

Remerciements

Je remercie Mr BENDALI qui m'a accueilli dans l'équipe d'électromagnétisme du CERFACS et qui m'a encadré tout au long de ce stage.

Je remercie sincèrement Yassine BOUBENDIR pour l'aide constante qu'il m'a apportée et pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux.

Je remercie Mr COLLINO dont les explications m'ont permis de mieux appréhender le sujet et Mr FARES qui m'a aidé à négocier au mieux les écueils que l'informatique a su me réserver.

Je remercie enfin Nathalie BARTOLI pour les conseils et le soutien qu'elle a su m'apporter.

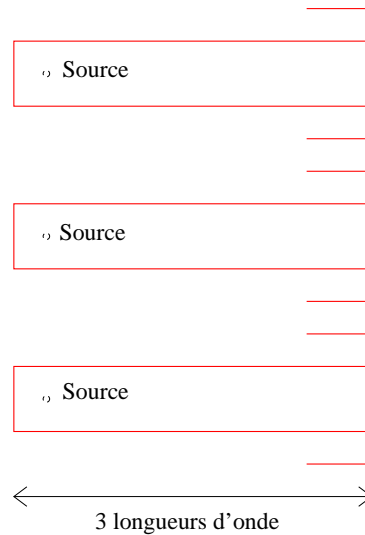
Table des matières

1	Introduction	4
2	Problème aux limites initial	5
3	Résolution directe par équation intégrale	5
3.1	Formulation variationnelle	5
3.2	Méthode d'éléments de frontière	7
3.3	Diagramme de rayonnement	8
3.4	Résultats numériques	9
4	Décomposition de domaine	10
4.1	Décomposition de domaine et conditions de raccord	10
4.2	Données de Cauchy (ou courants équivalents)	12
4.2.1	Définition	12
4.2.2	Représentation intégrale des solutions	13
4.3	Opérateur de Steklov-Poincaré	13
4.3.1	Définition de l'opérateur de Steklov-Poincaré	14
4.3.2	Liens entre les données de Cauchy	15
4.4	Discretisation de l'opérateur d'impédance	15
4.5	Calcul de $\partial_n w_0$	18
4.6	Réduction à un problème posé dans le domaine extérieur	20
4.7	Résolution du problème extérieur	21
4.8	Résolution du problème intérieur	23

4.9	Tests numériques	24
4.9.1	Test de la matrice d'impédance	24
4.9.2	Test de $\partial_n w_0$	25
4.10	Résultats numériques	26
4.10.1	Problème extérieur	27
4.10.2	Problème intérieur	28
4.10.3	Diagramme de rayonnement	28
5	Résolution directe avec introduction de la frontière artificielle	29
5.1	Formulation variationnelle	29
5.2	Résultats numériques	32
6	Conclusion	33

1 Introduction

Dans de nombreuses applications, antennes fixes à balayage suivant une plage de directions, antennes embarquées à bord de satellites, on est confronté à la résolution d'un problème de propagation d'ondes dans lequel intervient une répétition d'une même structure géométrique.



On peut résoudre ce problème de manière directe par équation intégrale [3]. Toutefois cette démarche peut s'avérer impraticable dans la mesure où elle engendre des problèmes de très grande taille. Pour les antennes de type cornet, on propose d'introduire une frontière artificielle à la bouche du cornet qui décompose le domaine de résolution en plusieurs parties, de type conduit intérieur, et un domaine extérieur de propagation. Cette méthode de décomposition de domaine réduirait la taille du problème dans la mesure où elle exploite la répétition du motif géométrique (dans le cas de plusieurs cornets).

L'objet de ce stage est de mettre en œuvre une technique de décomposition de domaine, basée sur le calcul d'un opérateur d'impédance sur la frontière artificielle [4], pour un cornet seul dans le cas de la dimension 2. Mon travail de stage a consisté à comprendre la méthode d'un point de vue théorique puis de la programmer et de la valider sur des exemples test. Cela a été pour moi l'occasion d'apprendre l'outil numérique qui m'était jusqu'alors inconnu.

On détaillera dans un premier temps la résolution directe avant de présenter la technique de décomposition de domaine. On terminera par la présentation d'une résolution directe faisant intervenir la frontière artificielle.

(appelées données de Cauchy du problème aux limites)

$$p = \partial_n u|_{\partial\Omega} \text{ et } \lambda = u|_{\partial\Omega}.$$

Dans le cas de notre problème, les conditions aux limites donnent $p = 0$. Il reste comme seule inconnue λ . La formule de représentation de la solution de l'équation d'Helmholtz vérifiant la condition de radiation sortante est donnée par [6]

$$u(x) = G(x, x_0) + N\lambda(x) \quad x \in \Omega,$$

où $N\lambda$ est le potentiel de double couche créé par la densité λ sur $\partial\Omega$

$$N\lambda(x) = - \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x, y) \lambda(y) d\gamma(y).$$

Le noyau $G(x, y)$ est celui donnant les solutions vérifiant les conditions de radiation (CR) de l'équation d'Helmholtz en dimension 2

$$G(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|).$$

On se propose de construire une formulation variationnelle permettant la détermination de λ .

On introduit F l'ensemble des fonctions tests

$$F = \left\{ \left\{ p', \lambda' \right\}, p' \text{ et } \lambda' \text{ définis sur } \partial\Omega, p' = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

La notation λ' (respectivement p') indique une fonction test générique associée à l'inconnue λ (respectivement p). On forme la réaction de Rumsey qui en électromagnétisme permet d'obtenir de manière systématique une équation variationnelle vérifiée par les inconnues λ et p ,

$$R \left(\{p, \lambda\}, \{p', \lambda'\} \right) = \int_{\partial\Omega} (\partial_n u \lambda' - u p') ds.$$

Il est clair que si $\{p, \lambda\}$ sont les données de Cauchy du problème et que $\{p', \lambda'\}$ sont les fonctions test vérifiant $p' = 0$ alors $R = 0$. Réciproquement si $\forall \{p', \lambda'\} \in F$ on a $R = 0$ il est immédiat que $\partial_n u = 0$ sur $\partial\Omega$.

La dérivée normale du potentiel de double couche donnée par [5]

$$(\partial_n N\lambda)^+(x) = -\partial_s(V(\partial_s \lambda))(x) - k^2 V(\lambda \tau)(x) \cdot \tau(x).$$

où $\tau(x)$ est la tangente unitaire à $\partial\Omega$ au point x orientée dans le sens des abscisses curvilignes croissantes. En injectant dans la réaction de Rumsey, on obtient la formulation variationnelle suivante

$$\int_{\partial\Omega} (\partial_n N\lambda)(x)\lambda'(y) d\gamma(x) d\gamma(y) = - \int_{\partial\Omega} \partial_n G(x, x_0)\lambda'(x) d\gamma(x) \quad \forall \lambda'.$$

3.2 Méthode d'éléments de frontière

Nous nous proposons de décrire la méthode d'éléments de frontière pour discrétiser notre problème [2].

On approche $\partial\Omega$ par une ligne polygonale, notée encore $\partial\Omega$, ayant ses sommets n_1, \dots, n_N sur la courbe exacte et ordonnés suivant les abscisses curvilignes croissantes. On définit ainsi un maillage τ de $\partial\Omega$ formés de segments

$$K_i = [n_i, n_{i+1}], \quad i = 1, \dots, N.$$

On approche la fonction inconnue λ et la fonction test associée λ' par une méthode d'éléments finis P_1 -continus, c'est à dire

$$\lambda_{|K_i}(x) = (1 - s/|K_i|)\lambda(n_i) + (s/|K_i|)\lambda(n_{i+1}), \quad i = 1, \dots, N,$$

où $s = |x - n_i|$ et $|K_i|$ est la longueur du segment K_i , de sorte que λ est complètement décrit par ses valeurs nodales λ qui constituent un vecteur colonne N de composantes $\lambda_j = \lambda(a_j)$.

Par les techniques d'assemblage et de calcul d'intégrales singulières, on forme la matrice définie par

$$[\lambda']^T D [\lambda] = \int_{\partial\Omega} G(x, y) \left(\partial_s \lambda(y)\lambda'(x) - k^2 \lambda(y)\tau_y \cdot \lambda(x)\tau_x \right) d\gamma(x) d\gamma(y).$$

En notant $[\partial_n G]$ le vecteur de composantes $\partial_n G_i = \partial_n G(s_i, x_0)$ où s_i sont les milieux des segments de $\partial\Omega$, l'intégrale $\int_{\partial\Omega} \partial_n G(x, x_0)\lambda'(x) d\gamma(x)$ est représentée par une matrice de masse M

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \partial_n G(x, x_0) \lambda'(x) d\gamma(x) &= \frac{|K_1|}{2} \partial_n G_1 + \left(\sum_{j=2}^N |K_j| \frac{\lambda'(n_j) + \lambda'(n_{j-1})}{2} \partial_n G_j \right) + \frac{|K_N|}{2} \partial_n G_N \\ &= [\lambda']^T M [\partial_n G]. \end{aligned}$$

Finalement, on aboutit à la résolution du système linéaire

$$D[\lambda] = -M[\partial_n G].$$

3.3 Diagramme de rayonnement

La représentation intégrale de la solution est

$$u(x) = G(x, x_0) - \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x, y) \lambda(y) d\gamma(y).$$

On cherche à exprimer le comportement en zone lointaine de u (c'est à dire pour $|x| \gg |y|$ lorsque y reste sur $\partial\Omega$).

On définit le SER (Surface Equivalente Radar) comme étant

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} 2\pi |x| |u(x)|^2.$$

La SER est une quantité fondamentale pour les applications dans le domaine des antennes et des radars.

Le développement $G(x, y) = \frac{1+i}{4\sqrt{\pi k}} \frac{e^{ik|x|} e^{-iky \cdot \frac{x}{|x|}}}{\sqrt{|x|}} + o\left(\frac{1}{|\sqrt{x|}}\right)$ et

$$\partial_{n_y} G(x, y) = -\partial_{n_x} G(x, y) = -\frac{1+i}{4\sqrt{\pi k}} ik \frac{x}{|x|} \cdot n_y e^{-iky \cdot \frac{x}{|x|}}$$

nous permettent d'écrire

$$u(x) = \frac{1+i}{4\sqrt{\pi k}} \frac{e^{ik|x|} e^{-ikx_0 \cdot \frac{x}{|x|}}}{\sqrt{|x|}} + \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \frac{1+i}{4\sqrt{\pi k}} \int_{\partial\Omega} ik \frac{x}{|x|} \cdot n_y e^{-iky \cdot \frac{x}{|x|}} \lambda(y) d\gamma(y) + o\left(\frac{1}{|\sqrt{x|}}\right)$$

et par suite

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} 2\pi|x||u(x)|^2 = 2\pi \left| \frac{1+i}{4\sqrt{\pi k}} + \frac{1+i}{4\sqrt{\pi k}} \int_{\partial\Omega} ik \frac{x}{|x|} \cdot n_y e^{-iky \cdot \frac{x}{|x|}} \lambda(y) d\gamma(y) \right|. \quad (2)$$

Cette fonction est uniquement dépendante de la direction $\frac{x}{|x|}$. On la note a .

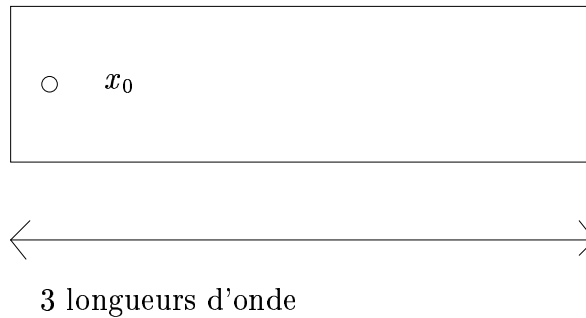
$$a\left(\frac{x}{|x|}\right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 2\pi|x||u(x)|^2.$$

A un coefficient additif près, la directivité de l'antenne est donnée par

$$D\left(\frac{x}{|x|}\right) = 10 \log_{10} \left| a\left(\frac{x}{|x|}\right) \right|^2.$$

3.4 Résultats numériques

On souhaite comparer le diagramme de rayonnement calculé à partir des courants obtenus par résolution directe avec le diagramme de rayonnement connu pour un guide semi-infini. On considère un cornet ayant une longueur correspondant à 3 longueurs d'onde.



Les résultats ont été obtenus à partir d'un code existant au CERFACS.

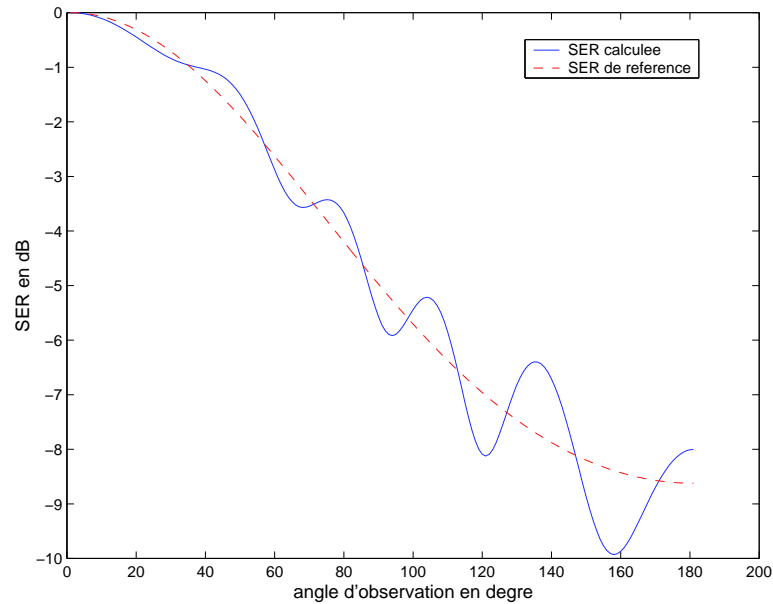


FIG. 1 – Diagramme de rayonnement

En abscisse θ varie de 0° à 180° . On y fait correspondre en ordonnée la valeur de D pour $\frac{x}{|x|} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. On note que même si le rayonnement se fait dans la même direction, la SER calculée oscille autour de la SER de référence. Ceci est dû au fait que la SER de référence correspond au rayonnement d'un guide semi-infini.

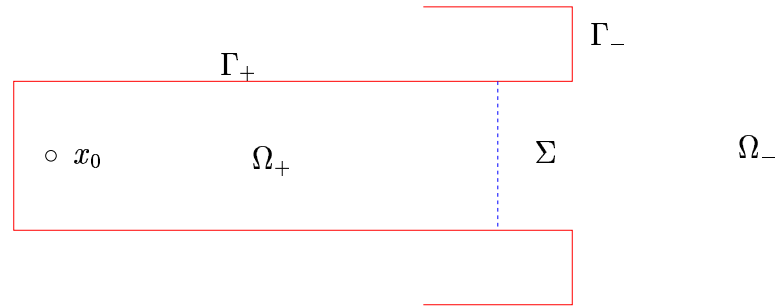
4 Décomposition de domaine

On se propose de résoudre l'équation (1) par une méthode de décomposition de domaine. L'idée est d'introduire une frontière artificielle Σ et de partitionner Ω en $\Omega_+ \cup \Omega_-$. On cherchera d'abord à écrire le problème (1) sous la forme de deux problèmes posés sur Ω_+ et Ω_- . On introduira ensuite un opérateur d'impédance qui permettra de découpler ces deux problèmes. La dernière étape sera la résolution du problème posé sur Ω_- .

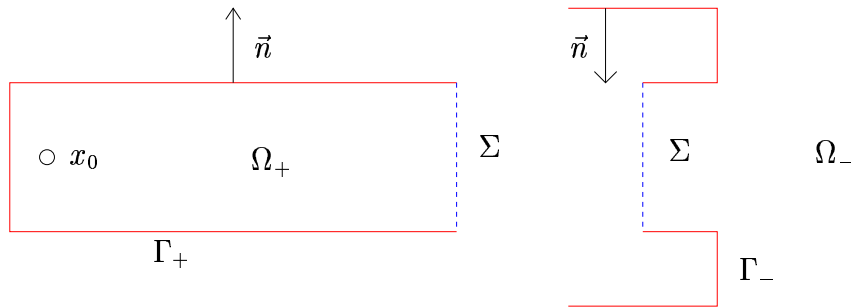
4.1 Décomposition de domaine et conditions de raccord

L'idée est de séparer le calcul à l'intérieur du cornet (ce qui correspond à la partie guidée de l'onde) du calcul à l'extérieur du cornet (correspondant à la partie

rayonnée de l'onde électromagnétique). On introduit à la bouche du cornet une frontière artificielle Σ . On partitionne Ω en $\Omega_+ \cup \Omega_-$ où $\partial\Omega_+ = \Gamma_+ \cup \Sigma$ et $\partial\Omega_- = \Gamma_- \cup \Sigma$.



Une hypothèse physique sur la nullité des courants de retour nous amène à négliger ceux-ci et à considérer les frontières suivantes



Le sens de parcours de ces deux frontières est donné par les normales indiquées sur le dessin

Soient les inconnues u^+ et u^- respectivement définies sur Ω_+ et Ω_- solutions de (3) et (4).

$$\begin{cases} \Delta u^+ + k^2 u^+ = -\delta_{x_0} & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_n u^+ = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \\ u^+ = u^- & \text{sur } \Sigma \\ \partial_n u^+ = -\partial_n u^- & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Delta u^- + k^2 u^- = 0 & \text{dans } \Omega_- \\ \partial_n u^- = 0 & \text{sur } \Gamma_- \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{1/2} (\partial_n u^- - iku^-) = 0 \\ u^+ = u^- & \text{sur } \Sigma \\ \partial_n u^+ = -\partial_n u^- & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (4)$$

On obtient ainsi une mise en équation équivalente à (1). En effet

u^+ et u^- solutions de (3) et (4) donnent $u = u^+ + u^-$.

$$\begin{cases} u^+ = u^- & \text{sur } \Sigma \\ \partial_n u^+ = -\partial_n u^- & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (5)$$

La condition (5) commune aux équations (3) et (4) est appelé condition de raccord [7]. Cette condition traduit le fait que l'interface est fictive et que son introduction ne modifie pas le problème physique : les champs électriques et magnétiques ne sont pas perturbés par Σ . Le signe $-$ dans la seconde condition de raccord provient du fait que $\partial\Omega^+$ et $\partial\Omega^-$ ont des normales opposées.

4.2 Données de Cauchy (ou courants équivalents)

4.2.1 Définition

Les données de Cauchy sont définies comme étant les quantités

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= u_{|\partial\Omega^{\pm}}^{\pm} \\ p_{\pm} &= \partial_n u_{|\partial\Omega^{\pm}}^{\pm}. \end{aligned}$$

Notons que les conditions aux limites et les conditions de raccord permettent d'écrire

$$p_{\pm} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\pm}$$

$$p_+ = -p_- \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\lambda_+ = \lambda_- \quad \text{sur } \Sigma.$$

4.2.2 Représentation intégrale des solutions

Les données de Cauchy permettent de faire une représentation intégrale des solutions de l'équation d'Helmholtz

$$u^+ = G(x, x_0) + Vp_+(x) + N\lambda_+(x) \quad x \in \Omega_+$$

$$u^- = Vp_-(x) + N\lambda_-(x) \quad x \in \Omega_-.$$

où Vp est le potentiel de simple couche créé par la densité p sur $\partial\Omega$

$$Vp(x) = \int_{\partial\Omega} G(x, y)p(y) d\gamma(y)$$

et $N\lambda$ est le potentiel de double couche créé par la densité λ sur $\partial\Omega$

$$N\lambda(x) = - \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x, y)\lambda(y) d\gamma(y).$$

On voit qu'ainsi la détermination des solutions est ramenée à celle des données de Cauchy. C'est cette approche que nous développerons dans la suite.

4.3 Opérateur de Steklov-Poincaré

Le but de la méthode de décomposition de domaine est d'obtenir deux problèmes indépendants sur Ω_+ et Ω_- qui pour l'heure sont liés par les conditions de raccord. L'idée est de résoudre le problème intérieur en fixant une des données de Cauchy sur la frontière artificielle et de déterminer la seconde donnée de Cauchy. On définit ainsi un opérateur (appelé opérateur de Steklov-Poincaré ou opérateur d'impédance) qui sera non local et non explicite. Cependant dans le cas qui nous intéresse, on pourra en donner une expression explicite. L'introduction d'un opérateur non local n'ajoute pas de difficultés supplémentaires car les matrices relatives à une résolution par équations intégrales sont pleines. On pourra ainsi résoudre le problème extérieur avec une condition aux limites sur la frontière artificielle Σ exprimée à l'aide de cet opérateur.

4.3.1 Définition de l'opérateur de Steklov-Poincaré

Définition :

Soit φ défini sur l'adhérence de Σ et soit v solution de

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_n v = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \\ v = \varphi & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (6)$$

L'opérateur de Steklov-Poincaré Z est alors

$$Z : \varphi \longrightarrow \partial_n v.$$

On remarque que $Z\varphi$ a son support inclus dans Σ .

Proposition :

L'opérateur Z est symétrique ie

$$\int_{\Sigma} Z\varphi\psi \, d\Sigma = \int_{\Sigma} Z\psi\varphi \, d\Sigma \quad \forall \varphi, \psi \text{ admissibles}$$

Preuve :

On considère les deux problèmes suivants

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_n v = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \\ v = \varphi & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_n w = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \\ w = \psi & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad 1$$

La formule de Green donne

$$\int_{\Omega_+} (\nabla v \nabla w - k^2 v w) \, ds = \int_{\Sigma} \partial_n v w \, d\Sigma = \int_{\Sigma} \partial_n w v \, d\Sigma$$

$$\text{Il vient donc } \int_{\Sigma} \partial_n v \psi \, d\Sigma = \int_{\Sigma} \partial_n w \varphi \, d\Sigma$$

$$\text{et par suite } \int_{\Sigma} Z \varphi \psi \, d\Sigma = \int_{\Sigma} Z \psi \varphi \, d\Sigma$$

■

4.3.2 Liens entre les données de Cauchy

L'opérateur d'impédance permet d'établir une relation entre les données de Cauchy. Considérons les deux problèmes suivants

$$\begin{cases} \Delta w_0 + k^2 w_0 = -\delta_{x_0} & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_n w_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \\ w_0 = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_n w = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \\ w = \lambda_+ & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

Alors $u^+ = w + w_0$ et donc $p_+ = Z\lambda_+ + \partial_n w_0$. Le point clé est maintenant d'utiliser les conditions de raccord (5) pour obtenir la relation entre les données de Cauchy extérieures

$$p_- = -Z\lambda_- - \partial_n w_0.$$

4.4 Discrétisation de l'opérateur d'impédance

On veut construire la matrice Z correspondant à la discrétisation de l'opérateur de Steklov-Poincaré [1]. On considère donc le problème

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_n v = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \\ v = \varphi & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

On note $p = \partial_n v|_{\partial\Omega_+}$, $\lambda = v|_{\partial\Omega_+}$ et $F = \{ \{p', \lambda'\} , p' = 0 \text{ sur } \Gamma_+ , \lambda' = 0 \text{ sur } \Sigma \}$ l'ensemble des fonctions tests. On forme la réaction de Rumsey

$$\begin{aligned} R\left(\{p, \lambda\}, \{p', \lambda'\}\right) &= \int_{\partial\Omega_+} (\partial_n v \lambda' - v p') ds \\ &= - \int_{\Sigma} \varphi p' d\Sigma. \end{aligned}$$

Réciproquement, si $\forall \{p', \lambda'\} \in F, R(\{p, \lambda\}, \{p', \lambda'\}) = - \int_{\Sigma} \varphi p' d\Sigma$, alors $\partial_n v = 0$ sur Γ^+ et $v = \varphi$ sur Σ .

Les théorèmes de traces donnent

$$\begin{aligned} v(x) &= Vp(x) + N\lambda(x) + \frac{1}{2}\lambda(x) \quad x \in \partial\Omega_+ \\ \partial_n v(x) &= -N^T p(x) + \partial_n N\lambda(x) + \frac{1}{2}p(x) \quad x \in \partial\Omega_+. \end{aligned}$$

En injectant dans la réaction de Rumsey, on obtient la formulation variationnelle suivante

$$\int_{\partial\Omega_+} \partial_n N\lambda\lambda' - N\lambda p' - N^T \lambda p' - Vpp' ds = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \varphi p' d\Sigma \quad (7)$$

On approche $\partial\Omega_+$ par une ligne polygonale de manière analogue à ce qui a été fait dans la section (3.2). On approche les fonctions λ et λ' par une méthode d'éléments finis P_1 par morceaux alors que les fonctions p et p' sont approchées par une méthode d'éléments finis P_0 .

On forme alors les matrices définies par

$$\begin{aligned} [\lambda']^T D[\lambda] &= \int_{\partial\Omega_+} G(x, y) \left(\partial_s \lambda(y) \lambda'(x) - k^2 \lambda(y) \tau_y \cdot \lambda(x) \tau_x \right) d\gamma(x) d\gamma(y) \\ [p']^T N[\lambda] &= - \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x, y) \lambda(y) p'(x) d\gamma(y) d\gamma(x) \end{aligned}$$

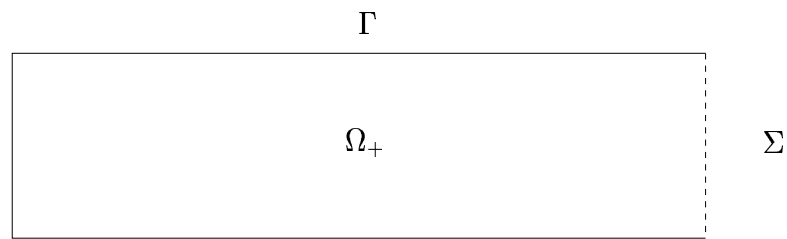
$$[p']^T V[p] = \int_{\partial\Omega} G(x, y) p(y) p'(x) d\gamma(y) d\gamma(x).$$

Ainsi, en notant $[\varphi]$ le vecteur de composantes $\varphi_i = \varphi(n_i)$ (n_i noeuds de Σ), le système discret associé à la formulation variationnelle (7) est donné par le système matriciel

$$\begin{pmatrix} \lambda' & p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & -N^T \\ -N & -V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' & p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}M[\varphi] \end{pmatrix}.$$

Où M est une matrice à déterminer.

On partitionne $\partial\Omega^+$: $\partial\Omega^+ = \Gamma \cup \Sigma$.



Alors $\lambda = (\lambda_\Sigma, \lambda_\Gamma)$ et $p = (p_\Sigma, p_\Gamma)$

λ est défini sur les points de $\partial\Omega^+$ et p est défini sur les segments de $\partial\Omega^+$

Ainsi

λ_Σ a pour dimension N_p^Σ (Nombre de points sur Σ)

λ_Γ a pour dimension N_p^Γ (Nombre de points sur Γ)

p_Σ a pour dimension N_s^Σ (Nombre de segments sur Σ)

p_Γ a pour dimension N_s^Γ (Nombre de segments sur Γ)

Les conditions aux limites donnent $\lambda_\Sigma = \varphi$ et $p_\Sigma = 0$.

On associe à ces inconnues les fonctions tests vérifiant $\lambda'_\Sigma = 0$ et $p'_\Sigma = 0$. Le système matriciel s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda'_\Gamma \\ p'_\Sigma \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D_{\Sigma^p, \Sigma^p} & D_{\Sigma^p, \Gamma^p} & -N_{\Sigma^p, \Sigma^s}^T & -N_{\Sigma^p, \Gamma^s}^T \\ D_{\Gamma^p, \Sigma^p} & D_{\Gamma^p, \Gamma^p} & -N_{\Gamma^p, \Sigma^s}^T & -N_{\Gamma^p, \Gamma^s}^T \\ -N_{\Sigma^s, \Sigma^p} & -N_{\Sigma^s, \Gamma^p} & -V_{\Sigma^s, \Sigma^s} & -V_{\Sigma^s, \Gamma^s} \\ -N_{\Gamma^s, \Sigma^p} & -N_{\Gamma^s, \Gamma^p} & -V_{\Gamma^s, \Sigma^s} & -V_{\Gamma^s, \Gamma^s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\varphi] \\ \lambda_\Gamma \\ p_\Sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda'_\Gamma \\ p'_\Sigma \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M[\varphi] \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} \lambda'_\Gamma \\ p'_\Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{\Gamma^p, \Sigma^p} & D_{\Gamma^p, \Gamma^p} & -N_{\Gamma^p, \Sigma^s}^T \\ -N_{\Sigma^s, \Sigma^p} & -N_{\Sigma^s, \Gamma^p} & -V_{\Sigma^s, \Sigma^s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\varphi] \\ \lambda_\Gamma \\ p_\Sigma \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda'_\Gamma \\ p'_\Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M[\varphi] \end{pmatrix}$$

$$\text{ou encore } \begin{pmatrix} D_{\Gamma^p, \Gamma^p} & -N_{\Gamma^p, \Sigma^s}^T \\ -N_{\Sigma^s, \Gamma^p} & -V_{\Sigma^s, \Sigma^s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_\Gamma \\ p_\Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_{\Gamma^p, \Sigma^p}[\varphi] \\ N_{\Sigma^s, \Sigma^p}[\varphi] - M[\varphi] \end{pmatrix}.$$

La $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice Z est alors le vecteur p_Σ obtenu par la résolution du système précédent pour φ tel que $\varphi(n_j) = \delta_{i,j}$ (avec n_j noeuds de Σ). Il reste à déterminer le vecteur $M\varphi$.

$$\int_\Sigma \varphi p' d\Sigma = \sum_{j=1}^{N_s^\Sigma} l_j \frac{\varphi(n_j) + \varphi(n_{j+1})}{2} p'(s_j)$$

où (n_j) sont les noeuds de Σ , (s_j) les segments de Σ et l_j est la longueur du $j^{\text{ième}}$ segment. Si on discrétise Σ par une grille de points uniformément répartis, on a $l_j = l$ et

$$\int_\Sigma \varphi p' d\Sigma = \begin{pmatrix} p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l(\varphi(n_1) + \varphi(n_2))/2 \\ l(\varphi(n_2) + \varphi(n_3))/2 \\ \dots \\ \dots \\ l(\varphi(n_{N_s^\Sigma}) + \varphi(n_{N_p^\Sigma}))/2 \end{pmatrix} = M[\varphi].$$

4.5 Calcul de $\partial_n w_0$

Les relations entre les données de Cauchy font apparaître la quantité $\partial_n w_0$. On détaille dans cette section le calcul de $\partial_n w_0$ par la méthode des équations intégrales.

On a à résoudre le problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta w_0 + k^2 w_0 = -\delta_{x_0} & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_n w_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \\ w_0 = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (8)$$

Soit $F = \{\{p', \lambda'\}, p' = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \lambda' = 0 \text{ sur } \Sigma\}$. On forme la réaction de Rumsey

Alors $\forall \{p', \lambda'\} \in F$

$$R\left(\{p, \lambda\}, \{p', \lambda'\}\right) = \int_{\partial\Omega_+} (\partial_n w_0 \lambda' - w_0 p') ds = 0.$$

Réciproquement si $\forall \{p', \lambda'\} \in F, R = 0$, alors $p = 0$ sur Γ_+ et $\lambda = 0$ sur Σ .

Si on note $p = \partial_n w_0$ et $\lambda = w_0$ alors

$$w_0(x) = G(x, x_0) + Vp(x) + N\lambda(x), \forall x \in \Omega_+.$$

On passe à la limite sur la frontière. Les théorèmes de trace donnent

$$\forall x \in \partial\Omega_+, w_0(x) = G(x, x_0) + Vp(x) + N\lambda(x) + \frac{1}{2}\lambda(x)$$

$$\forall x \in \partial\Omega_+, \partial_n w_0(x) = \partial_n G(x, x_0) - N^T p(x) + D\lambda(x) + \frac{1}{2}p(x).$$

$$\text{Alors, } R\left(\{p, \lambda\}, \{p', \lambda'\}\right) = 0$$

$$\text{s'écrit } \int_{\partial\Omega_+} \partial_n N \lambda \lambda' - N \lambda p' - N^T \lambda' p - V p p' ds = \int_{\partial\Omega_+} G(x, x_0) p' - \partial_n G(x, x_0) \lambda' d\gamma$$

On procède à une discrétisation analogue à ce qui a été fait précédemment. On note $[\partial_n G]$ le vecteur de composantes $\partial_n G_i = \partial_n G(s_i, x_0)$ où (s_i) sont les milieux des segments de Γ^+ , $[G]$ le vecteur de composantes $G_i = G(n_i, x_0)$ où n_i sont les noeuds de Σ . Le système discret s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & -N^T \\ -N & -V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' \\ p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M_1[\partial_n G] \\ M_2[G] \end{pmatrix}.$$

Où M_1 et M_2 sont les matrices respectivement définies par

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_+} \partial_n G(x, x_0) \lambda' d\Gamma \\ &= \frac{l(1)}{2} \partial_n G_1 + \left(\sum_{j=2}^{N_s^{\Gamma^+}} l(j) \frac{\lambda'(n_j) + \lambda'(n_{j-1})}{2} \partial_n G_j \right) + \frac{l(N_s^{\Gamma^+})}{2} \partial_n G_{N_s^{\Gamma^+}} \\ &= [\lambda']^T M_1 [\partial_n G] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} G(x, x_0) p' d\Gamma &= \sum_{j=1}^{N_s^{\Sigma}} l(j) \frac{G(n_j, x_0) + G(n_{j+1}, x_0)}{2} p'(s_j) \\ &= [p']^T M_2 [G] \int_{\Sigma} G(x, x_0) p' d\Sigma. \end{aligned}$$

En utilisant la même partition que dans la section (4.5), l'équation variationnelle devient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda'_{\Gamma} \\ p'_{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix}^T & \begin{pmatrix} D_{\Sigma^p, \Sigma^p} & D_{\Sigma^p, \Gamma^p} & -N_{\Sigma^p, \Sigma^s}^T & -N_{\Sigma^p, \Gamma^s}^T \\ D_{\Gamma^p, \Sigma^p} & D_{\Gamma^p, \Gamma^p} & -N_{\Gamma^p, \Sigma^s}^T & -N_{\Gamma^p, \Gamma^s}^T \\ -N_{\Sigma^s, \Sigma^p} & -N_{\Sigma^s, \Gamma^p} & -V_{\Sigma^s, \Sigma^s} & -V_{\Sigma^s, \Gamma^s} \\ -N_{\Gamma^s, \Sigma^p} & -N_{\Gamma^s, \Gamma^p} & -V_{\Gamma^s, \Sigma^s} & -V_{\Gamma^s, \Gamma^s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{\Gamma} \\ p_{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda'_{\Gamma} \\ p'_{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -M_1 [\partial_n G] \\ M_2 [G] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ce qui s'écrit } \begin{pmatrix} D_{\Gamma^p, \Gamma^p} & -N_{\Gamma^p, \Sigma^s}^T \\ -N_{\Sigma^s, \Gamma^p} & -V_{\Sigma^s, \Sigma^s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\Gamma} \\ p_{\Sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_1 [\partial_n G] \\ M_2 [G] \end{pmatrix}.$$

4.6 Réduction à un problème posé dans le domaine extérieur

L'objectif est d'obtenir une équation sur u^- , solution de (3) et (4), indépendante de u^+ . On utilise pour cela l'opérateur d'impédance Z . Rappelons les relations vérifiées par les données de Cauchy

$$p_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-$$

$$p_- = -Z\lambda_- - \partial_n w_0$$

Toute la contribution du problème intérieur est contenue dans l'opérateur d'impédance.

Le problème aux limites extérieur est alors

$$\begin{cases} \Delta u^- + k^2 u^- = 0 & \text{dans } \Omega_- \\ \partial_n u^- = 0 & \text{sur } \Gamma_- \\ \partial_n u^- = -Zu^- - \partial_n w_0 & \text{sur } \Sigma \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{1/2} (\partial_n u^- - iku^-) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

4.7 Résolution du problème extérieur

L'objet de ce paragraphe est d'établir une formulation variationnelle pour le problème extérieur (9).

Soit $E = (\{p'_-, \lambda'_-\}, p'_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, p'_- = -Z\lambda'_- \text{ sur } \Sigma)$ l'ensemble des fonctions test.

On forme la réaction de Rumsey

$$R_- \left(\{p_-, \lambda_-\}, \{p'_-, \lambda'_-\} \right) = \int_{\partial\Omega_-} (\partial_n u^- \lambda'_- - u^- p'_-) ds.$$

Alors $\forall \{p'_-, \lambda'_-\} \in E$

$$\begin{aligned} R_- \left(\{p_-, \lambda_-\}, \{p'_-, \lambda'_-\} \right) &= \int_{\Sigma} (\partial_n u^- \lambda'_- + u^- Z\lambda'_-) d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} (\partial_n u^- + Zu^-) \lambda'_- ds \text{ (symétrie de } Z) \\ &= - \int_{\Sigma} \partial_n w_0 \lambda'_- d\Sigma. \end{aligned}$$

Réciproquement, si $\forall \{p'_-, \lambda'_-\} \in E, R_- \left(\{p_-, \lambda_-\}, \{p'_-, \lambda'_-\} \right) = - \int_{\Sigma} \partial_n w_0 \lambda'_- d\Sigma$ alors $\partial_n u^- + Zu^- = -\partial_n w_0$ sur Σ et $p_- = 0$.

La représentation intégrale de la solution est

$$u^-(x) = Vp_-(x) + N\lambda_-(x) \quad , x \in \Omega_-.$$

Les théorèmes de traces donnent

$$u^-(x) = Vp_-(x) + N\lambda_-(x) + \frac{1}{2}\lambda_-(x) \quad , x \in \partial\Omega_-$$

$$\partial_n u^-(x) = -N^T p_-(x) + \partial N\lambda_-(x) + \frac{1}{2}p_-(x) \quad , x \in \partial\Omega_-.$$

Ainsi

$$R_-(\{p_-, \lambda_-\}) = \int_{\partial\Omega_-} \partial_n N\lambda_- \lambda'_- ds - \int_{\partial\Omega_-} N^T p_- \lambda'_- ds - \int_{\partial\Omega_-} V p_- p'_- ds$$

$$- \int_{\partial\Omega_-} N\lambda_- p'_- ds + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_-} (p_- \lambda'_- - \lambda_- p'_-) ds$$

$$= - \int_{\Sigma} \partial_n w_0 \lambda'_- d\Sigma$$

d'où $\int_{\partial\Omega_-} \partial_n N\lambda_- \lambda'_- ds - \int_{\partial\Omega_-} N^T p_- \lambda'_- ds - \int_{\partial\Omega_-} V p_- p'_- ds - \int_{\partial\Omega_-} N\lambda_- p'_- ds$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \partial_n w_0 \lambda'_- d\Sigma.$$

En prolongeant à tout $\partial\Omega_-$ $Z\lambda_-$ et $\partial_n w_0$ par 0, on peut écrire

$$\int_{\partial\Omega_-} \partial_n N\lambda_- \lambda'_- ds - \int_{\partial\Omega_-} N^T (-Z\lambda_- - \partial_n w_0) \lambda'_- ds - \int_{\partial\Omega_-} N\lambda_- (-Z\lambda'_-) ds$$

$$- \int_{\partial\Omega_-} V (-Z\lambda_- - \partial_n w_0) (-Z\lambda'_-) ds = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \partial_n w_0 \lambda'_- d\Sigma.$$

On aboutit finalement à la formulation variationnelle suivante

$$\int_{\partial\Omega_-} \partial_n N\lambda_- \lambda'_- ds + \int_{\partial\Omega_-} N^T (Z\lambda_-) \lambda'_- ds$$

$$+ \int_{\partial\Omega_-} N\lambda_- (Z\lambda'_-) ds - \int_{\partial\Omega_-} V (Z\lambda_-) Z\lambda'_- ds$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \partial_n w_0 \lambda'_- d\Sigma - \int_{\partial\Omega_-} N^T (\partial_n w_0) \lambda'_- ds + \int_{\partial\Omega_-} V (\partial_n w_0) Z\lambda'_- ds.$$

On discrétise le problème comme précédemment. On note $[\partial_n w_0]$ le vecteur de composantes $\partial_n w_{0i} = \partial_n w_0(s_i)$ où (s_i) sont les segments de Σ . Le système discret est alors donné par par le système matriciel

$$- (-\partial_n N + N^T Z + Z^T N - Z^T V Z) \lambda$$

$$= -\frac{1}{2}M[\partial_n w_0] - N^T[\partial_n w_0] + Z^T V[\partial_n w_0],$$

où M est la matrice définie par

$$[\lambda']^T M[\partial_n w_0] \int_{\Sigma} \partial_n w_0 \lambda' d\Sigma = \sum_{j=1}^{N_s^{\Sigma}} l(j) \frac{\lambda'(n_j) + \lambda'(n_{j+1})}{2} \partial_n w_0(s_j).$$

4.8 Résolution du problème intérieur

Nous avons résolu dans la section précédente le problème extérieur. La donnée de Cauchy λ_- est donc connue. Nous sommes donc en mesure de résoudre le problème intérieur soit

$$\begin{cases} \Delta u^+ + k^2 u^+ = -\delta_{x_0} & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_n u^+ = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \\ u^+ = \lambda_- \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (10)$$

On forme la réaction de Rumsey. On note $\lambda = u^+|_{\partial\Omega_+}$ et $p = \partial_n u^+|_{\partial\Omega_+}$ et $F = (\{p', \lambda'\}, p' = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \lambda' = 0 \text{ sur } \Sigma)$.

Alors $\forall \{p', \lambda'\} \in F$

$$R(\{p, \lambda\}, \{p', \lambda'\}) = \int_{\partial\Omega_+} (\partial_n u^+ \lambda' - u^+ p') ds = - \int_{\Sigma} \lambda_- p' d\gamma.$$

Réciproquement si $\forall \{p', \lambda'\} \in F$, $R = - \int_{\Sigma} \lambda_- p' d\gamma$, alors $p = 0$ sur Γ_+ et $\lambda = \lambda_-$ sur Σ .

La représentation intégrale de la solution du problème intérieur est

$$u^+(x) = G(x, x_0) + Vp(x) + N\lambda(x), \forall x \in \Omega_+.$$

On passe à la limite sur la frontière. Les théorèmes de trace donnent

$$\forall x \in \partial\Omega_+, u^+(x) = G(x, x_0) + Vp(x) + N\lambda(x) + \frac{1}{2}\lambda(x)$$

$$\forall x \in \partial\Omega_+, \partial_n u^+(x) = \partial_n G(x, x_0) - N^T p(x) + D\lambda(x) + \frac{1}{2}p(x).$$

$$\text{Alors, } R\left(\{p, \lambda\}, \{p', \lambda'\}\right) = \int_{\Sigma} \lambda_- \lambda' d\gamma$$

$$\begin{aligned} \text{s'écrit } & \int_{\partial\Omega^+} \partial_n N \lambda \lambda' - N \lambda p' - N^T \lambda' p - V p p' ds \\ & = \int_{\partial\Omega^+} G(x, x_0) p' - \partial_n G(x, x_0) \lambda' d\gamma - \int_{\Sigma} \lambda_- p' d\gamma \end{aligned}$$

On discrétise le problème comme précédemment. On note $[\partial_n G]$ le vecteur de composantes $\partial_n G_i = \partial_n G(s_i, x_0)$ où (s_i) sont les milieux des segments de Γ^+ , $[G]$ le vecteur de composantes $G_i = G(n_i, x_0)$ où n_i sont les noeuds de Σ , $[\lambda_-]$ le vecteur de composantes $\lambda_{-i} = \lambda_-(n_i)$. Le système linéaire à résoudre est

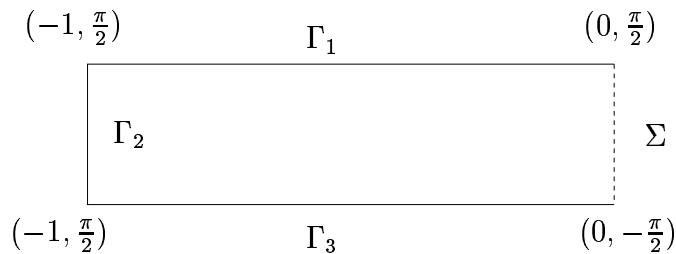
$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & -N^T \\ -N & -V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' \\ p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M_1[\partial_n G] \\ M_2[G] - M_2[\lambda_-] \end{pmatrix}.$$

4.9 Tests numériques

On détaille dans cette section deux tests qui nous ont permis de valider les parties du code développé pendant ce stage correspondant à la détermination de la matrice d'impédance et de ∂w_0 .

4.9.1 Test de la matrice d'impédance

On propose dans ce paragraphe un test numérique pour valider le calcul de la matrice Z . Soit $\partial\Omega_+$ le rectangle de sommets $(0, \frac{\pi}{2})$ $(-1, \frac{\pi}{2})$ $(-1, -\frac{\pi}{2})$ $(0, -\frac{\pi}{2})$.



On considère le problème relatif à l'opérateur Z

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_n v = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \\ v = \varphi & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (11)$$

Si $\varphi(x, y) = \sin(y)$, alors $v(x, y) = \sin(y)$ est solution de l'équation d'Helmholtz.

$$\text{Sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \partial_n v = (0, -\cos(y)) \cdot (0, \pm 1) = \pm \cos(\pm \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\text{Sur } \Gamma_2 \cup \Sigma, \partial_n v = (0, -\cos(y)) \cdot (\pm 1, 0) = 0$$

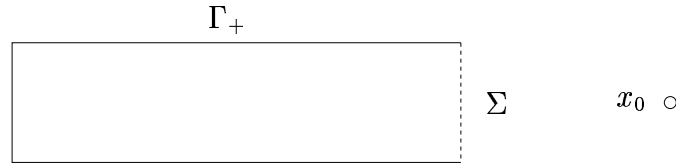
Ce qui prouve que $v(x, y) = \sin(y)$ est solution de (11) et que $\partial_n v|_\Sigma = 0$. Il faut donc vérifier que pour $\varphi(x, y) = \sin(y)$, $Z\varphi = 0$. Ce test a été validé avec une erreur relative de l'ordre de 10^{-3} .

4.9.2 Test de $\partial_n w_0$

On se propose de valider le calcul de $\partial_n w_0$. On considère pour cela le problème

$$\begin{cases} \Delta w_0 + k^2 w_0 = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_n w_0 = -\partial_n G(x, x_0) & \text{sur } \Gamma_+ \\ w_0 = -G(x, x_0) & \text{sur } \Sigma, \end{cases} \quad (12)$$

avec x_0 à l'extérieur de Ω_+ .



Ecrivons la formulation variationnelle de ce problème.

Soit $F = (\{p', \lambda'\} , p' = 0 \text{ sur } \Gamma_+ , \lambda' = 0 \text{ sur } \Sigma)$

On forme la réaction de Rumsey.

Alors $\forall \{p', \lambda'\} \in F$

$$R\left(\{p, \lambda\}, \{p', \lambda'\}\right) = \int_{\partial\Omega_+} (\partial_n w_0 \lambda' - w_0 p') ds = \int_{\partial\Omega_+} G(x, x_0) p' - \partial_n G(x, x_0) \lambda'.$$

Si on note $p = \partial_n w_0|_\Sigma$ et $\lambda = w_0|_{\Gamma_+}$ alors

$$w_0(x) = Vp(x) + N\lambda(x), \forall x \in \Omega_+.$$

On passe à la limite sur la frontière

$$\forall x \in \partial\Omega_+, w_0(x) = Vp(x) + N\lambda(x) + \frac{1}{2}\lambda(x)$$

$$\forall x \in \partial\Omega_+, \partial_n w_0(x) = -N^T p(x) + D\lambda(x) + \frac{1}{2}p(x).$$

$$\text{Alors, } R\left(\{p, \lambda\}, \{p', \lambda'\}\right) = \int_{\partial\Omega_+} G(x, x_0)p' - \partial_n G(x, x_0)\lambda'$$

$$\text{s'écrit } \int_{\partial\Omega_+} \partial_n N\lambda\lambda' - N\lambda p' - N^T \lambda p' - Vpp' = \int_{\partial\Omega_+} G(x, x_0)p' - \partial_n G(x, x_0)\lambda'$$

La formulation variationnelle est identique à celle obtenue pour la résolution de (8). Les problèmes (8) et (12) sont donc résolus de la même manière.

La représentation intégrale de la solution de (12) est

$$w_0(x) = Vp(x) + N\lambda(x), \forall x \in \Omega_+.$$

Or la solution de (12) est $w_0(x) = -G(x, x_0)$.

Le test consiste donc à vérifier

$$G(x, x_0) = Vp(x) + N\lambda(x), \forall x \text{ pour tout } x \in \Omega_+.$$

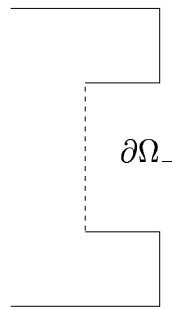
Les résultats obtenus sont satisfaisants :

$$\frac{G(x, x_0)}{Vp(x) + N\lambda(x)} \approx \frac{98}{100}, \forall x \in \Omega_+.$$

4.10 Résultats numériques

Une grande partie du travail réalisé pendant ce stage a été la programmation de la résolution des problèmes intérieurs et extérieurs.

4.10.1 Problème extérieur



Pour le problème extérieur on compare les courants obtenus sur $\partial\Omega_-$ par la méthode directe à ceux obtenus par décomposition de domaine. Pour ce qui est de la méthode directe, la résolution ne nous donne le courant que sur $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$. On reconstitue le courant sur Σ à l'aide de la représentation intégrale.

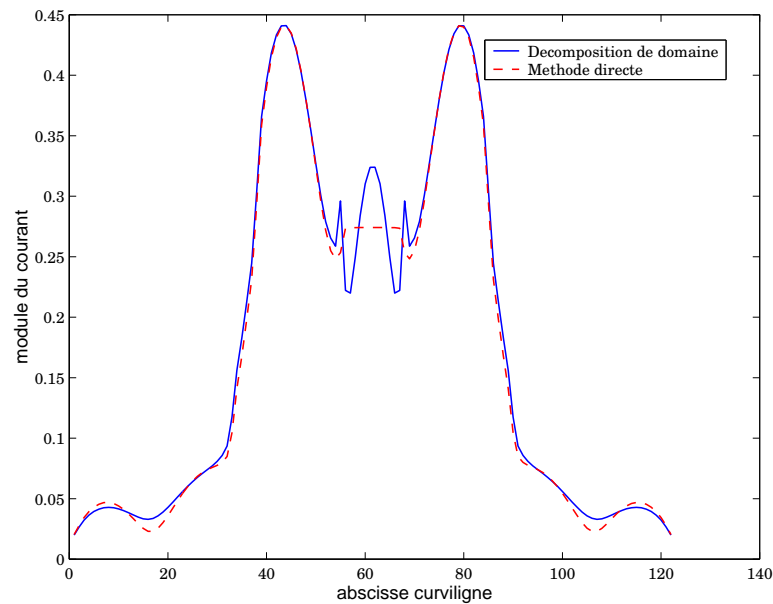
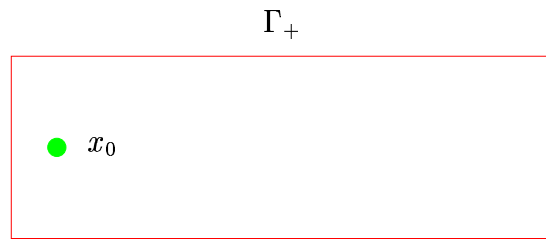


FIG. 2 – courant sur $\partial\Omega_-$

Les abscisses de 0 à 54 et de 69 à 122 correspondent aux noeuds de Γ_- . Les noeuds de Σ sont ceux numérotés de 55 à 68. Nous avons manifestement un problème aux coins qui raccordent Γ_- et Σ . Il semble qu'il faille travailler le raccordement des solutions sur l'interface commune aux deux domaines.

4.10.2 Problème intérieur



On effectue la même démarche pour le problème extérieur. Les courants sont ici comparés sur Γ_+ .

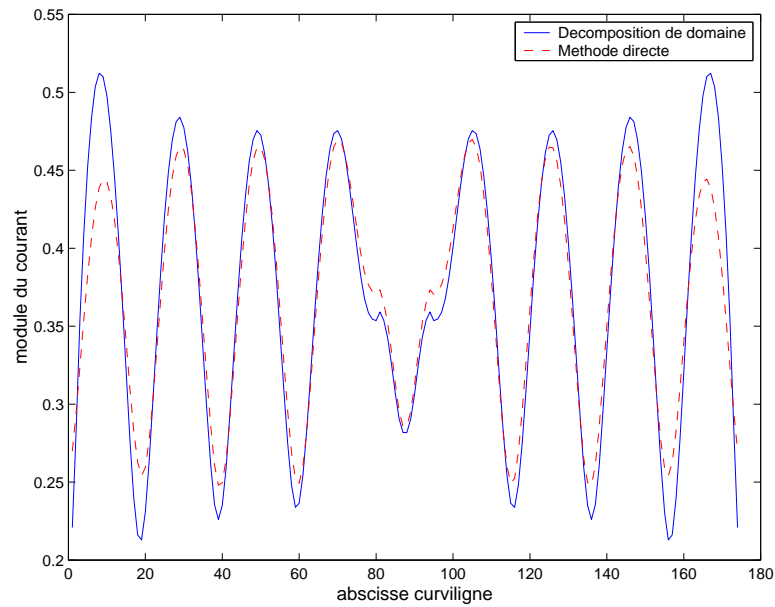


FIG. 3 – courant sur Γ_+

Dans la mesure où le calcul du courant sur Γ_+ est lié au calcul du problème extérieur, les problèmes de raccords se répercutent.

4.10.3 Diagramme de rayonnement

Nous connaissons à présent le courant sur $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$. Nous sommes donc en mesure de calculer le diagramme de rayonnement et de le comparer à celui obtenu par la méthode directe.

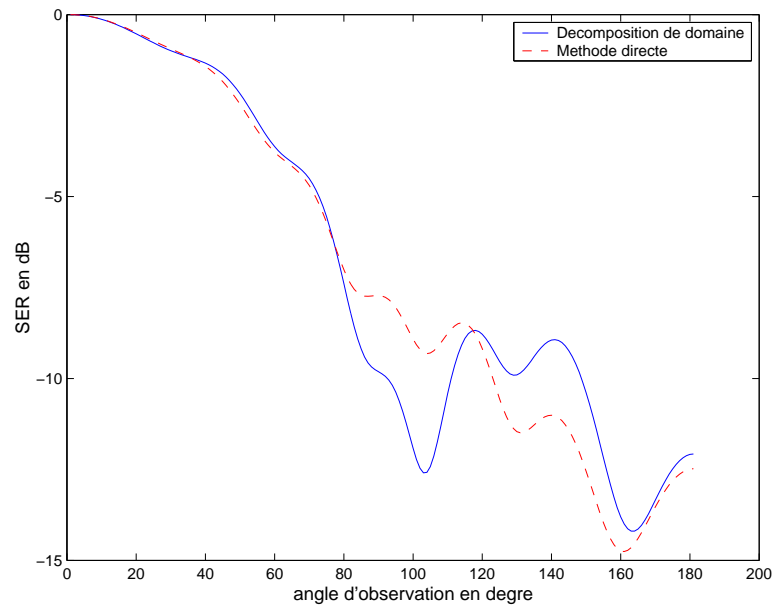


FIG. 4 – Diagramme de rayonnement

La méthode est satisfaisante jusqu'à 80° . Elle est donc adaptée pour le calcul des rayonnements avant. Les problèmes de raccord aux coins perturbent le calcul. La clef de la méthode de décomposition de domaine est donc la maîtrise de ces problèmes de raccord.

5 Résolution directe avec introduction de la frontière artificielle

5.1 Formulation variationnelle

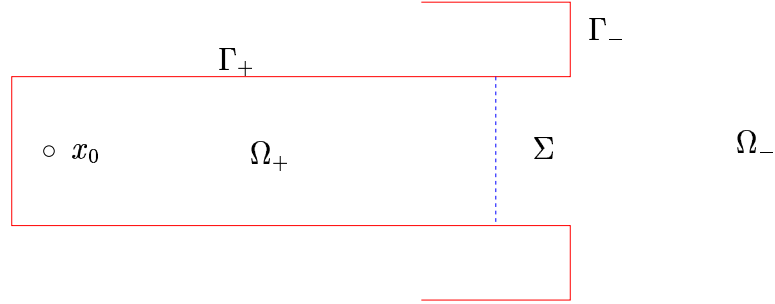
On propose dans cette section une résolution directe par équation intégrale du problème (1) avec introduction de la frontière artificielle Σ . Le principe est identique à celui présenté dans la section (2). La différence réside dans le fait que l'on aura deux inconnues supplémentaires : λ_Σ et p_Σ . L'objectif est de vérifier que l'introduction d'une frontière artificielle est une démarche qui ne perturbe pas les calculs. Cette méthode diffère de la décomposition de domaine dans le sens où les problèmes intérieurs et extérieurs vont rester ici couplés. On a à résoudre le problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = -\delta_{x_0} & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{1/2} (\partial_n u - iku) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

On définit

$$\partial\Omega^+ = \Gamma^+ \cup \Sigma$$

$$\partial\Omega^- = \Gamma^- \cup \Sigma.$$



On pose

$$u^\pm = u|_{\Omega^\pm}$$

$$\lambda_\pm = u^\pm|_{\partial\Omega^\pm}$$

$$p_\pm = \partial_n u^\pm|_{\partial\Omega^\pm}.$$

Les conditions aux limites de (13) imposent

$$p^+ = p^- = 0 \quad \text{sur } \Gamma^+ \cup \Gamma^-.$$

Les conditions de raccords sur Σ se traduisent par

$$p^+ = p^- \quad \text{sur } \Sigma.$$

$$\lambda^+ = \lambda^- \quad \text{sur } \Sigma.$$

Soit E l'ensemble des fonctions test

$$E = \{p'_+, \lambda'_+, p'_-, \lambda'_-\}, \quad \text{tels que}$$

$$p'_+ = 0 \text{ sur } \Gamma_+, p'_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, p'_+ = p'_- \text{ sur } \Sigma, \lambda'_+ = \lambda'_- \text{ sur } \Sigma$$

On forme la réaction de Rumsey

$$R = \int_{\partial\Omega_+} (\partial_n u^+ \lambda'_+ - u^+ p'_+) ds - \int_{\partial\Omega_-} (\partial_n u^- \lambda'_- - u^- p'_-) ds.$$

Les conditions sur les données de Cauchy donnent $R = 0$. Réciproquement si $\forall \{p'_+, \lambda'_+, p'_-, \lambda'_-\} \in E$, $R = 0$ alors

$$p_+ = 0 \text{ sur } \Gamma_+, p_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, p_+ = p_- \text{ sur } \Sigma, \lambda_+ = \lambda_- \text{ sur } \Sigma.$$

Ecrivons à présent les représentations intégrales des solutions u^+ et u^- .

$$u^+(x) = G(x, x_0) + V_+ p_+(x) + N_+ \lambda_+(x) \quad , x \in \Omega_+$$

$$u^-(x) = -V_- p_-(x) - N_- \lambda_-(x) \quad , x \in \Omega_-.$$

Les théorèmes de traces donnent alors

$$u^+(x) = G(x, x_0) + V_+ p_+(x) + N_+ \lambda_+(x) + \frac{1}{2} \lambda_+(x) \quad , x \in \partial\Omega_+$$

$$\partial_n u^+(x) = \partial_n G(x, x_0) - N_+^T p_+(x) + D_+ \lambda_+(x) + \frac{1}{2} p_+(x) \quad , x \in \partial\Omega_+$$

$$u^-(x) = -V_- p_-(x) - N_- \lambda_-(x) - \frac{1}{2} \lambda_-(x) \quad , x \in \partial\Omega_-$$

$$\partial_n u^-(x) = N_-^T p_-(x) - \partial_n N_- \lambda_-(x) - \frac{1}{2} p_-(x) \quad , x \in \partial\Omega_-.$$

Ainsi la réaction de Rumsey devient

$$\begin{aligned} R &= \int_{\partial\Omega_+} (\partial_n G(x, x_0) \lambda'_+ - G(x, x_0) p'_+) ds \\ &+ \int_{\partial\Omega_+} (D_+ \lambda_+ \lambda'_+ - N_+^T p_+ \lambda'_+ + N_+ \lambda_+ p'_+ - V_+ p_+ p'_+) ds \\ &+ \int_{\partial\Omega_-} (D_- \lambda_- \lambda'_- - N_-^T p_- \lambda'_- + N_- \lambda_- p'_- - V_- p_- p'_-) ds = 0. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$p_+ = 0 \text{ sur } \Gamma_+, p_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, p_+ = p_- \text{ sur } \Sigma, \lambda_+ = \lambda_- \text{ sur } \Sigma$$

$$p'_+ = 0 \text{ sur } \Gamma_+, p'_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, p'_+ = p'_- \text{ sur } \Sigma, \lambda'_+ = \lambda'_- \text{ sur } \Sigma,$$

et en notant $[\partial_n G]$ le vecteur de composantes $\partial_n G_i = \partial_n G(s_i, x_0)$ où (s_i) sont les milieux des segments de $\partial\Omega_+$ et $[G]$ le vecteur de composantes $G_i = G(n_i, x_0)$ (n_i noeuds de Σ), l'équation variationnelle précédente donne lieu au système discret

$$\begin{pmatrix} \lambda'_\Sigma \\ \lambda'_{\Gamma^+} \\ p_\Sigma \\ \lambda'_{\Gamma^-} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D_{\Sigma_p, \Sigma_p}^+ + D_{\Sigma_p, \Sigma_p}^- & D_{\Sigma_p, \Gamma_p^+}^+ & -N_{\Sigma_p, \Sigma_s}^{+T} - N_{\Sigma_p, \Sigma_s}^{-T} & D_{\Sigma_p, \Gamma_p^-}^- \\ & D_{\Gamma_p^+, \Sigma_p}^+ & -N_{\Sigma_s, \Gamma_p^+}^{+T} & 0 \\ -N_{\Sigma_s, \Sigma_p}^+ - N_{\Sigma_s, \Sigma_p}^- & -N_{\Sigma_s, \Gamma_p^+}^+ & -V_{\Sigma_s, \Sigma_s}^+ - V_{\Sigma_s, \Sigma_s}^- & -N_{\Sigma_s, \Gamma_p^-}^- \\ & D_{\Gamma_p^-, \Sigma_p}^- & 0 & -N_{\Sigma_s, \Gamma_p^-}^{-T} & D_{\Gamma_p^-, \Gamma_p^-}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_\Sigma \\ \lambda_{\Gamma^+} \\ p_\Sigma \\ \lambda_{\Gamma^-} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \lambda'_\Sigma \\ \lambda'_{\Gamma^+} \\ p_\Sigma \\ \lambda'_{\Gamma^-} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -M_1[\partial_n G|_\Sigma] \\ -M_1[\partial_n G|_{\Gamma^+}] \\ M_2[G] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_\Sigma \\ \lambda_{\Gamma^+} \\ p_\Sigma \\ \lambda_{\Gamma^-} \end{pmatrix}.$$

5.2 Résultats numériques

On compare les courants obtenus sur Γ_+ par la méthode directe à ceux obtenus en intégrant la frontière artificielle. Le programme n'a été validé que dans le cas où $\Gamma_+ = \Gamma_-$. La solution u est alors égale à $(\lambda_+ - \lambda_-)$ (u est le saut entre le courant intérieur et le courant extérieur).

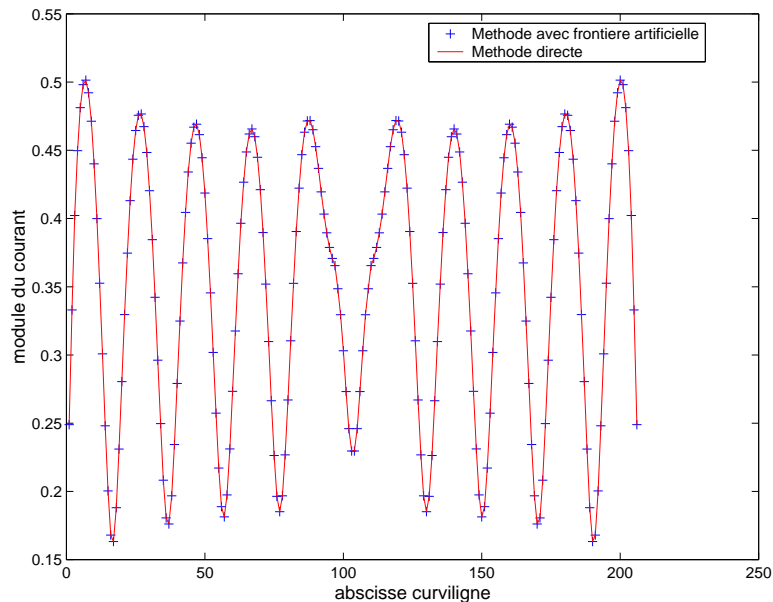


FIG. 5 – courant sur Γ_+

6 Conclusion

Le but de mon stage était de mettre en œuvre une méthode de décomposition de domaine basée sur le calcul d'un opérateur d'impédance pour l'étude d'un modèle bidimensionnel décrivant le rayonnement d'un cornet.

Dans un premier temps, je me suis familiarisé avec la méthode de résolution par équation intégrale ainsi qu'aux bibliothèques du CERFACS relatives à cette méthode. J'ai ensuite programmé à partir de ces bibliothèques cette méthode de décomposition de domaine.

Cette méthode apparaît adaptée pour le calcul des rayonnements avant (diagramme de rayonnement très satisfaisant jusqu'à 80°). Il subsiste quelques problèmes d'oscillations sur les courants au niveau du raccord entre la frontière artificielle et les parois métalliques. Toutefois les perspectives d'application de cette méthode aux problèmes de rayonnement de réseaux finis de cornets sont très bonnes.

Références

- [1] A. Bendali. Introduction à la résolution par équations intégrales de problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques. Technical report, Cours DEA Mathématiques Appliquées, UPS-INSA-ENSAE, Toulouse, 1997.
- [2] A. Bendali. Boundary element solution of scattering problems relative to a generalized impedance boundary condition. In W. Jäger, J. Nečas, O. John, K. Najzar, and J. Stará, editors, *Partial differential equations, Theory and numerical solution*, volume 406, pages 10–24. Chapman & Hall/CRC, 1999.
- [3] A. Bendali and C. Devys. Calcul numérique du rayonnement de cornets électromagnétiques dont l'ouverture est partiellement remplie par un diélectrique. Technical report, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques Appliquées, 1985.
- [4] Y. Boubendir. *Techniques de décomposition de domaine - Equations intégrales*. PhD thesis, INSA-MIP, Toulouse, en préparation.
- [5] G. Chen and J. Zhou. In *Boundary element Methods*. Academic Press, London, 1992.
- [6] D. Colton and R. Kress. In *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, volume 93. Springer-Verlag, 1992.
- [7] P.L. Lions. On the Schwarz alternating method. In *First international Symposium on domain decomposition methods for partial differential equations*. 1988.