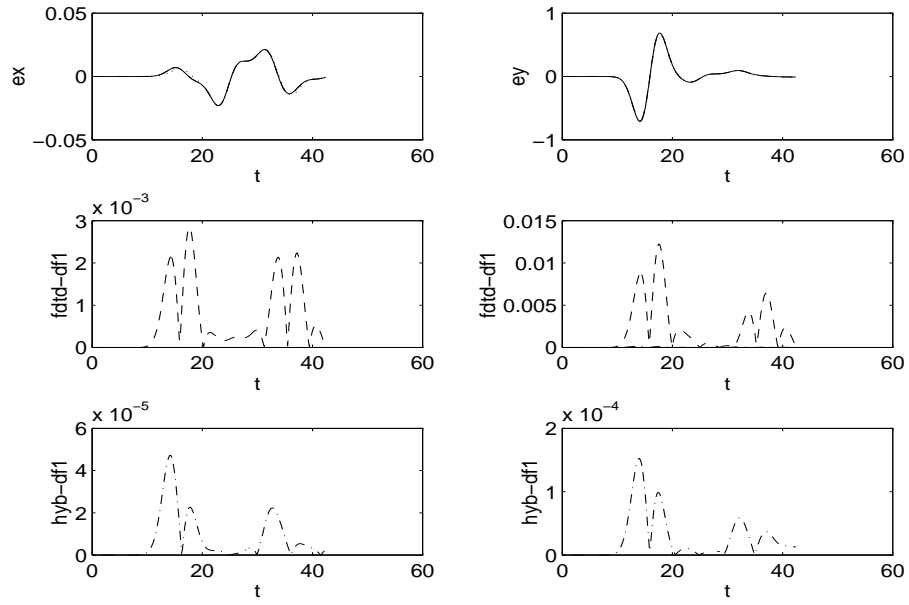
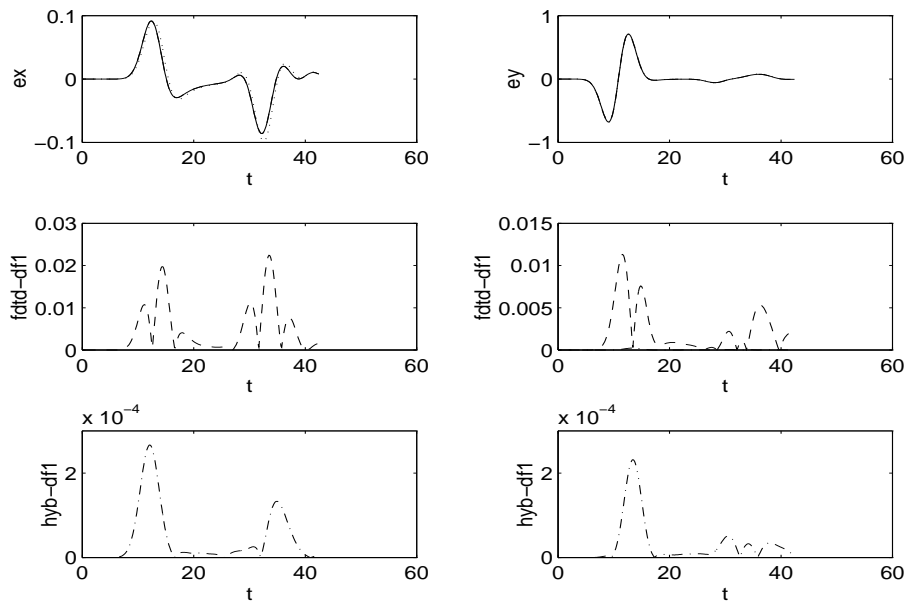
et aussi

$$(6) \quad err_y = |ey_{df1} - ey_{hyb \text{ ou } fctd}|$$

Les dessins de la figure (33) à gauche (resp à droite) sont relatives à la composante en x (resp en y). On remarque que les erreurs pour chaque composante sont du même ordre de grandeur. Le champ calculé par la méthode hybride est à  $10^{-4}$  près égal à celui calculé par les domaines fictifs. On observe les mêmes résultats quelque soit la position du point d'observation (cf fig (34), (35), (36)).

**Conclusion:** la méthode hybride sur cet exemple fournit des valeurs de champ proches identiques à ceux obtenus par la méthode des domaines fictifs à  $10^{-4}$  près.

### 3.3 SER

FIG. 34. valeur du champ électrique au point  $M2 (3,4)$  (-:fictif, ...: ftdd, - - :hyb)FIG. 35. valeur du champ électrique au point  $M3 (13,3)$  (-:fictif, ...: ftdd, - - :hyb)

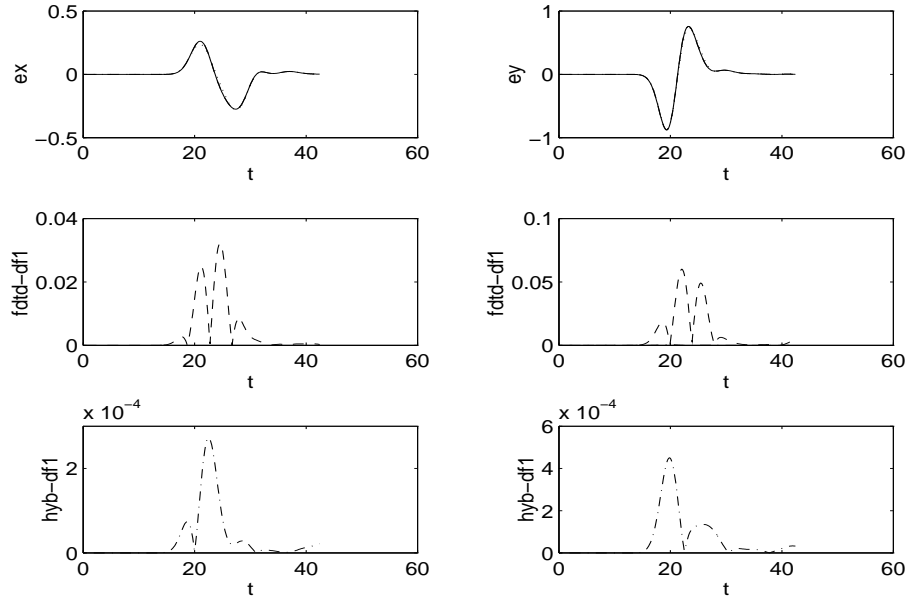


FIG. 36. valeur du champ électrique au point  $M_4(3,13)$  (-:fictif, ...: ftd, - - :hyb)

Il est maintenant intéressant de pouvoir comparer les valeurs de SER obtenues par les différentes méthodes. La solution de référence est calculée par une méthode des éléments finis de frontière à 140 degrés de liberté soit 20 points par rapport à la plus petite longueur d'onde d'observation.

La figure (37) donne les valeurs de la SER pour un produit  $ka = 1$ . Afin de mieux quantifier les résultats, est aussi donnée l'erreur relative (3) par rapport à la valeur de référence. Sont aussi données les valeurs de la SER en fonction du produit  $ka$  en gardant l'angle d'observation constant. On remarque que l'erreur sur la SER calculée par la méthode hybride est du même ordre de grandeur que calculée par la méthode des domaines fictifs. Cette erreur est de l'ordre de 5 % lorsque le nombre de points par longueur d'onde est égal à 20. Ces premiers résultats confirment la possibilité de l'hybridation.

#### 4 Conclusion

Nous avons analysé la faisabilité de la détermination de la SER à l'aide de la méthode des domaines fictifs. Des tests de validation ont été réalisés. Ils montrent en particulier dans le cas du disque conducteur que lorsque on augmente le nombre de points par longueur d'onde, les calculs convergent bien vers une solution analytique. La discrétisation de l'obstacle a été étudiée. Il semble qu'elle influe peu sur le calcul à condition toutefois que le rapport entre les deux maillages ne soit pas trop éloigné de un. Les calculs de SER par la méthode des domaines fictifs ont été ensuite comparé à ceux issus d'une méthode par différences finies où la frontière de l'obstacle est approchée par des marches d'escalier. Il s'avère que pour tous les cas testés, les résultats obtenus à la méthode des domaines fictifs sont plus précis. On note un facteur 2-3 entre les erreurs relatives pour les deux méthodes. Ce facteur est pratiquement indépendant de la géométrie de l'obstacle même lorsque celui-ci présente des singularités. Nous avons aussi comparé les résultats obtenus par la méthode des domaines fictifs avec ceux obtenus par une méthode des éléments finis de frontière. Cette dernière méthode est toujours plus précise mais elle nécessite un calcul par fréquence d'observation. En revanche, la méthode des domaines fictifs permet en une seule fois d'obtenir la SER

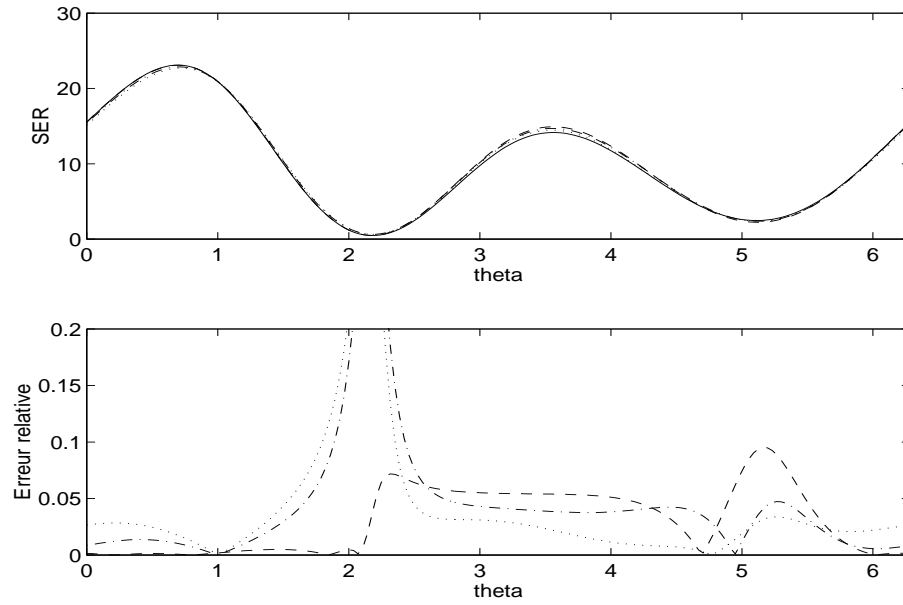


FIG. 37. *SER en fonction de  $\theta$  pour  $ka = 1$  (-:ei, ...:df1,- :fdtd,-.:hyb)*

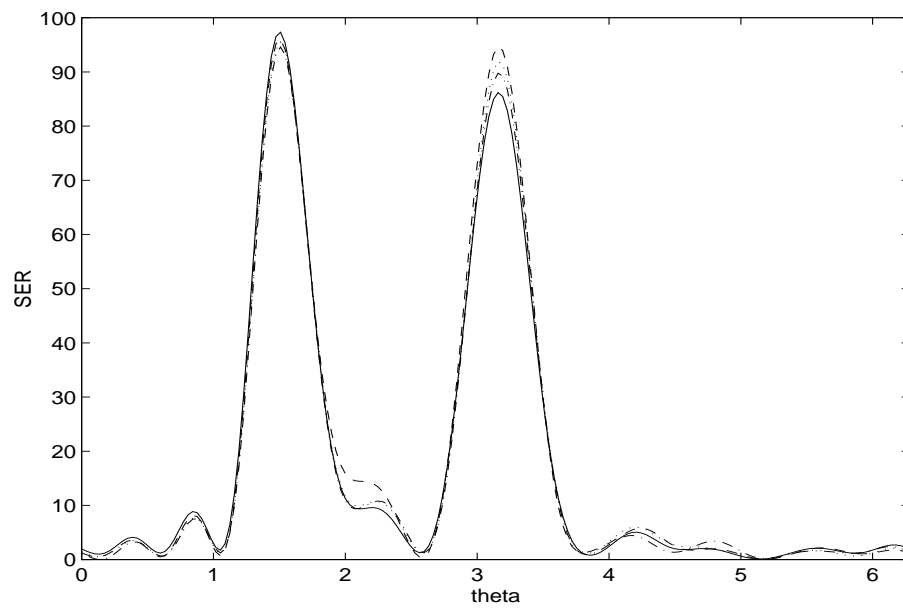


FIG. 38. *SER en fonction de  $\theta$  pour  $ka = \pi$  (-:ei, ...:df1,- :fdtd,-.:hyb)*

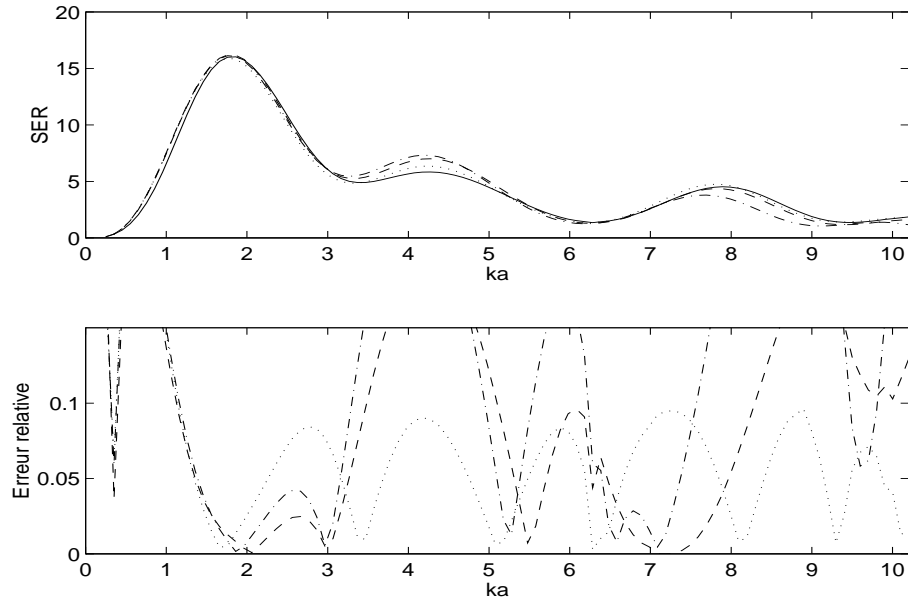


FIG. 39. *SER en fonction de  $ka$  pour  $\theta = 0$  (-:ei, ...:df1,- -:fdd,-.:hyb)*

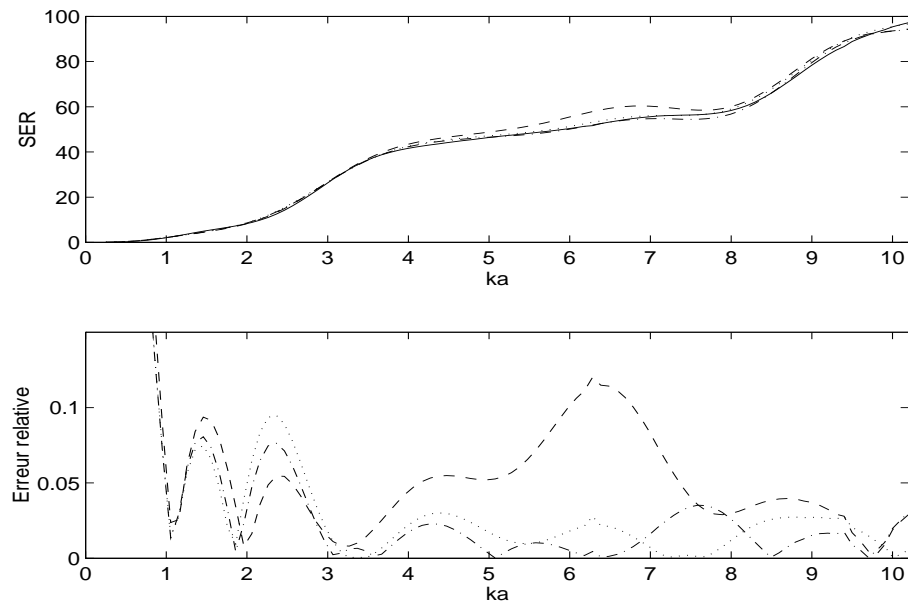


FIG. 40. *SER en fonction de  $ka$  pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (-:ei, ...:df1,- -:fdd,-.:hyb)*

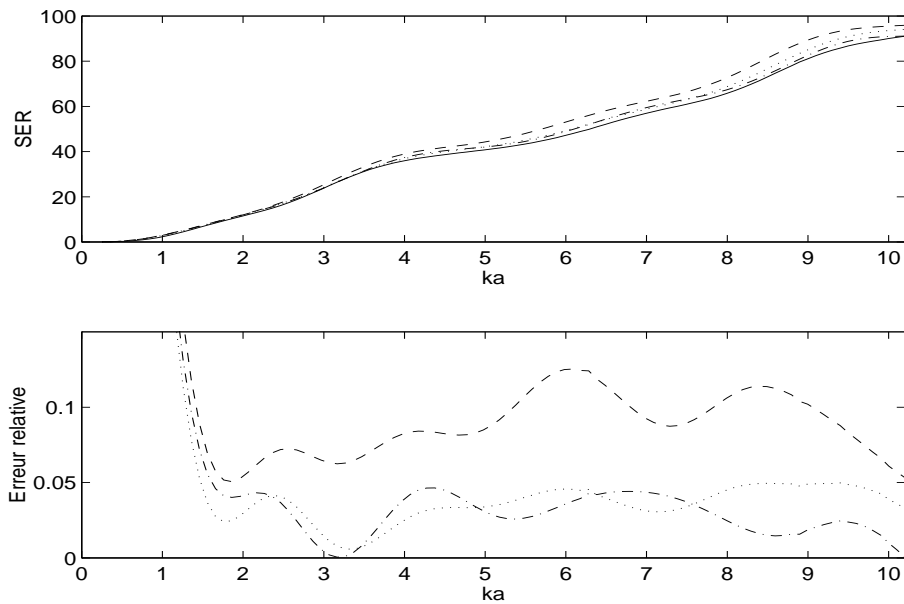


FIG. 41. *SER en fonction de  $ka$  pour  $\theta = \pi$  (-:ei, ...:df1,- -:fddd,-.:hyb)*

pour toutes les fréquences contenues dans l'excitation. Les tests numériques ont été réalisés avec au moins 20 points par longueur. Nous allons nous intéresser maintenant à la variation des résultats obtenus lorsque le nombre de points par longueur diminue.

Dans un second temps, une hybridation entre la méthode des domaines fictifs et l'approximation en marche d'escalier a été réalisée. Les premiers résultats sont fort encourageants. Ils montrent que les calculs de SER par cette méthode sont très proches des résultats obtenus par la méthode des domaines fictifs. En particulier, l'erreur sur la SER est environ de 5% lorsque le nombre de points par longueur d'onde est de 20. Il est cependant nécessaire de réaliser d'autres expériences numériques.