

# Introduction

La conception optimale de forme est la recherche de la “meilleure” forme géométrique d’un objet donné par rapport à certains critères physiques. Cette technique a été introduite il y a une vingtaine d’années et ce sont les mécaniciens qui furent les premiers à l’utiliser avec succès pour la conception de pièces solides et légères. Elle intervient dans divers domaines tels que la mécanique des structures, la mécanique des fluides, ou encore l’électromagnétisme. Les critères à optimiser sont par exemple la solidité, la traînée, le rendement ou l’énergie rayonnée. En règle générale, ces critères font intervenir la solution d’un système d’équations aux dérivées partielles posées sur un ouvert  $\Omega$ , celui-ci pouvant être l’espace occupé par l’objet ou son complémentaire. En fait, c’est cet ouvert  $\Omega$  qui est la véritable inconnue du problème.

Une solution habituellement retenue pour la détermination de la forme optimale consiste à utiliser des dérivées par rapport à la géométrie. En pratique, cela évite de nombreuses évaluations de la fonction coût (*i.e.* le critère à optimiser), souvent gourmandes en temps de calcul et en place mémoire. Ainsi, le problème d’optimisation de forme va comprendre trois étapes:

- le calcul formel de la dérivée par rapport à la géométrie,
- l’approximation numérique de cette dérivée,
- le choix de l’algorithme d’optimisation.

Nous éclaircirons le premier point ultérieurement.

Le travail présenté ici est orienté vers la conception de forme appliquée à un problème de diffraction électromagnétique. Il s’inspire en grande partie d’une étude de [MaA94] relative au problème de Helmholtz stationnaire. Dans cette étude, le calcul de la dérivée est effectué en deux temps :

- tout d’abord, on exhibe une expression de la dérivée définie sur tout le domaine,
- à partir de celle-ci, on déduit une expression répartie uniquement sur le bord de l’objet.

L’avantage de cette dernière est qu’elle ne fait intervenir que des quantités définies sur la surface de l’objet (en particulier le courant et la charge surfaciques). Pour la résolution numérique, on peut alors utiliser la méthode dite des éléments finis de frontière. Cela revient à poser le problème sous la forme d’une équation intégrale dont l’inconnue est le courant surfacique défini sur l’objet. Après discrétisation, on obtient un système linéaire plein qui peut être de très grande taille pour les objets tridimensionnels. Cette méthode a ainsi un domaine d’application limité principalement par la taille mémoire des ordinateurs actuels. Une autre limitation intervient au niveau même de la modélisation

de ce problème. En effet, il arrive que certains critères d'optimisation nécessitent la connaissance des quantités définies sur la surface pour une large plage de fréquences : on doit alors assembler puis résoudre autant de systèmes linéaires que de fréquences présentes dans la plage d'intérêt. Une alternative consiste à poser le problème de diffraction dans le domaine temporel puis à appliquer une transformation de Fourier. On obtient ainsi la réponse du système pour l'ensemble des fréquences présentes dans le signal incident. Au point de vue numérique, la résolution de l'équation de Helmholtz instationnaire s'appuie essentiellement sur deux types de méthodes<sup>1</sup> :

- les méthodes d'éléments finis,
- et plus couramment, les méthodes de différences finies (FDTD pour “Finite-Difference Time-Difference Method”).

La méthode par éléments finis, quoique présentant l'avantage de rendre compte correctement de la géométrie de l'objet, a pour inconvénient majeur de nécessiter l'inversion d'un système linéaire creux à chaque pas de temps, la condensation de masse étant à l'heure actuelle inaccessible pour les éléments tétraédriques.

De par la simplicité de sa mise en œuvre sur ordinateur, la FDTD connaît une popularité croissante dans de nombreux domaines d'application. Le champ est calculé sur une grille régulière et une simple formule explicite permet l'itération temporelle. Ainsi, aucune résolution de système linéaire n'est requise et l'algorithme se prête bien à un traitement parallèle sur ordinateur. Toutefois, une difficulté demeure quant à la géométrie de l'objet sur lequel on doit imposer la condition à la limite, celle-ci pouvant être très mal approchée sur le maillage régulier de la grille de calcul. Pour certaines géométries, l'approximation dite en “marches d'escaliers” génère des diffractions parasites qui entachent le résultat du calcul si la discrétisation est par trop lâche. Des solutions, reposant sur une modification du schéma au voisinage de l'objet ont été proposées mais elles présentent l'inconvénient de diminuer de façon notable le pas de temps utilisé pour le calcul.

La méthode des domaines fictifs peut être une solution à cette difficulté. Par sa formulation générale, elle permet une prise en compte correcte de la géométrie, et l'objet diffractant apparaît alors comme simple terme source dans les équations de la FDTD (ce terme source étant obtenu par la résolution d'un “petit” système linéaire creux). L'idée consiste à prolonger la solution du problème extérieur à l'intérieur du domaine défini par le conducteur. Ce prolongement est unique s'il est choisi comme la solution des équations de Helmholtz contraintes par la condition à la limite sur la surface du conducteur. Cette contrainte fait alors apparaître un multiplicateur de Lagrange qui s'identifie à la dérivée temporelle du courant surfacique défini sur l'objet. Ainsi, l'on est passé de la détermination d'un champ défini sur le domaine extérieur à l'objet à celle, conjointe, d'un champ défini sur tout l'espace et du courant à la surface du conducteur. Lors de la discrétisation, on peut choisir un maillage régulier pour le champ et un maillage surfacique classique pour le courant. Remarquons que cette méthode fournit aussi directement les quantités définies sur la surface contrairement à la FDTD qui, elle, ne donne que les valeurs du champ au voisinage de l'objet.

Nous allons proposer dans ce rapport une technique d'optimisation de forme originale utilisant le principe des domaines fictifs. L'exposé des différentes notions sera organisé de la façon suivante :

Le premier chapitre va présenter rapidement la méthode des domaines fictifs et définir de manière précise le calcul de la dérivée. L'introduction d'un problème adjoint permettra d'explicitier les deux

---

1. Si l'on oublie les équations intégrales dans le domaine temporel, qui font l'objet d'une recherche très vive.

expressions de la dérivée (l'une répartie sur le domaine, l'autre, sur le bord de l'obstacle).

Dans le second chapitre nous nous intéresserons à l'approximation numérique de la dérivée ainsi qu'au choix de l'algorithme d'optimisation.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous donnerons quelques résultats numériques pour valider la méthode.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Analyse mathématique</b>	<b>6</b>
1.1 Présentation de l'optimisation de forme . . . . .	6
1.2 Méthode des domaines fictifs pour l'équation de Helmholtz instationnaire . . . . .	7
1.2.1 Formulation du problème physique . . . . .	7
1.2.2 Formulation du nouveau problème . . . . .	8
1.3 Dérivation du problème par rapport à la géométrie . . . . .	10
1.3.1 Expression de la dérivée répartie dans le domaine . . . . .	10
1.3.2 Expression intrinsèque de la dérivée . . . . .	13
1.3.3 Calcul formel de l'état adjoint . . . . .	14
1.4 Application pratique . . . . .	16
1.4.1 Définition du critère d'optimisation . . . . .	16
<b>2 Le problème discret</b>	<b>18</b>
2.1 Approximation de l'état direct . . . . .	18
2.1.1 Semi-discrétisation en espace . . . . .	18
2.1.2 Discrétisation temporelle . . . . .	20
2.1.3 Propriétés du schéma - Remarques . . . . .	21
2.2 Approximation de la charge . . . . .	22
2.2.1 Semi-discrétisation en espace . . . . .	22
2.2.2 Discrétisation temporelle . . . . .	23
2.3 Approximation de la dérivée et processus d'optimisation . . . . .	24
2.3.1 Choix des perturbations . . . . .	24
2.3.2 Algorithme d'optimisation . . . . .	26
<b>3 Résultats numériques</b>	<b>29</b>
3.1 Approximation de la dérivée . . . . .	29
3.1.1 Choix du contour $C_a$ . . . . .	29
3.1.2 Raffinement du maillage . . . . .	30
3.2 Convergence de l'algorithme d'optimisation . . . . .	31
<b>Conclusion</b>	<b>33</b>
<b>A Expression de la dérivée répartie dans le domaine</b>	<b>34</b>

**B Quelques résultats techniques**

**36**

**Bibliographie**

**40**

# Chapitre 1

## Analyse mathématique

### 1.1 Présentation de l'optimisation de forme

Le but de l'optimisation de forme est de déterminer la "meilleure" forme géométrique d'une structure en fonction de certains paramètres. La géométrie optimale, choisie parmi une famille de domaines admissibles, est obtenue en pratique par la minimisation d'un critère  $J$  approprié (appelé aussi fonction coût). Schématiquement, ce type de problèmes peut être exprimé de la façon suivante :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Trouver } \Omega^* \in \mathcal{O} \text{ tel que} \\ J(\Omega^*, u_{\Omega^*}) = \min_{\omega \in \mathcal{O}} J(\omega, u_\omega) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $u_\omega$  est solution d'un problème d'état relatif à l'ouvert variable  $\omega$ .

Si l'on souhaite dériver directement cette fonction coût, on risque d'être confronté à plusieurs problèmes délicats :

- $J$  n'est pas définie sur un espace vectoriel,
- la fonction  $\omega \mapsto u_\omega$  n'est pas à valeurs dans un espace vectoriel fixe.

Toutes ces difficultés sont écartées lorsqu'on applique la méthode du transport. L'idée consiste simplement à remplacer la recherche de l'ouvert optimal  $\Omega^*$  par la recherche d'une transformation  $F$  telle que  $F(\Omega) = \Omega^*$  soit optimal,  $\Omega$  désignant un ouvert de référence. Cela permet d'utiliser les outils classiques du calcul différentiel dans les espaces normés. Nous nous attarderons plus longuement sur cette méthode dans les paragraphes ultérieurs.

Nous allons maintenant définir le cadre mathématique de notre étude :  
Soit  $B$ , une boule de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $\overline{\Omega}$ . Les transformations  $F$  qui interviendront par la suite seront des éléments de l'espace de Sobolev

$$\mathcal{E} = W^{1,\infty}(B, \mathbb{R}^n) \quad (1.2)$$

muni de la norme

$$\|F\|_{\mathcal{E}} = \|F\|_{L^\infty(B, \mathbb{R}^n)} + \|DF\|_{L^\infty(B, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))} \quad (1.3)$$

Notons que les éléments de  $\mathcal{E}$  sont les applications lipschitziennes de  $B$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Enfin, on désignera par  $\mathcal{U}$ , l'ensemble des éléments  $F$  de  $\mathcal{E}$ , inversibles sur  $B$  et dont l'inverse  $F^{-1}$  est lipschitzienne sur  $F(B)$ . On peut montrer que cet ensemble est un ouvert de  $\mathcal{E}$ .

Dans cette étude, nous nous intéresserons à la conception optimale de forme appliquée à des problèmes d'électromagnétisme, et plus particulièrement à des problèmes de diffraction d'ondes. Le paragraphe suivant va décrire le cadre général de résolution de ces problèmes.

## 1.2 Méthode des domaines fictifs pour l'équation de Helmholtz instationnaire

### 1.2.1 Formulation du problème physique

Nous allons maintenant considérer le problème de diffraction d'une onde électromagnétique par un conducteur parfait, noté  $\omega_{int}$  ( $\omega_{int} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  ou  $3$ ), de bord  $\gamma$ . Le champ électromagnétique  $E$  est gouverné par une équation de Helmholtz dans le domaine complémentaire de l'obstacle et satisfait une condition de type Dirichlet sur sa frontière :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \text{rot rot } E = f & \text{dans } \omega_{int}^c \times [0, T] \\ E \wedge n|_{\gamma} = 0 & \text{sur } \gamma \times [0, T] \\ E(x, 0) = 0 & \text{dans } \omega_{int}^c \\ \frac{\partial E}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{dans } \omega_{int}^c \end{array} \right. \quad (1.4)$$

On supposera par ailleurs que  $f$  vérifie les propriétés :

- $f \in L^2(0, T, L^2(\omega_{int}^c)^n)$ ,
- $\text{supp } f$  est borné en espace,
- $\text{div } f = 0$  dans  $\omega_{int}^c \times [0, T]$ .

Afin de se ramener à un domaine de calcul borné, on introduit une surface artificielle  $\Sigma$  (contenant le support de  $f$ ), sur laquelle on impose soit des conditions de réflexion, soit des conditions absorbantes. Pour simplifier, on peut supposer que ces conditions sont de type réflexion (c'est-à-dire de Dirichlet) :

$$E(t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (1.5)$$

la notation  $E(t)$  désignant la fonction  $x \mapsto E(x, t)$  à  $t$  fixé. Enfin, on appellera  $\Omega$ , le domaine intérieur délimité par la frontière  $\Sigma$  (voir Fig. 1.1).

Une des techniques utilisées pour la résolution de ce problème est la méthode des domaines fictifs. L'idée essentielle de cette méthode consiste à prolonger  $E(t)$  en une fonction définie sur le domaine fixe  $\Omega$  (notée  $u(t)$ ) et à introduire une nouvelle inconnue  $\lambda(t)$  sur la frontière  $\gamma$  de l'obstacle. En fait, c'est cette variable auxiliaire qui va permettre de prendre en compte la condition aux limites du problème (1.4).

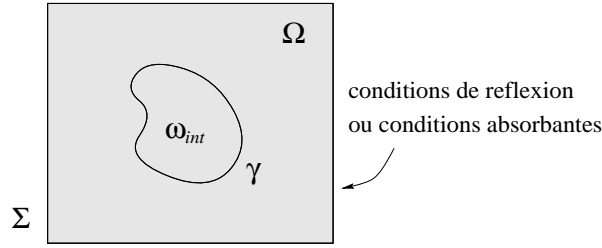


FIG. 1.1 – Géométrie associée au problème

### 1.2.2 Formulation du nouveau problème

Pour commencer, nous demanderons à la fonction  $u(t)$  d'appartenir à l'espace :

$$H_\gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \{v \in H(\text{rot}, \Omega) / v \wedge n|_\gamma = 0\} \quad (1.6)$$

Notons que cet espace tient compte de la régularité imposée par l'équation d'évolution (posée maintenant dans l'ouvert  $\Omega$ ), mais aussi de la condition de Dirichlet issue du problème initial. Le problème à résoudre est maintenant le suivant :

Trouver  $u \in L^2(0, T, H_\gamma)$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \text{rot rot } u = \tilde{f} & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $\tilde{f}$  est un prolongement de  $f$  sur  $\omega$  défini par :

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{dans } \omega_{ext} = \Omega \setminus \overline{\omega_{int}} \\ 0 & \text{dans } \overline{\omega_{int}} \end{cases} \quad (1.8)$$

Il est clair que toute solution du problème (1.7) coïncide sur  $\omega_{ext}$  avec l'unique solution  $E$  recherchée du problème initial. Si maintenant, on considère le temps  $t$  comme un paramètre et la fonction  $g(t) = \tilde{f}(t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t)$  comme une donnée, on peut résoudre (1.7) par le biais d'un problème de minimisation avec contrainte, à savoir :

$$u(t) = \arg \min_{v \in H_\gamma} J(v, t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.9)$$

où la fonctionnelle  $J(v, t)$  a pour définition :

$$J(v, t) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\text{rot } v|^2 - g(t) \cdot v \right) dx \quad (1.10)$$

Pour résoudre ce problème d'optimisation, on introduit le lagrangien :

$$\mathcal{L}(v, \mu, t) = J(v, t) - \int_{\gamma} \mu \cdot v \wedge n \, d\gamma \quad (1.11)$$

La solution  $(u(t), \lambda(t))$  est alors obtenue pour tout  $t \in [0, T]$  en écrivant que les dérivées partielles du lagrangien sont nulles à l'optimum :

$$\begin{cases} \partial_v \mathcal{L}(u(t), \lambda(t), t) \cdot v = 0 & \forall v \in \mathcal{V} \\ \partial_\mu \mathcal{L}(u(t), \lambda(t), t) \cdot \mu = 0 & \forall \mu \in \mathcal{M}(\gamma), \end{cases} \quad (1.12)$$

les espaces  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{M}(\gamma)$  étant définis par (1.15) et (1.17).

On voit finalement que le couple  $(u, \lambda)$  est solution du problème d'évolution variationnel suivant :

$$u \in L^2(0, T, \mathcal{V}), \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0, T, \mathcal{H}) \text{ et } \lambda \in L^2(0, T, \mathcal{M}(\gamma)) \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(u(t), v)_\Omega + a(\Omega, u(t), v) = (\tilde{f}(t), v)_\Omega + b(\gamma, v, \lambda(t)) & \forall v \in \mathcal{V} \\ b(\gamma, u(t), \mu) = 0 & \forall \mu \in \mathcal{M}(\gamma) \\ u(0) = \frac{du}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

avec, par définition :

$$\mathcal{V} = H(\text{rot}, \Omega) \quad (1.15)$$

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega)^n \quad (1.16)$$

$$\mathcal{M}(\gamma) = \begin{cases} H^{-1/2}(\gamma) & \text{si } n = 2 \\ H^{-1/2}(\text{div}_\gamma, \gamma) & \text{si } n = 3 \end{cases} \quad (1.17)$$

et

$$a(\Omega, u, v) = \int_\Omega \text{rot } u \cdot \text{rot } v \, dx = \int_\Omega \text{tr} \left( \mathbf{D}u (\mathbf{D}v^T - \mathbf{D}v) \right) dx \quad (1.18)$$

$$b(\gamma, v, \mu) = \int_\gamma \mu \cdot v \wedge n \, d\gamma \quad (1.19)$$

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega u \cdot v \, dx \quad (1.20)$$

Notons que la condition aux limites  $u \wedge n|_\gamma = 0$  est prise ici au sens faible.

**Remarque 1** Soit  $B$ , l'opérateur linéaire continu de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{M}'(\gamma)$  associé à la forme bilinéaire  $b$  :

$$b(v, \mu) = \langle Bv, \mu \rangle_{\mathcal{M}'(\gamma), \mathcal{M}(\gamma)} \quad \forall v \in \mathcal{V}, \forall \mu \in \mathcal{M}(\gamma). \quad (1.21)$$

Si la propriété (1.13) a lieu, alors  $u$  est continue de  $[0, T]$  dans  $\mathcal{H}$ . De plus, en écrivant le système (1.14) pour des éléments  $v$  de  $\text{Ker}(B)$ , on déduit que  $\frac{d^2 u}{dt^2}$  est dans  $L^2(0, T, \text{Ker}(B)')$  (puisque  $\tilde{f} \in L^2(0, T, \mathcal{H})$  par définition). Par suite,  $\frac{du}{dt}$  est continue de  $[0, T]$  dans  $\text{Ker}(B)'$ , et les notations  $u(0)$  et  $\frac{du}{dt}(0)$  ont alors un sens.

**Remarque 2** *La démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution relative au problème (1.14) repose sur une relation de compatibilité entre les espaces  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{M}(\gamma)$ , appelée condition inf-sup :*

$$\exists \beta > 0, \quad \sup_{v \in \mathcal{V}} \frac{|b(v, \mu)|}{\|v\|_{\mathcal{V}}} \geq \beta \|\mu\|_{\mathcal{M}(\gamma)} \quad \forall \mu \in \mathcal{M}(\gamma) \quad (1.22)$$

*Dans la suite, nous supposons que cette condition est vérifiée.*

Il ne reste plus qu'à obtenir une formulation variationnelle équivalente au système (1.14). Pour ne pas surcharger le texte, nous adopterons désormais les notations suivantes :

$$\mathcal{W} = \left\{ v \in L^2(0, T, \mathcal{V}) / \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T, \mathcal{H}) \right\} \quad (1.23)$$

$$\mathcal{W}_0 = \left\{ v \in \mathcal{W} / v(0) = \frac{dv}{dt}(0) = 0 \text{ dans } \Omega \right\} \quad (1.24)$$

$$\mathcal{W}_T = \left\{ v \in \mathcal{W} / v(T) = \frac{dv}{dt}(T) = 0 \text{ dans } \Omega \right\} \quad (1.25)$$

La formulation variationnelle du nouveau problème est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_\Omega, \lambda_\gamma) \in \mathcal{W} \times L^2(0, T, \mathcal{M}(\gamma)) \text{ solution de :} \\ \int_0^T (u(t), \frac{d^2 v}{dt^2}(t))_\Omega + a(\Omega, u(t), v(t)) dt = \int_0^T (\tilde{f}(t), v(t))_\Omega + b(\gamma, v(t), \lambda(t)) dt \quad \forall v \in \mathcal{W}_T \\ \int_0^T b(\gamma, u(t), \mu(t)) dt = 0 \quad \forall \mu \in L^2(0, T, \mathcal{M}(\gamma)) \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Même si ce résultat est important, il n'est pas directement exploitable du point de vue de l'optimisation de forme. L'inconvénient majeur est que le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_\gamma$  qui apparaît dans la formulation est à valeurs dans un espace vectoriel variable. Nous verrons dans le paragraphe suivant comment l'on peut remédier à cette situation.

### 1.3 Dérivation du problème par rapport à la géométrie

Dans cette partie, nous allons donner des outils efficaces permettant de traiter le problème d'optimisation de forme relatif au système (1.4). Rappelons que la géométrie optimale dépend exclusivement du critère utilisé. Par conséquent, c'est ce critère (ou fonction coût) qui sera le véritable objet du processus d'optimisation. Pour fixer les esprits, nous noterons  $\tilde{J}(\Omega) = \tilde{J}(\Omega, u_\Omega)$  la fonction coût. Le terme  $u_\Omega$  désigne évidemment la solution du problème de Helmholtz relatif au domaine  $\Omega$ . Enfin, pour simplifier l'étude, nous supposons que  $\tilde{J}$  ne dépend de la géométrie que par l'intermédiaire de la fonction  $u_\Omega$ .

#### 1.3.1 Expression de la dérivée répartie dans le domaine

Pour contourner les difficultés évoquées au paragraphe précédent, nous utiliserons la méthode du transport. Cela revient à considérer le domaine variable  $\omega_{int}$  comme l'image par une fonction  $F \in \mathcal{U}$  d'un ouvert de référence  $\Omega_{int}$  :

$$\omega_{int} = F(\Omega_{int}) \quad (1.27)$$

Dans le même esprit, nous noterons  $\gamma = F(\Gamma)$  et  $\omega_{ext} = F(\Omega_{ext})$ .

Nous ferons encore quelques hypothèses supplémentaires :

**Hypothèse 1** *Les transformations  $F$  envisagées vérifieront la propriété  $F(\Omega) = \Omega$  et ne feront intervenir que de faibles perturbations intérieures du domaine.*

Plus précisément nous nous placerons dans le sous espace  $\mathcal{U}'$  de  $\mathcal{U}$  défini par :

$$\mathcal{U}' = \{F \in \mathcal{U} / F = I + \Theta, \Theta|_{\Sigma} = 0\} \quad (1.28)$$

**Hypothèse 2** *On admettra que le terme source  $\tilde{f}$  ne dépend pas de la paramétrisation du domaine  $\Omega$ , c'est-à-dire :*

$$\tilde{f} \circ F = \tilde{f} \quad \forall F \in \mathcal{U}' \quad (1.29)$$

Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires pour commencer l'analyse.

Posons, pour  $F \in \mathcal{U}$ ,  $u, v \in \mathcal{V}$  et  $\lambda, \mu \in \mathcal{M} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{M}(\Gamma)$  :

$$A(F, u, v) = a(F(\Omega), u \circ F^{-1}, v \circ F^{-1}) \quad (1.30)$$

$$B(F, v, \mu) = b(F(\Gamma), v \circ F^{-1}, \mu \circ F^{-1}) \quad (1.31)$$

$$[u, v]_F = (u \circ F^{-1}, v \circ F^{-1})_{F(\Omega)} \quad (1.32)$$

$$J(F, u) = \tilde{J}(F(\Omega), u \circ F^{-1}) \quad (1.33)$$

$$j(F) = \tilde{j}(F(\Omega)) \quad (1.34)$$

En supposant un peu plus de régularité sur la fonction  $u_{F(\Omega)}(t)$  (par exemple,  $H^1$  par morceaux), on montre que le couple  $(u_F, \lambda_F) = (u_{F(\Omega)} \circ F, \lambda_{F(\Gamma)} \circ F)$  est solution dans  $\mathcal{W} \times L^2(0, T, \mathcal{M})$  du système variationnel :

$$\begin{cases} \int_0^T [u(t), \frac{d^2 v}{dt^2}(t)]_F + A(F, u(t), v(t)) dt = \int_0^T [\tilde{f}(t), v(t)]_F + B(F, v(t), \lambda(t)) dt \quad \forall v \in \mathcal{W}_T \\ \int_0^T B(F, u(t), \mu(t)) dt = 0 \quad \forall \mu \in L^2(0, T, \mathcal{M}) \end{cases} \quad (1.35)$$

Après changement de variables (transport), on obtient une formulation variationnelle équivalente à (1.26), pour laquelle le domaine d'intégration est de nouveau l'ouvert de référence  $\Omega$ . La solution  $(u_F, \lambda_F)$  de ce problème (l'état direct) vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega} \left( u \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} + \text{tr} \left( Du DF^{-1} (DF^{-T} Dv^T - Dv DF^{-1}) \right) \right) JF dx dt = \\ \quad = \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot v JF dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \lambda \cdot v \wedge n J_T F d\Gamma dt \quad \forall v \in \mathcal{W}_T \\ \int_0^T \int_{\Gamma} \mu \cdot u \wedge n J_T F d\Gamma dt = 0 \quad \forall \mu \in L^2(0, T, \mathcal{M}) \end{cases} \quad (1.36)$$

où  $JF = |\det DF|$  et  $J_T F = JF \|DF^{-T} n\|$  représentent respectivement le jacobien et le jacobien tangentiel de  $F$ . Notons que si  $F$  est l'identité de  $\mathcal{E}$ , on retrouve évidemment le système variationnel

initial (1.26) relatif au domaine  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega} u_I \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} + \text{rot } u_I \cdot \text{rot } v \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot v \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \lambda_I \cdot v \wedge n \, d\Gamma \, dt \quad \forall v \in \mathcal{W}_T \\ \int_0^T \int_{\Gamma} \mu \cdot u_I \wedge n \, d\Gamma \, dt = 0 \quad \forall \mu \in L^2(0, T, \mathcal{M}) \end{cases} \quad (1.37)$$

Revenons au problème d'optimisation : l'objectif est maintenant de déterminer la transformation  $F = I + \Theta$  qui minimise la nouvelle fonction coût  $j(F)$ . Pour ce faire, nous devons obtenir une expression de la dérivée directionnelle de  $j$  au point  $I$ . En effet, nous avons en première approximation :

$$j(I + \Theta) \simeq j(I) + \text{D}j(I) \cdot \Theta \quad (1.38)$$

Pour calculer la dérivée première de la fonction coût, nous utiliserons la méthode du lagrangien introduite par J. Céa ([Céa86]). Le lagrangien est défini sur  $\mathcal{U} \times \mathcal{W}_0 \times L^2(0, T, \mathcal{M}) \times \mathcal{W}_T \times L^2(0, T, \mathcal{M})$  par la relation :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F, u, \lambda, v, \mu) &= \int_0^T \int_{\Omega} \left( u \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} + \text{tr} \left( \text{D}u \text{D}F^{-1} (\text{D}F^{-T} \text{D}v^T - \text{D}v \text{D}F^{-1}) \right) - \tilde{f} \cdot v \right) JF \, dx \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma} (\lambda \cdot v \wedge n + \mu \cdot u \wedge n) J_{\Gamma} F \, d\Gamma \, dt + J(F, u) \end{aligned} \quad (1.39)$$

Comme  $(u_F, \lambda_F)$  est solution du problème direct, on a en particulier :

$$\mathcal{L}(F, u_F, \lambda_F, v, \mu) = J(F, u_F) = j(F) \quad \forall (v, \mu) \in \mathcal{W}_T \times L^2(0, T, \mathcal{M}) \quad (1.40)$$

Ainsi, grâce aux techniques de contrôle optimal, il est possible d'obtenir une expression de la dérivée totale de la fonction coût (par rapport à  $F$ ) qui ne fasse intervenir qu'une seule dérivée partielle du lagrangien. En effet, on a d'après (1.40) :

$$\begin{aligned} \text{D}j(F) \cdot \Theta &= \frac{d}{dF} \mathcal{L}(F, u_F, \lambda_F, v, \mu) \cdot \Theta \\ &= \partial_F \mathcal{L} \cdot \Theta + \partial_u \mathcal{L} \cdot (\dot{u}_F \cdot \Theta) + \partial_{\lambda} \mathcal{L} \cdot (\dot{\lambda}_F \cdot \Theta) + \partial_v \mathcal{L} \cdot (\dot{v}_F \cdot \Theta) + \partial_{\mu} \mathcal{L} \cdot (\dot{\mu}_F \cdot \Theta) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Les dérivées partielles  $\partial_v \mathcal{L}$  et  $\partial_{\mu} \mathcal{L}$  sont nulles, en vertu des équations variationnelles (1.36). De plus, le couple  $(v, \mu)$  peut être choisi de manière à éliminer les termes  $\partial_u \mathcal{L}$  et  $\partial_{\lambda} \mathcal{L}$ , dont l'expression est inconnue. Un tel couple (désigné par  $(v_F, \mu_F)$ ) sera appelé par la suite **état adjoint**. Nous verrons ultérieurement quelles sont les propriétés de cet état.

La dérivée vérifie alors la relation :

$$\text{D}j(F) \cdot \Theta = \partial_F \mathcal{L}(F, u_F, \lambda_F, v, \mu) \cdot \Theta \quad (1.42)$$

Un calcul plus poussé (voir Annexe A) permet d'obtenir une expression de la dérivée répartie dans le domaine  $\Omega_{ext}$  au point  $F = I$  :

$$\begin{aligned} \text{D}j(I) \cdot \Theta &= \int_0^T \int_{\Omega_{ext}} \left( u_I \cdot \frac{d^2 v_I}{dt^2} + \text{rot } u_I \cdot \text{rot } v_I - f \cdot v_I \right) \text{div } \Theta \, dx \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega_{ext}} \text{tr} \left( \text{D}u_I \text{D}\Theta (\text{D}v_I^T - \text{D}v_I) + \text{D}v_I \text{D}\Theta (\text{D}u_I^T - \text{D}u_I) \right) \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (1.43)$$

en écrivant  $u_I$  pour  $u_I|_{\Omega_{ext}}$  et  $v_I$  pour  $v_I|_{\Omega_{ext}}$ .

Le travail n'est pas terminé pour autant. En effet, à cette expression répartie dans le domaine, dont le calcul numérique est coûteux, on préférera souvent une expression intégrale définie uniquement sur le bord.

### 1.3.2 Expression intrinsèque de la dérivée

Par construction, les fonctions coût  $j(F)$  que nous avons envisagées ( $j(F) = \tilde{j}(F(\Omega))$ ) ne dépendent que du domaine  $F(\Omega)$ , et non du paramétrage  $F$  de ce domaine, c'est-à-dire :

$$F(\Omega) = G(\Omega) \implies j(F) = j(G) \quad (1.44)$$

En revanche, la solution transportée  $(u_F, \lambda_F)$  n'a aucune raison de satisfaire cette propriété (même si  $F(\Omega) = G(\Omega) \implies (u_F \circ F^{-1}, \lambda_F \circ F^{-1}) = (u_G \circ G^{-1}, \lambda_G \circ G^{-1})$ ). Cela entraîne que les différents termes qui apparaissent dans les expressions des dérivées n'ont pas toujours un caractère intrinsèque (i.e. ne dépendent pas que de la valeur de la déformation  $\Theta$  sur le bord de l'obstacle). Malgré cela, nous verrons qu'il est possible de transformer l'expression initiale (1.43) en une expression ne comportant que des termes intrinsèques. On pourra se reporter à [Gui94] pour plus de précisions.

Pour commencer, nous devons supposer que les perturbations  $\Theta$  sont nulles dans un voisinage du bord  $\Sigma$ . L'expression intrinsèque de la dérivée s'obtient alors en remplaçant formellement dans la relation (1.43)  $D\Theta$  par  $\Theta n^T$ ,  $\Omega_{ext}$  par  $\partial\Omega_{ext}$  (ou plus exactement par  $\Gamma$ , puisque  $\Theta|_{\Sigma}=0$ ) et  $dx$  par  $d\Gamma$ . Le résultat est immédiat :

$$\begin{aligned} Dj(I).\Theta &= \int_0^T \int_{\Gamma} \left( u_I \cdot \frac{d^2 v_I}{dt^2} + \text{rot } u_I \cdot \text{rot } v_I - f \cdot v_I \right) \Theta \cdot n \, d\Gamma \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma} \left( Du_I \Theta \cdot (Dv_I^T - Dv_I) n + Dv_I \Theta \cdot (Du_I^T - Du_I) n \right) d\Gamma \, dt \end{aligned} \quad (1.45)$$

Nous allons maintenant chercher une expression intrinsèque de la dérivée dans laquelle n'interviennent que les courants et les composantes normales des champs. Pour obtenir cette expression, nous faisons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3** *Les perturbations  $\Theta$  utilisées sont telles que :*

$$\Theta = (\Theta \cdot n) n \quad (1.46)$$

Par ailleurs, nous aurons besoin des égalités algébriques (cf. Annexe B) :

$$\text{rot } u_I \cdot \text{rot } v_I = (\text{rot } u_I \wedge n) \cdot (\text{rot } v_I \wedge n) \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \quad (1.47)$$

$$(Du_I - Du_I^T) n = \text{rot } u_I \wedge n = -\lambda_I \wedge n \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \quad (1.48)$$

$$(Dv_I - Dv_I^T) n = \text{rot } v_I \wedge n = -\mu_I \wedge n \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \quad (1.49)$$

En ce qui concerne les propriétés de l'état adjoint, on pourra se reporter au paragraphe suivant.

En appliquant ces différents résultats, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Dj(I).\Theta &= \int_0^T \int_{\Gamma} \left( (u_I \cdot n) \frac{d^2}{dt^2} (v_I \cdot n) + \lambda_I \wedge n \cdot \mu_I \wedge n \right) \Theta \cdot n \, d\Gamma \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma} \left( Du_I n \cdot \mu_I \wedge n + \lambda_I \wedge n \cdot Dv_I n \right) \Theta \cdot n \, d\Gamma \, dt \end{aligned} \quad (1.50)$$

Il ne reste plus qu'à traiter ce dernier terme.

D'après l'égalité (1.48) et les résultats de l'annexe B (lemme 7), nous avons :

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Gamma} (Du_I n \cdot \mu_I \wedge n) \Theta \cdot n \, d\Gamma \, dt = \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma} \left( (Du_I - Du_I^T) n \cdot \mu_I \wedge n \right) \Theta \cdot n \, d\Gamma \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma} (Du_I^T n \cdot \mu_I \wedge n) \Theta \cdot n \, d\Gamma \, dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Gamma} (\lambda_I \wedge n \cdot \mu_I \wedge n) \Theta \cdot n \, d\Gamma \, dt - \int_0^T \int_{\Gamma} u_I \cdot n \left( \Theta \cdot n \operatorname{div}_{\Gamma} (\mu_I \wedge n) + \mu_I \wedge n \cdot \nabla_{\Gamma} (\Theta \cdot n) \right) d\Gamma \, dt \end{aligned} \quad (1.51)$$

On obtient évidemment un résultat similaire pour le terme  $\int_0^T \int_{\Gamma} (\lambda_I \wedge n \cdot Dv_I n) \Theta \cdot n \, d\Gamma \, dt$ , à savoir :

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Gamma} (\lambda_I \wedge n \cdot Dv_I n) \Theta \cdot n \, d\Gamma \, dt = \\ &= - \int_0^T \int_{\Gamma} (\lambda_I \wedge n \cdot \mu_I \wedge n) \Theta \cdot n \, d\Gamma \, dt - \int_0^T \int_{\Gamma} v_I \cdot n \left( \Theta \cdot n \operatorname{div}_{\Gamma} (\lambda_I \wedge n) + \lambda_I \wedge n \cdot \nabla_{\Gamma} (\Theta \cdot n) \right) d\Gamma \, dt \end{aligned} \quad (1.52)$$

Pour finir, on utilise l'équation de conservation de la charge relative à chacun des états  $u_I$  et  $v_I$  (voir Annexe B) :

$$\operatorname{div}_{\Gamma} (\lambda_I \wedge n) = \frac{d^2}{dt^2} (u_I \cdot n) = \frac{d^2 \rho_I}{dt^2} \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \quad (1.53)$$

$$\operatorname{div}_{\Gamma} (\mu_I \wedge n) = \frac{d^2}{dt^2} (v_I \cdot n) = \frac{d^2 \sigma_I}{dt^2} \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \quad (1.54)$$

En se servant des conditions initiales (resp. finales) vérifiées par  $\rho_I$  (resp.  $\sigma_I$ ), on trouve finalement :

$$\begin{aligned} Dj(I).\Theta &= \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{d\rho_I}{dt} \frac{d\sigma_I}{dt} - \lambda_I \wedge n \cdot \mu_I \wedge n \right) \Theta \cdot n \, d\Gamma \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \rho_I \mu_I \wedge n + \sigma_I \lambda_I \wedge n \right) \cdot \nabla_{\Gamma} (\Theta \cdot n) \, d\Gamma \, dt \end{aligned} \quad (1.55)$$

Nous verrons dans le chapitre suivant comment choisir les perturbations  $\Theta$  pour que le critère  $j$  diminue (*i.e.* pour que  $Dj(I).\Theta < 0$ ).

### 1.3.3 Calcul formel de l'état adjoint

On rappelle que l'état adjoint  $(v_F, \mu_F) \in \mathcal{W}_T \times L^2(0, T, \mathcal{M})$  est solution de l'équation :

$$\partial_u \mathcal{L}(F, u_F, \lambda_F, v_F, \mu_F) \cdot u + \partial_{\lambda} \mathcal{L}(F, u_F, \lambda_F, v_F, \mu_F) \cdot \lambda = 0 \quad \forall (u, \lambda) \in \mathcal{W}_0 \times L^2(0, T, \mathcal{M}) \quad (1.56)$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{cases} \partial_u \mathcal{L}(F, u_F, \lambda_F, v_F, \mu_F) \cdot u = 0 & \forall u \in \mathcal{W}_0 \\ \partial_\lambda \mathcal{L}(F, u_F, \lambda_F, v_F, \mu_F) \cdot \lambda = 0 & \forall \lambda \in L^2(0, T, \mathcal{M}) \end{cases} \quad (1.57)$$

En explicitant chacun des termes, on obtient le système :

$$\begin{cases} \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{d^2 u}{dt^2} \cdot v_F + \text{tr} \left( Dv_F DF^{-1} (DF^{-T} Du^T - Du DF^{-1}) \right) \right) JF dx dt = \\ \quad = -\partial_u J(F, u_F) \cdot u + \int_0^T \int_\Gamma \mu_F \cdot u \wedge n J_\Gamma F d\Gamma dt \quad \forall u \in \mathcal{W}_0 \\ \int_0^T \int_\Gamma \lambda \cdot v_F \wedge n J_\Gamma F d\Gamma dt = 0 \quad \forall \lambda \in L^2(0, T, \mathcal{M}) \end{cases} \quad (1.58)$$

si bien que l'état adjoint  $(v_I, \mu_I)$  (en vérité, le seul qui nous intéresse) vérifie :

$$\begin{cases} \int_0^T \int_\Omega \frac{d^2 u}{dt^2} \cdot v_I + \text{rot } u \cdot \text{rot } v_I dx dt = -\partial_u J(I, u_I) \cdot u + \int_0^T \int_\Gamma \mu_I \cdot u \wedge n J_\Gamma F d\Gamma dt \quad \forall u \in \mathcal{W}_0 \\ \int_0^T \int_\Gamma \lambda \cdot v_I \wedge n d\Gamma dt = 0 \quad \forall \lambda \in L^2(0, T, \mathcal{M}) \end{cases} \quad (1.59)$$

Le champ  $v_I$  satisfait donc un problème d'évolution similaire à celui vérifié par  $u_I$ , à la différence près que les conditions aux limites temporelles sont maintenant des conditions finales. D'un point de vue formel, ce problème peut être exprimé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_I}{\partial t^2} + \text{rot rot } v_I = g(u_I) & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ v_I \wedge n|_\Gamma = 0 & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \\ v_I(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial v_I}{\partial t}(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.60)$$

avec

$$g(u_I) = -\partial_u J(I, u_I) \quad (1.61)$$

**Remarque 3** *En pratique, on pourra utiliser le même code de calcul pour la résolution des problèmes direct et adjoint. En effet, il suffit de faire le changement de variable  $t \rightarrow T - t$  dans le système (1.60) pour retomber sur le problème direct (au second membre près), c'est-à-dire, en posant  $\tilde{v}_I(t) = v_I(T - t)$  et  $\tilde{g}(u_I(t)) = g(u_I(T - t))$  :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{v}_I}{\partial t^2} + \text{rot rot } \tilde{v}_I = \tilde{g}(u_I) & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \tilde{v}_I \wedge n|_\Gamma = 0 & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \\ \tilde{v}_I(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \tilde{v}_I}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.62)$$

Nous apporterons dans la suite quelques précisions complémentaires sur le second membre  $g(u_I)$ .

## 1.4 Application pratique

### 1.4.1 Définition du critère d'optimisation

La fonction coût  $J$  que nous avons choisi d'étudier correspond à la surface équivalente radar (SER) de l'obstacle. Cette quantité permet de caractériser la puissance rayonnée par un corps diffractant à l'infini (c'est-à-dire loin du corps) dans une direction déterminée. Plus précisément, le processus de diffraction d'une onde plane génère à l'infini une onde sphérique qui est modulée suivant la direction d'observation. C'est cette modulation qui est caractérisée par la SER.

Le calcul du champ rayonné à l'infini peut être obtenu à partir du champ proche de l'obstacle. Pour cela, on définit une surface de forme arbitraire  $C_a$  entourant le corps diffractant. Le contour  $C_a$  pourra être représenté par exemple par un rectangle de centre  $O$ , identifié à l'origine du repère (voir Fig. 1.2). Le champ électromagnétique tangent à cette surface virtuelle est ensuite calculé de manière précise par une méthode numérique (dans notre cas, la méthode des domaines fictifs). Enfin, une transformation champ proche-champ lointain permet de déduire l'amplitude du champ diffracté à l'infini, et donc de calculer la SER.

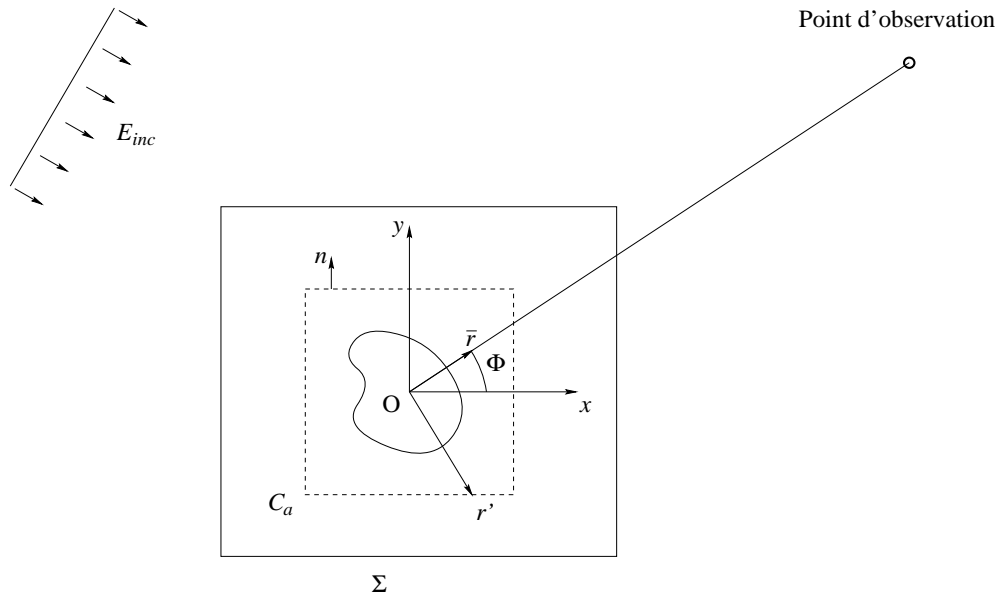


FIG. 1.2 – Contour d'intégration pour le calcul de la SER (2D)

**Remarque 4** Une autre façon d'évaluer la SER consiste à calculer les valeurs du courant sur la surface du conducteur et à utiliser une transformation champ proche-champ lointain pour déduire l'amplitude de diffraction. Dans ce cas particulier, le multiplicateur de Lagrange, qui peut être identifié à la dérivée en temps du courant surfacique (cf. Annexe B, lemme 5) intervient aussi dans la définition de la fonction coût  $J$ , notée pour l'occasion  $J(F, u, \lambda)$ . La seconde équation du problème adjoint (1.59) se voit alors agrémentée du terme  $-\partial_\lambda J(I, u_I, \lambda_I) \cdot \lambda$ . En pratique, cela a pour conséquence malheureuse que le code de calcul employé pour l'état direct ne peut être utilisé tel quel pour la détermination de l'état adjoint.

Revenons à la définition de la SER. Nous nous intéressons désormais au cas de la dimension 2. Lorsque l'onde est polarisée en mode transverse électrique (TE), la SER peut être définie par la relation (cf. [Taf95]) :

$$SER = J(\Phi, E) = |\Lambda(\Phi, E)|^2 \quad (1.63)$$

où  $\Lambda(\Phi, E)$  est un vecteur complexe dépendant des transformées de Fourier des champs électrique  $E$  et magnétique  $H$  diffractés par l'objet :

$$\Lambda(\Phi, E) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2|\widehat{E}_{inc}|\sqrt{k}} \oint_{C_a} \left( \omega z \cdot (n \wedge \widehat{E}(\omega)) + kz \wedge (n \wedge \widehat{H}(\omega)) \cdot \bar{r} \right) e^{ik\bar{r} \cdot r'} dr' \quad (1.64)$$

Par convention, les constantes physiques (notamment la vitesse de la lumière  $c$  et la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0$ ) ont été normalisées à 1. Notons enfin que  $\omega$  est la pulsation du champ électrique,  $k$  le nombre d'onde associé (avec  $k = \frac{\omega}{c}$ ),  $z$  le vecteur perpendiculaire au plan de la figure et  $\bar{r}$  le vecteur normalisé  $(\cos(\Phi), \sin(\Phi))$ .

Pour obtenir une expression de la SER ne dépendant que du champ électrique  $E$  - et, *a fortiori*, de  $u$  - on utilise une relation issue des équations de Maxwell instationnaires (à partir desquelles l'équation de Helmholtz est construite) :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\text{rot } E \quad (1.65)$$

Ainsi, en explicitant les transformées de Fourier de chacun des deux membres, il vient :

$$i\omega \widehat{H} = -\text{rot } \widehat{E} \quad (1.66)$$

Il suffit ensuite de remplacer le terme en  $\omega \widehat{H}$  dans la relation (1.64) pour obtenir le resultat escompté :

$$\Lambda(\Phi, E) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2|\widehat{E}_{inc}|\sqrt{k}} \int_0^T \oint_{C_a} \left( \omega z \cdot (n \wedge E(t)) + iz \wedge (n \wedge \text{rot } E(t)) \cdot \bar{r} \right) e^{ik\bar{r} \cdot r'} e^{-i\omega t} dr' dt. \quad (1.67)$$

Nous avons montré précédemment que le calcul de l'état adjoint était intimement lié à celui du terme source  $\partial_u J(I, u_T) \cdot u$ . Etant donnée la forme de la fonction coût, cette quantité est très facile à évaluer :

$$\partial_u J(I, u_T) \cdot u = 2\bar{\Lambda}(\Phi, u_T) \cdot \Lambda(\Phi, u) \quad (1.68)$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer l'état adjoint, et par conséquent, de déterminer sans ambiguïté la dérivée de la fonction coût (1.55).

Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser plus particulièrement au problème discret.

# Chapitre 2

## Le problème discret

### 2.1 Approximation de l'état direct

Rappelons que les problèmes direct (1.37) et adjoint (1.59) ne diffèrent que par leur second membre (à un changement de variable près, cf. Remarque 3). Pour cette raison, nous ne nous intéresserons qu'à l'approximation du système générique (1.13)-(1.14). Précisons enfin que les résultats ultérieurs seront essentiellement tirés de [CJM96].

#### 2.1.1 Semi-discrétisation en espace

Dans cette partie, nous désignerons par  $\mathcal{V}_h$  (resp.  $\mathcal{M}_h$ ) un sous-espace de dimension finie de  $\mathcal{V}$  (resp.  $\mathcal{M}$ ). La formulation du problème discret est la suivante :

Trouver  $(u_h, \lambda_h) \in L^2(0, T, \mathcal{V}_h) \times L^2(0, T, \mathcal{M}_h)$  solution de

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(u_h(t), v_h)_\Omega + a(\Omega, u_h(t), v_h) = (\tilde{f}(t), v_h)_\Omega + b(\Gamma, v_h, \lambda_h(t)) & \forall v_h \in \mathcal{V}_h \\ b(\Gamma, u_h(t), \mu_h) = 0 & \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h \\ u_h(0) = \frac{du_h}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Afin d'utiliser au mieux les avantages de la méthode des domaines fictifs, nous allons tout d'abord discrétiser le domaine de calcul  $\Omega$  par une grille régulière (voir Fig. 2.1). Il reste ensuite à choisir l'espace  $\mathcal{V}_h$  de manière adéquate.

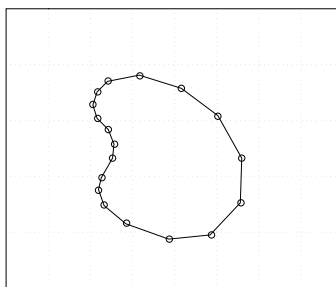


FIG. 2.1 – Maillages du domaine et de la frontière de l'obstacle (2D)

Notre choix s'est porté sur l'espace des éléments finis de Nédélec de degré 1 associés au maillage surfacique. Remarquons dans ce cas que les degrés de liberté de ces éléments sont les valeurs des composantes tangentielles prises au milieu des côtés. Une base canonique  $\{N_j, 1 \leq j \leq p\}$  de  $\mathcal{V}_h$  peut alors être obtenue en associant à chaque côté la fonction (linéaire par morceaux) dont la composante tangentielle est égale à 1 sur ce côté et à 0 sur les autres (voir Fig. 2.2).

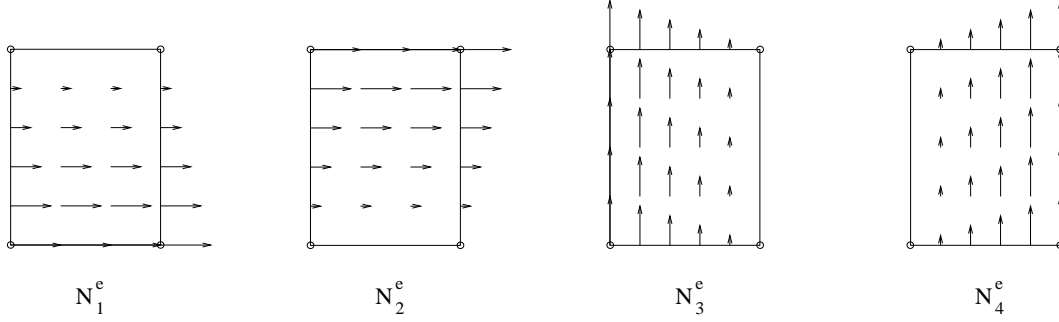


FIG. 2.2 – Fonctions de base de Nédélec associées à un élément (2D)

Ainsi, toute fonction de  $\mathcal{V}_h$  se décomposera de manière unique sous la forme :

$$v_h = \sum_{j=1}^p v_j N_j \quad (2.2)$$

avec  $p$  désignant la dimension de l'espace  $\mathcal{V}_h$ . On pourra se reporter par exemple à [Jin93] pour une présentation plus précise de ces éléments.

Nous allons procéder de la même façon pour l'espace  $\mathcal{M}_h$ . Dans le cas bidimensionnel, la frontière  $\Gamma$  de l'obstacle sera approchée par des segments  $\{\Gamma_{k-\frac{1}{2}} = [x_{k-1}, x_k], 1 \leq k \leq q\}$ , avec par convention  $x_0 = x_q$  (voir Fig. 2.1). L'espace  $\mathcal{M}_h$  pourra alors être constitué d'éléments de Lagrange de type  $P_0$ . Si l'on note  $\{l_k, 1 \leq k \leq q\}$ , la base canonique associée à  $\mathcal{M}_h$ , les fonctions de cet espace s'écriront :

$$\mu_h = \sum_{k=1}^q \mu_k l_k, \quad (2.3)$$

$q$  désignant cette fois la dimension de l'espace  $\mathcal{M}_h$  (avec en pratique  $q \ll p$ ).

A partir des représentations (2.2) et (2.3), nous pouvons écrire plus clairement le problème discret (2.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^p \frac{d^2 u_j}{dt^2}(t) \int_{\Omega} N_j \cdot N_i \, dx + \sum_{j=1}^p u_j(t) \int_{\Omega} \text{rot } N_j \cdot \text{rot } N_i \, dx = \\ \qquad \qquad \qquad = \int_{\Omega} \tilde{f}(t) \cdot N_i \, dx + \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \int_{\Gamma} l_k \cdot N_i \wedge n \, d\Gamma \quad 1 \leq i \leq p \\ \sum_{j=1}^p u_j(t) \int_{\Gamma} l_k \cdot N_j \wedge n \, d\Gamma = 0 \quad 1 \leq k \leq q \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Définissons maintenant les matrices

$$M_h = \left( \int_{\Omega} N_j \cdot N_i \, dx \right)_{1 \leq i, j \leq p} \quad (\text{Matrice de masse}) \quad (2.5)$$

$$A_h = \left( \int_{\Omega} \text{rot } N_j \cdot \text{rot } N_i \, dx \right)_{1 \leq i, j \leq p} \quad (\text{Matrice de rigidité}) \quad (2.6)$$

$$B_h = \left( \int_{\Gamma} l_k \cdot N_j \wedge n \, d\Gamma \right)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq q}} \quad (\text{Matrice de frontière}) \quad (2.7)$$

et le vecteur

$$F(t) = \left( \int_{\Omega} \tilde{f}(t) \cdot N_i \, dx \right)_{1 \leq i \leq p} \quad (2.8)$$

Si  $U_h$  (resp.  $\Lambda_h$ ) représente le vecteur colonne correspondant à la décomposition de  $u_h$  (resp.  $\lambda_h$ ) sur la base  $\{N_j\}$  (resp.  $\{l_k\}$ ), la formulation matricielle du système (2.4) devient :

$$\begin{cases} M_h \frac{d^2 U_h}{dt^2}(t) + A_h U_h(t) = F(t) + B_h \Lambda_h(t) \\ B_h^T U_h(t) = 0 \\ U_h(0) = \frac{dU_h}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

**Remarque 5** *Un procédé appelé condensation de masse permet de rendre la matrice  $M_h$  diagonale. Le principe consiste simplement à calculer les éléments de  $M_h$  par une formule de quadrature appropriée (i.e. de manière à ce que les termes extra-diagonaux disparaissent). Nous verrons plus loin que cette technique de condensation de masse permet d'obtenir un schéma explicite en temps.*

### 2.1.2 Discrétisation temporelle

Pour la discrétisation temporelle, l'intervalle de temps  $[0, T]$  est divisé en  $N$  pas de longueur respective  $\Delta t = \frac{T}{N}$ . Ajoutons une précision importante : le pas de temps  $\Delta t$  doit être choisi en accord avec le pas d'espace du maillage défini sur le domaine de calcul, c'est-à-dire de façon à satisfaire les conditions de stabilité (voir paragraphe 2.1.3). En ce qui concerne l'approximation de la dérivée en temps, nous utiliserons un schéma aux différences finies d'ordre 2 explicite. Le problème (2.9) se met alors sous la forme :

$$\begin{cases} U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1} = -\Delta t^2 M_h^{-1} A_h U_h^n + \Delta t^2 M_h^{-1} F^n + \Delta t^2 M_h^{-1} B_h \Lambda_h^n, & 1 \leq n \leq N-1 \\ B_h^T U_h^n = 0, & 0 \leq n \leq N \\ U_h^0 = U_h^1 = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Pour calculer la solution de manière explicite, nous devons remplacer la condition  $B_h^T U_h^n = 0$  par une expression équivalente, et surtout plus facile à implémenter. En pratique, cela est obtenu en multipliant la première équation par  $B_h^T$ . Nous obtenons alors pour tout  $n$ ,  $1 \leq n \leq N-1$  :

$$\begin{cases} U_h^{n+1} = 2U_h^n - U_h^{n-1} - \Delta t^2 M_h^{-1} A_h U_h^n + \Delta t^2 M_h^{-1} F^n + \Delta t^2 M_h^{-1} B_h \Lambda_h^n \\ B_h^T (U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}) = -\Delta t^2 B_h^T M_h^{-1} A_h U_h^n + \Delta t^2 B_h^T M_h^{-1} F^n + \Delta t^2 B_h^T M_h^{-1} B_h \Lambda_h^n \\ U_h^0 = U_h^1 = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Puisque l'équation (2.10.2) est vérifiée à chaque pas de temps, le premier membre de l'égalité (2.11.2) disparaît. Finalement, nous trouvons le système :

$$\begin{cases} U_h^{n+1} = 2U_h^n - U_h^{n-1} - \Delta t^2 M_h^{-1} A_h U_h^n + \Delta t^2 M_h^{-1} F^n + \Delta t^2 M_h^{-1} B_h \Lambda_h^n, & 1 \leq n \leq N-1 \\ B_h^T M_h^{-1} B_h \Lambda_h^n = B_h^T M_h^{-1} A_h U_h^n - B_h^T M_h^{-1} F^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ U_h^0 = U_h^1 = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Réciproquement, en multipliant la première équation du système (2.12) par  $B_h^T$  et en utilisant la relation (2.12.2), nous obtenons :

$$\begin{cases} U_h^{n+1} = 2U_h^n - U_h^{n-1} - \Delta t^2 M_h^{-1} A_h U_h^n + \Delta t^2 M_h^{-1} F^n + \Delta t^2 M_h^{-1} B_h \Lambda_h^n, & 1 \leq n \leq N-1 \\ B_h^T (U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}) = 0, & 1 \leq n \leq N-1 \\ U_h^0 = U_h^1 = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Enfin, en se servant des conditions initiales (2.13.3), on voit aisément que la condition  $B_h^T U_h^n = 0$  est satisfaite pour chaque pas de temps.

En conclusion, les systèmes (2.10) et (2.12) sont équivalents. Au point de vue numérique, cela entraîne que le problème sous-déterminé  $B_h^T U_h^n = 0$  peut être remplacé par un problème bien posé, à savoir :

$$Q_h \Lambda_h^n = B_h^T M_h^{-1} A_h U_h^n - B_h^T M_h^{-1} F^n, \quad (2.14)$$

où  $Q_h$  désigne la matrice  $B_h^T M_h^{-1} B_h$ . Pour que ce problème ait une solution, on devra néanmoins s'assurer que la matrice  $Q_h$  est inversible (voir paragraphe suivant).

Ainsi, le calcul des itérés successifs  $(U_h^n, \Lambda_h^n)$  se fera sans aucune difficulté. En effet si l'on suppose connu le couple  $(U_h^{n-1}, U_h^n)$ , l'itéré suivant  $(U_h^n, U_h^{n+1})$  pourra être déterminé par une procédure très simple :

- Tout d'abord, résoudre l'équation  $B_h^T M_h^{-1} B_h \Lambda_h^n = B_h^T M_h^{-1} A_h U_h^n - B_h^T M_h^{-1} F^n$  pour obtenir la composante  $\Lambda_h^n$  du multiplicateur de Lagrange discret.
- Ensuite, déterminer le terme  $U_h^{n+1}$  par le biais de la relation (2.12.1)

La dernière étape avant l'optimisation proprement dite est l'approximation numérique de la charge. Avant d'en détailler le calcul, nous allons faire quelques remarques importantes.

### 2.1.3 Propriétés du schéma - Remarques

#### Propriétés de la matrice $Q_h$

Pour calculer numériquement le multiplicateur de Lagrange, nous devons "inverser" la matrice  $Q_h = B_h^T M_h^{-1} B_h$ . On voit immédiatement que cette matrice est symétrique et positive. Une autre propriété intéressante au niveau numérique est que la taille de  $Q_h$  ( $q \times q$ ) est très petite devant celle de  $A_h$ , puisque en pratique nous avons  $q \ll p$ .

La seule question préoccupante concerne l'existence de la matrice  $Q_h^{-1}$  et *a fortiori*, l'existence du multiplicateur de Lagrange  $\Lambda_h$ . En fait, l'inversibilité de  $Q_h$  est assurée dès que le noyau de la matrice  $B_h$  est réduit à 0. Plus précisément, l'existence du multiplicateur de Lagrange va être subordonnée à une condition inf-sup discrète de la forme :

$$\exists \beta > 0, \quad \sup_{v_h \in \mathcal{V}_h} \frac{|b(v_h, \mu_h)|}{\|v_h\|_{\mathcal{V}_h}} \geq \beta \|\mu_h\|_{\mathcal{M}_h} \quad \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h \quad (2.15)$$

Comme pour le problème continu, cette relation (que nous supposons vérifiée) impose une condition de compatibilité entre les espaces  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{M}_h$  (*i.e.* entre les maillages surfacique et linéique).

### Stabilité du schéma numérique

On peut montrer (cf. [CJM96]) que le schéma (2.10) est stable sous la condition CFL :

$$\frac{\Delta t}{h} < \alpha_{CFL} \quad (2.16)$$

où  $\alpha_{CFL}$  est le seuil de stabilité défini par :

$$\alpha_{CFL}^2 = \sup_{v_h \in \mathcal{V}_h} \frac{h^2 v_h^T A_h v_h}{4 v_h^T M_h v_h} \quad (2.17)$$

## 2.2 Approximation de la charge

Par construction, les éléments finis de Nédélec sont très bien adaptés à l'approximation de fonctions de  $H(\text{rot})$  (dans notre cas, les champs  $u_I(t)$  et  $v_I(t)$ ). Les composantes tangentielles de ces champs de vecteurs sont alors déterminées facilement par le biais du schéma (2.12). En revanche, cette approximation ne donne aucune information directe sur les composantes normales.

Pour surmonter cette difficulté, nous aurons recours à l'équation de conservation de la charge. Rappelons que la charge  $\rho_I = u_I \cdot n$  est solution du problème d'évolution suivant (voir Annexe B) :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \rho_I}{dt^2}(t) = \text{div}_\Gamma (\lambda_I(t) \wedge n) & \text{sur } \Gamma \\ \rho_I(0) = \frac{d\rho_I}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

ou encore, sous forme variationnelle :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \int_\Gamma \rho_I(t) \psi \, d\Gamma + \int_\Gamma (\lambda_I(t) \wedge n) \cdot \nabla_\Gamma \psi \, d\Gamma = 0 & \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma) \\ \rho_I(0) = \frac{d\rho_I}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

### 2.2.1 Semi-discrétisation en espace

En ce qui concerne le problème discret, nous allons opérer de la même manière que pour l'approximation de l'état direct. Nous définissons tout d'abord l'espace d'éléments finis :

$$\mathcal{R}_h = \{\psi \in C^0(\Gamma) / \psi|_{\Gamma_{m-\frac{1}{2}}} \in P_1, 1 \leq m \leq q\}. \quad (2.20)$$

La formulation du problème discret est alors la suivante :

Trouver  $\rho_h \in L^2(0, T, \mathcal{R}_h)$  solution de

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Gamma} \rho_h(t) \psi_h d\Gamma + \int_{\Gamma} (\lambda_h(t) \wedge n) \cdot \nabla_{\Gamma} \psi_h d\Gamma = 0 & \forall \psi_h \in \mathcal{R}_h \\ \rho_h(0) = \frac{d\rho_h}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

En notant  $\{r_m, 1 \leq m \leq q\}$ , la base canonique associée à l'espace  $\mathcal{R}_h$ , nous obtenons une expression équivalente au problème discret (2.21) :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^q \frac{d^2 \rho_k}{dt^2}(t) \int_{\Gamma} r_k r_m d\Gamma + \sum_{k=1}^q \lambda_k(t) \int_{\Gamma} (l_k \wedge n) \cdot \nabla_{\Gamma} r_m d\Gamma = 0 & 1 \leq m \leq q \\ \rho_h(0) = \frac{d\rho_h}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Finalement, si  $\varrho_h$  représente le vecteur colonne correspondant à la décomposition de  $\rho_h$  sur la base  $\{r_m\}$ , ce dernier système peut être écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{cases} R_h \frac{d^2 \varrho_h}{dt^2}(t) + K_h \Lambda_h(t) = 0 \\ \varrho_h(0) = \frac{d\varrho_h}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

avec, comme définitions :

$$R_h = \left( \int_{\Gamma} r_k r_m d\Gamma \right)_{1 \leq m, k \leq q} \quad (2.24)$$

$$K_h = \left( \int_{\Gamma} (l_k \wedge n) \cdot \nabla_{\Gamma} r_m d\Gamma \right)_{1 \leq m, k \leq q}. \quad (2.25)$$

Notons que la condensation de masse permet une fois de plus de transformer la matrice de masse  $R_h$  en une matrice diagonale. Plus précisément, en utilisant une formule de quadrature d'ordre 1, nous obtenons comme valeur pour les coefficients diagonaux :

$$R_{k,k} = \frac{1}{2} (L_{k+\frac{1}{2}} + L_{k-\frac{1}{2}}), \quad 1 \leq k \leq q \quad (2.26)$$

$L_{k+\frac{1}{2}}$  (resp.  $L_{k-\frac{1}{2}}$ ) désignant la longueur du segment  $\Gamma_{k+\frac{1}{2}}$  (resp.  $\Gamma_{k-\frac{1}{2}}$ ).

## 2.2.2 Discrétisation temporelle

L'approche reste la même qu'au paragraphe 2.1.2. La discrétisation en temps est alors effectuée grâce à un schéma aux différences finies centrées d'ordre 2 du type :

$$\begin{cases} \varrho_h^{n+1} - 2\varrho_h^n + \varrho_h^{n-1} = -\Delta t^2 R_h^{-1} K_h \Lambda_h^n, & 1 \leq n \leq N-1 \\ \varrho_h^0 = \varrho_h^1 = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Si l'on désigne par  $\rho_k^n$  (resp.  $\lambda_{k+\frac{1}{2}}^n$ ), la  $k^{\text{ème}}$  composante du vecteur charge discret  $\varrho_h^n$  (resp. du vecteur courant discret  $\Lambda_h^n$ ) au temps  $n\Delta t$ , le schéma correspondant prend la forme :

$$\begin{cases} \rho_k^{n+1} = 2\rho_k^n - \rho_k^{n-1} - \frac{\Delta t^2}{R_{k,k}} (\lambda_{k-\frac{1}{2}}^n - \lambda_{k+\frac{1}{2}}^n), & 1 \leq n \leq N-1 \\ \rho_k^0 = \rho_k^1 = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

pour  $1 \leq k \leq q$  (avec par convention  $\lambda_{\frac{1}{2}}^n = \lambda_{q+\frac{1}{2}}^n$  pour tout  $n$ ).

Grâce aux schémas numériques (2.12) et (2.27), nous pouvons maintenant évaluer à chaque instant les courants et les charges associés aux problèmes direct (1.37) et adjoint (1.59). Par conséquent, dès que nous aurons précisé la forme des perturbations, le calcul de la dérivée discrète ne posera plus aucun problème.

## 2.3 Approximation de la dérivée et processus d'optimisation

### 2.3.1 Choix des perturbations

Nous avons supposé auparavant que la frontière  $\Gamma$  de l'obstacle était approchée par  $q$  segments  $\Gamma_{k-\frac{1}{2}} = [x_{k-1}, x_k]$ , de longueur respective  $L_{k-\frac{1}{2}}$  pour  $1 \leq k \leq q$ . Ainsi, la géométrie discrète  $\Gamma_h$  est complètement définie dès que les sommets  $(x_k)_{1 \leq k \leq q}$  sont déterminés. Pour faire évoluer la forme de la frontière  $\Gamma_h$ , nous avons choisi de faire bouger uniquement ces sommets. Il semble alors naturel de prendre comme modèle de perturbation :

$$\Theta = \sum_{k=1}^q \alpha_k \Theta_k, \quad (2.29)$$

les fonctions  $\Theta_k$  modifiant le sommet  $x_k$  et lui seul. Par exemple, ces perturbations  $\Theta_k$  pourront être choisies de la forme (cf. fig. 2.3 et 2.4) :

$$\Theta_k = \varphi_k n_k \quad (2.30)$$

avec  $\varphi_k$  désignant la fonction plateau :

$$\varphi_k = \begin{cases} 1 & \text{sur } B(x_k, \varepsilon_k) \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus B(x_k, 2\varepsilon_k) \\ \text{raccord } C^\infty & \text{sur } B(x_k, 2\varepsilon_k) \setminus B(x_k, \varepsilon_k) \end{cases} \quad \varepsilon_k < \frac{1}{2} \inf(L_{k-\frac{1}{2}}, L_{k+\frac{1}{2}}) \quad (2.31)$$

et  $n_k$ , la "normale" extérieure à l'obstacle au point  $x_k$ . Plus précisément, si  $n_{k-\frac{1}{2}}$  (resp.  $n_{k+\frac{1}{2}}$ ) est la normale au segment  $\Gamma_{k-\frac{1}{2}}$  (resp.  $\Gamma_{k+\frac{1}{2}}$ ) dirigée vers l'extérieur de l'obstacle, alors  $n_k$  sera définie par :

$$n_k = \frac{n_{k-\frac{1}{2}} + n_{k+\frac{1}{2}}}{\|n_{k-\frac{1}{2}} + n_{k+\frac{1}{2}}\|} \quad (2.32)$$

Les figures suivantes précisent toutes ces notations.

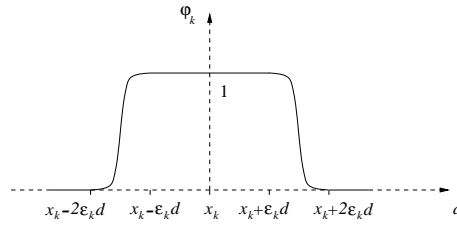


FIG. 2.3 – Graphe de la fonction  $\varphi_k$

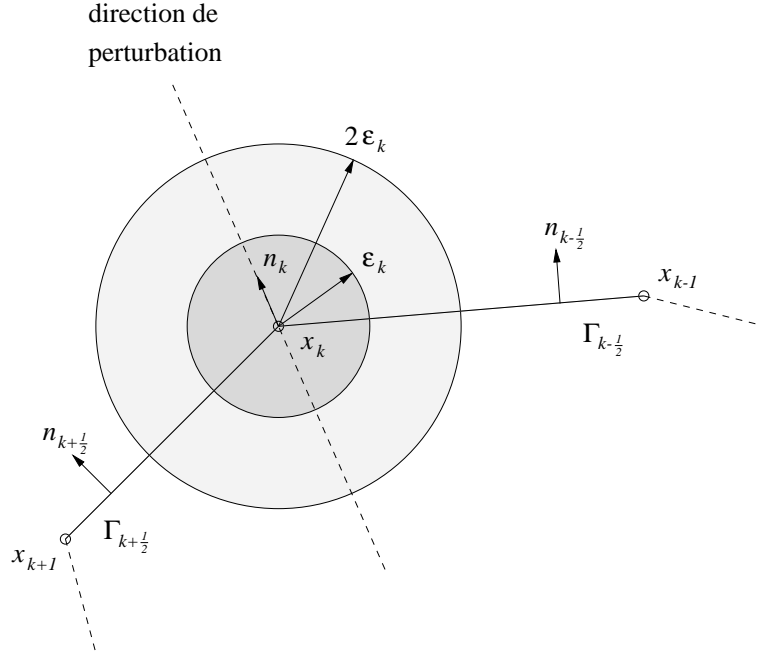


FIG. 2.4 – Support de la perturbation associée au sommet  $x_k$

**Remarque 6** Le choix des perturbations  $\Theta_k$  n'est pas unique. En fait, pour que l'intégration numérique de la dérivée (1.55) soit possible, il suffit que chaque  $\Theta_k$  soit parfaitement définie au voisinage des points  $x_k$ .

Avec les perturbations définies par (2.30), les sommets  $x_k$  seront transformés en

$$F(x_k) = (I + \Theta)(x_k) = x_k + \alpha_k n_k. \quad (2.33)$$

Toute la difficulté va maintenant résider dans le choix des paramètres  $\alpha_k$ , l'objectif étant toujours de faire diminuer la fonction coût  $j$ . Pour déterminer ces paramètres, nous allons nous ramener à un problème d'optimisation en dimension finie, en posant :

$$\mathcal{J}(\alpha_1, \dots, \alpha_q) \stackrel{\text{déf}}{=} j\left(I + \sum_{k=1}^q \alpha_k \Theta_k\right) \quad (2.34)$$

Le gradient de  $\mathcal{J}$  est alors obtenu directement à partir des expressions des dérivées partielles :

$$\frac{\partial \mathcal{J}(0, \dots, 0)}{\partial \alpha_k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(0, \dots, \varepsilon, \dots, 0) - \mathcal{J}(0, \dots, 0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{j(I + \varepsilon \Theta_k) - j(I)}{\varepsilon} = Dj(I) \cdot \Theta_k \quad (2.35)$$

Il ne reste plus qu'à évaluer cette dernière quantité. Rappelons tout d'abord l'expression de la dérivée associée au problème continu (cf. (1.55)) :

$$\begin{aligned} Dj(I) \cdot \Theta_k &= \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \frac{d\rho_I}{dt} \frac{d\sigma_I}{dt} - \lambda_I \wedge n \cdot \mu_I \wedge n \right) \Theta_k \cdot n \, d\Gamma \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma} \left( \rho_I \mu_I \wedge n + \sigma_I \lambda_I \wedge n \right) \cdot \nabla_{\Gamma} (\Theta_k \cdot n) \, d\Gamma \, dt \end{aligned} \quad (2.36)$$

Au niveau discret, les intégrales seront approchées par des formules de quadrature (rectangles en temps et trapèzes en espace), les points d'intégration étant les sommets  $x_k$ . Cette remarque permet de faire quelques simplifications appréciables :

- Etant donnée la définition de  $\Theta_k$ , le gradient tangentiel  $\nabla_\Gamma (\Theta_k \cdot n)$  est nul en chaque sommet, si bien que la seconde intégrale disparaît de l'équation (2.36).
- Grâce à cette même définition, l'intégration en espace est réduite uniquement à l'évaluation des différentes quantités discrètes au point  $x_k$  (*i.e.*  $\lambda_h$ ,  $\rho_h$ , etc,...). La normale  $n(x_k)$  intervenant dans (2.36) est alors approchée par  $-n_k$ .

Finalement, on trouve comme approximation pour la dérivée :

$$Dj(I) \cdot \Theta_k \simeq \frac{1}{2}(L_{k-\frac{1}{2}} + L_{k+\frac{1}{2}}) \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \left( -\frac{1}{\Delta t^2}(\rho_k^{n+1} - \rho_k^n)(\sigma_k^{n+1} - \sigma_k^n) + \lambda_k^n \mu_k^n \right), \quad (2.37)$$

avec par définition :

$$\lambda_k^n = \frac{1}{2}(\lambda_{k+\frac{1}{2}}^n + \lambda_{k-\frac{1}{2}}^n) \quad (2.38)$$

et

$$\mu_k^n = \frac{1}{2}(\mu_{k+\frac{1}{2}}^n + \mu_{k-\frac{1}{2}}^n) \quad (2.39)$$

Le calcul des paramètres  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  peut maintenant être confié à un algorithme d'optimisation adéquat.

### 2.3.2 Algorithme d'optimisation

Le processus d'optimisation constitue la dernière étape de cette étude. L'objectif est de construire, à partir d'une géométrie initiale donnée  $\Gamma_h^{(0)} = \{x_1^{(0)}, \dots, x_q^{(0)}\}$ , une suite  $(\Gamma_h^{(i)})_{i \geq 0}$  telle que :

$$\begin{cases} \Gamma_h^{(i+1)} = \left( I + \sum_{k=1}^q \alpha_k^{(i+1)} \Theta_k^{(i)} \right) (\Gamma_h^{(i)}) \\ j(\Gamma_h^{(i+1)}) < j(\Gamma_h^{(i)}) \end{cases} \quad (2.40)$$

Comme précédemment, nous serons amenés à définir de nouvelles fonctionnelles :

$$\mathcal{J}^{(i)}(\alpha_1, \dots, \alpha_q) \stackrel{\text{déf}}{=} j \left( I + \sum_{k=1}^q \alpha_k \Theta_k^{(i)} \right), \quad (2.41)$$

les notations  $\Theta_k^{(i)}$  désignant les perturbations associées aux sommets  $x_k^{(i)}$ . Avec une telle définition, nous aurons alors les égalités :

$$\mathcal{J}^{(i)}(0, \dots, 0) = j(I) = j(\Gamma_h^{(i)}) \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}^{(i)}}{\partial \alpha_k}(0, \dots, 0) = Dj(\Gamma_h^{(i)}) \cdot \Theta_k^{(i)} \quad (2.43)$$

$$\mathcal{J}^{(i)}(\alpha_1^{(i+1)}, \dots, \alpha_q^{(i+1)}) = j(\Gamma^{(i+1)}) = \mathcal{J}^{(i+1)}(0, \dots, 0) \quad (2.44)$$

Ainsi, à chaque itération  $i$ , nous serons en mesure de déterminer les valeurs de  $\mathcal{J}^{(i)}$  mais aussi de son gradient au point  $(0, \dots, 0)$  (ce qui est somme toute assez limité). L'algorithme d'optimisation devra donc, à partir de ces seules données, trouver un vecteur  $\alpha^{(i+1)} = (\alpha_1^{(i+1)}, \dots, \alpha_q^{(i+1)})$  vérifiant la condition (2.40).

En règle générale, les méthodes d'optimisation non linéaire procèdent par minimisation unidimensionnelle dans une direction (dite *de descente*). On citera par exemple les méthodes de Fletcher-Reeves et Polak-Ribière, les méthodes de plus forte pente, ou plus récemment, les méthodes quasi-newtoniennes (cf. [Min83]). Dans certains cas (plus forte pente, BFGS), la convergence des algorithmes peut être obtenue sans qu'il soit nécessaire de déterminer un point proche de l'optimum (ou d'un optimum local) dans la direction considérée. Différentes règles de sélection permettent alors d'obtenir un point ayant les caractéristiques voulues avec un nombre très limité d'évaluations de la fonction. Malheureusement, ces différentes évaluations génèrent un surcoût de calcul très important (pour le problème qui nous intéresse). Par conséquent, de telles méthodes seront en pratique inutilisables.

Pour surmonter toutes ces difficultés, nous utiliserons une méthode plus basique, connue sous le nom de *gradient à pas prédéterminé*. Le schéma itératif général pour une fonction  $f$  quelconque est défini par la relation :

$$z^{(i+1)} = z^{(i)} - p_i \frac{\nabla f(z^{(i)})}{\|\nabla f(z^{(i)})\|}, \quad (2.45)$$

les valeurs des pas de déplacement  $p_i$  étant choisies strictement positives et *a priori*. Parmi les différentes stratégies de choix utilisées, citons :

– la *méthode de la série divergente* :

$$\begin{cases} p_i \rightarrow 0 & (i \rightarrow \infty) \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i = +\infty \end{cases} \quad (2.46)$$

Cette règle permet d'assurer la convergence du schéma (2.45) vers un minimum (local ou global) mais la convergence peut être très lente. On pourra choisir par exemple  $p_i = \frac{p_0}{i+1}$ .

– la *méthode de la série convergente* :

$$p_i = p_0 (a)^i, \quad \text{avec } 0 \leq a \leq 1. \quad (2.47)$$

celle-ci permet en général d'obtenir une convergence plus rapide.

Nous allons maintenant essayer d'adapter le schéma (2.45) à notre problème. Etant donné un ensemble initial de points  $\{x_1^{(0)}, \dots, x_q^{(0)}\}$  et son système de normales associées  $\{n_1^{(0)}, \dots, n_q^{(0)}\}$ , nous souhaitons construire la suite d'itérés définie par :

$$x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} + \alpha_k^{(i+1)} n_k^{(i)}. \quad (2.48)$$

Dans le cas où  $i = 1$ , nous obtenons alors :

$$x_k^{(2)} = x_k^{(0)} + \alpha_k^{(1)} n_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)} n_k^{(1)} = x_k^{(0)} + \tilde{\alpha}_k^{(2)} \tilde{n}_k^{(1)} \quad (2.49)$$

avec  $\tilde{\alpha}_k^{(2)}$  et  $\tilde{n}_k^{(1)}$  donnés par :

$$\tilde{\alpha}_k^{(2)} = \|\alpha_k^{(1)} n_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)} n_k^{(1)}\|, \quad 1 \leq k \leq q \quad (2.50)$$

et

$$\tilde{n}_k^{(1)} = \frac{\alpha_k^{(1)} n_k^{(0)} + \alpha_k^{(2)} n_k^{(1)}}{\tilde{\alpha}_k^{(2)}}, \quad 1 \leq k \leq q \quad (2.51)$$

Grâce à cette modification, les points  $x_k^{(2)}$  sont maintenant définis par rapport à la configuration initiale, et l'on peut appliquer directement le schéma (2.45) à la fonction  $\mathcal{J}^{(0)}$  :

$$\tilde{\alpha}^{(2)} = \tilde{\alpha}^{(1)} - p_1 \frac{\nabla \mathcal{J}^{(0)}(\tilde{\alpha}^{(1)})}{\|\nabla \mathcal{J}^{(0)}(\tilde{\alpha}^{(1)})\|} \quad (2.52)$$

Enfin, pour de faibles variations des normales, on pourra faire les approximations suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}^{(2)} \simeq \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} \\ \nabla \mathcal{J}^{(0)}(\tilde{\alpha}^{(1)}) = \nabla \mathcal{J}^{(0)}(\alpha^{(1)}) \simeq \nabla \mathcal{J}^{(1)}(0) \end{cases} \quad (2.53)$$

puisque par construction (cf. (2.43) et (2.44)), on a :

$$\frac{\partial \mathcal{J}^{(0)}(\tilde{\alpha}^{(1)})}{\partial \alpha_k} = \text{D}j(\Gamma_h^{(1)}) \cdot \Theta_k^{(0)} \simeq \frac{\partial \mathcal{J}^{(1)}(0)}{\partial \alpha_k} \quad (2.54)$$

Ainsi, le calcul du vecteur  $\alpha^{(2)}$  pourra se faire de la façon suivante :

$$\alpha^{(2)} = -p_1 \frac{\nabla \mathcal{J}^{(1)}(0)}{\|\nabla \mathcal{J}^{(1)}(0)\|} \quad (2.55)$$

et plus généralement, nous retiendrons le schéma itératif :

$$\alpha^{(i+1)} = -p_i \frac{\nabla \mathcal{J}^{(i)}(0)}{\|\nabla \mathcal{J}^{(i)}(0)\|} \quad (2.56)$$

# Chapitre 3

## Résultats numériques

Dans les chapitres précédents, nous avons décrit précisément les différentes étapes de résolution d'un problème d'optimisation de forme particulier, du calcul formel de la dérivée par rapport à la géométrie jusqu'à l'analyse de l'algorithme d'optimisation. Nous allons maintenant nous intéresser plus particulièrement aux résultats obtenus avec un exemple "concret".

L'objectif de cette partie est de trouver le domaine qui minimise la SER rétrodiffusée pour une fréquence fixée, à partir d'une géométrie initiale donnée. Le critère d'optimisation est donc celui défini par la formule (1.67) en imposant l'angle  $\Phi$  à zéro. Rappelons aussi que la méthode des domaines fictifs fait intervenir deux maillages distincts :

- un maillage surfacique de pas  $h_s$  pour le champ électrique,
- un maillage linéique de pas  $h_l$  pour le multiplicateur de Lagrange.

Dans tout ce qui suit, nous supposons le rapport  $\frac{h_l}{h_s}$  constant et égal à 1.5 (ce qui assure numériquement l'inversibilité de la matrice  $Q_h$  (cf. § 2.1.3)).

L'analyse des résultats sera organisée de la façon suivante :

Dans le premier paragraphe, nous apporterons quelques éléments de réponse concernant la validité du calcul numérique de la dérivée. Dans cette optique, nous étudierons :

- d'une part, le rôle du contour d'intégration  $C_a$  pour le calcul de l'état adjoint,
- et d'autre part, l'influence des deux maillages (définis par  $h_s$  et  $h_l$ ) sur l'évaluation de la dérivée.

Dans le second paragraphe, la convergence de l'algorithme d'optimisation sera analysée. Enfin, pour valider le résultat obtenu, nous évaluerons la SER du domaine final par équations intégrales.

### 3.1 Approximation de la dérivée

#### 3.1.1 Choix du contour $C_a$

L'approximation numérique de la dérivée est donnée par la formule (cf. 2.37) :

$$Dj(I) \cdot \Theta_k \simeq \frac{1}{2}(L_{k-\frac{1}{2}} + L_{k+\frac{1}{2}}) \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \left( -\frac{1}{\Delta t^2}(\rho_k^{n+1} - \rho_k^n)(\sigma_k^{n+1} - \sigma_k^n) + \lambda_k^n \mu_k^n \right), \quad (3.1)$$

les termes  $\rho_k^n$  et  $\lambda_k^n$  correspondant aux valeurs approchées de la charge (sur le sommet  $x_k$ , au temps  $n \Delta t$ ) et du courant associés à l'état direct. Le couple  $(\sigma_k^n, \mu_k^n)$  associé à l'état adjoint est défini de manière analogue.

Par construction, l'équation du champ adjoint fait intervenir un terme source qui est directement lié au contour d'intégration  $C_a$  (utilisé à l'origine pour le calcul de la SER). Pour tester la robustesse de l'implémentation, il faudra donc s'assurer de l'indépendance de la dérivée vis-à-vis de ce contour. Le problème (adimensionné) que nous avons choisi de traiter est le suivant :

Le domaine de calcul (*i.e.* le domaine fictif) est représenté par un carré de côté  $L = 20$ . Placé en son centre, un disque de rayon  $r = 5$  (jouant le rôle de l'obstacle) est irradié par une onde plane. Enfin, concernant les discrétisations spatiale et temporelle, nous avons pris  $h_s = \frac{L}{100} = 0.2$  (en gardant toujours le rapport  $\frac{h_l}{h_s}$  constant), et  $\Delta t = 0.1414$ .

La figure suivante décrit les résultats obtenus pour les deux contours d'intégration  $C_1 = [1, 19] \times [1, 19]$  et  $C_2 = [4, 16] \times [4, 16]$  au niveau des sommets  $(x_k)_{1 \leq k \leq 100}$  :

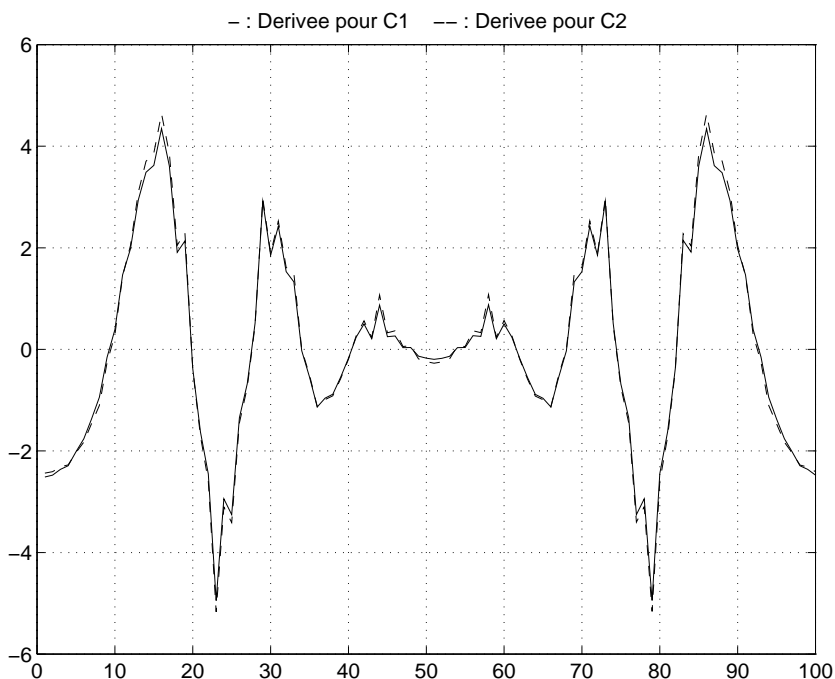


FIG. 3.1 – Dérivées associées aux contours  $C_1$  et  $C_2$

Au vu de ces résultats, il est clair que le choix de  $C_a$  n'a aucune influence sur le calcul de la dérivée (contrairement au champ adjoint).

### 3.1.2 Raffinement du maillage

Nous allons maintenant regarder l'influence du maillage surfacique  $h_s$  sur l'évaluation de la dérivée. En théorie, le profil de la dérivée doit être le même quel que soit le pas de discrétisation. Après vérification pour deux maillages différents ( $h_s = 0.2$  et  $h_s = 0.4$ ), on constate effectivement (cf. fig.3.2) que le calcul est bien mené.

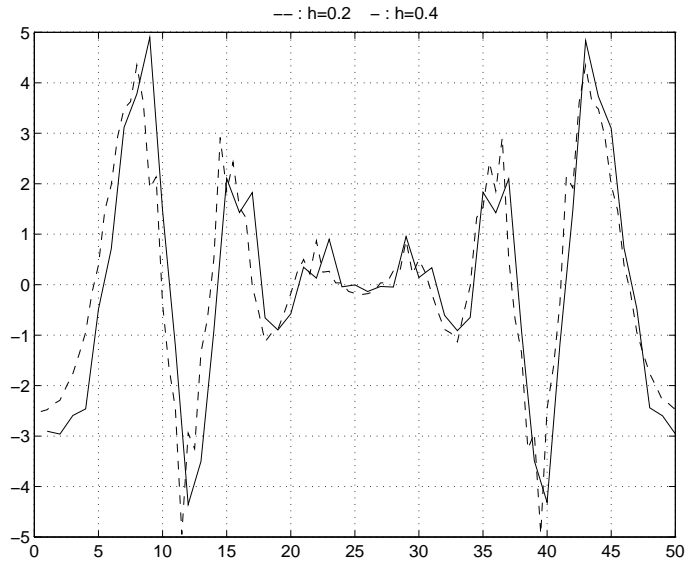


FIG. 3.2 – Dérivées associées aux pas de maillage  $h_s = 0.2$  et  $h_s = 0.4$

Ainsi, le calcul de la dérivée paraît tout à fait satisfaisant.

### 3.2 Convergence de l'algorithme d'optimisation

Dans cette dernière partie, nous allons vérifier que le processus d'optimisation converge, et que la forme obtenue fait bien diminuer la SER. Nous présentons ci-après les évolutions de la SER et du

$$\text{résidu } R^{(i)} = \left( \sum_{k=1}^q \left| \frac{\partial J^{(i)}}{\partial \alpha_k} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

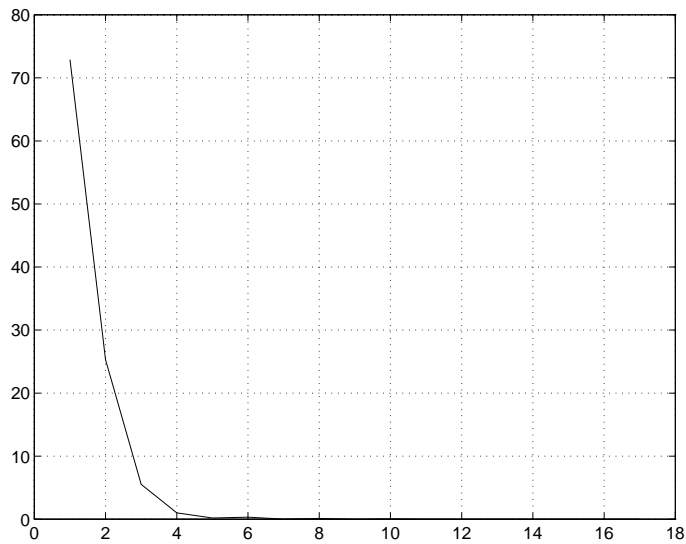


FIG. 3.3 – Evolution de la SER au cours des itérations

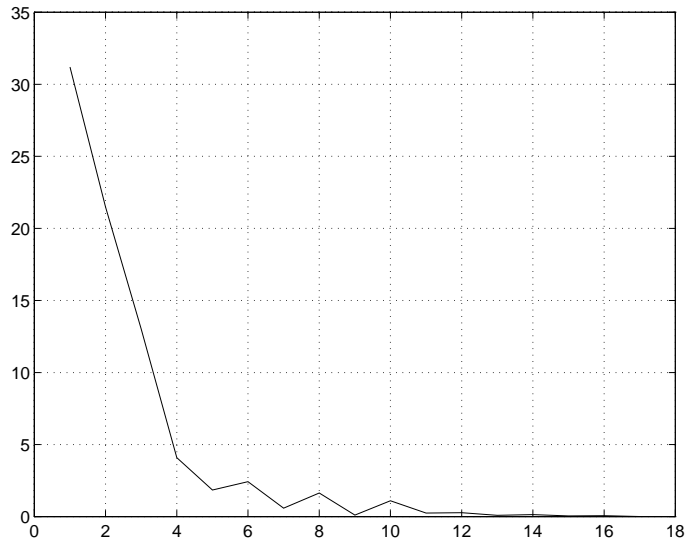


FIG. 3.4 – Evolution du résidu au cours des itérations

**Remarque 7** Les oscillations qui apparaissent au niveau de la figure 3.4 résultent du choix arbitraire du pas de descente dans l’algorithme d’optimisation.

Avec le critère d’arrêt  $R^{(i)} < 10^{-3}$ , la convergence de l’algorithme vers un minimum local est obtenue en 17 itérations. La valeur finale de la SER est alors de  $0.49 \cdot 10^{-5}$  (contre 72.89 pour le disque initial). Le calcul par méthodes intégrales donne un résultat assez proche (0.16) qui assure la décroissance de la SER.

Pour finir, nous présentons les géométries initiale et finale associées au problème d’optimisation.

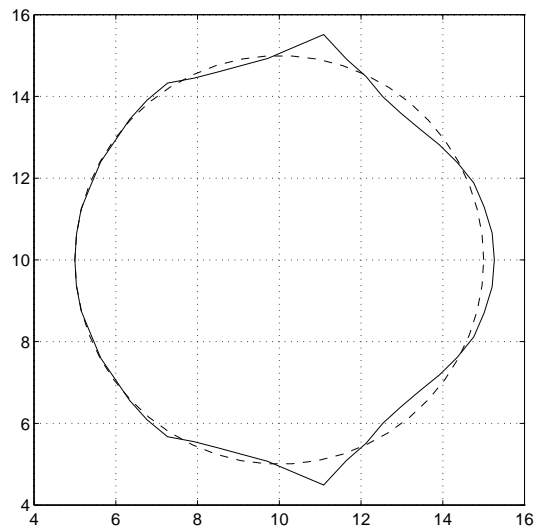


FIG. 3.5 – Géométries initiale et finale

# Conclusion

Dans cette étude, nous avons montré que l'association des méthodes de domaines fictifs et d'optimisation de forme pouvait conduire à des résultats très prometteurs. Nous allons maintenant rappeler la démarche utilisée pour la résolution du problème d'optimisation :

La première étape consistait à formuler le problème de diffraction relatif à un domaine variable par le biais de la méthode des domaines fictifs. Cette formulation a fait naître un multiplicateur de Lagrange que l'on a identifié à une quantité physique (la dérivée en temps du courant défini sur la surface de l'obstacle). Le paramétrage du domaine a ensuite permis de se ramener à un cadre beaucoup plus agréable, en facilitant notamment l'utilisation du calcul différentiel. Dès lors, le calcul des dérivées par rapport à la géométrie a été possible. Concrètement, leur expression - répartie dans le domaine de calcul - a pu être obtenue en définissant :

- d'une part, le lagrangien associé au problème d'optimisation,
- d'autre part, un couple (appelé état adjoint) permettant de simplifier l'expression de la dérivée du lagrangien.

L'introduction de cet état adjoint n'a posé aucun problème au niveau de l'implémentation : il a suffi simplement de changer le second membre de l'état direct et d'inverser le temps. Enfin, une expression intrinsèque a pu être obtenue en remplaçant de manière formelle certains termes de l'expression initiale. Le processus d'optimisation, dépendant essentiellement de l'approximation numérique de la dérivée, s'est finalement vu confier à un algorithme tout-à-fait classique.

Au point de vue numérique, nous avons montré que l'approximation des différentes quantités pouvait être effectuée par le biais de schémas aux différences finies explicites (grâce à la technique de condensation de masse). Malgré cela, il s'est avéré que le calcul des composantes normales des champs était imprécis. En fait, de par la définition des champs ( $H(\text{rot})$ ), cette situation était malheureusement à craindre. L'approximation de la dérivée reste cependant satisfaisante pour des fréquences élevées.

Une autre faiblesse est apparue au niveau de l'algorithme d'optimisation, celui-ci ne permettant d'obtenir que des minima locaux. Une solution consisterait à se tourner vers les algorithmes génétiques ou encore vers des méthodes de type recuit simulé.

Enfin, il faudrait traiter un exemple issu de l'industrie pour valider définitivement la méthode.

## Annexe A

# Expression de la dérivée répartie dans le domaine

On rappelle que la dérivée totale de la fonction coût  $j(F)$  peut être calculée au moyen d'une seule dérivée partielle du Lagrangien (cf. (1.42)). En fait, la dérivée partielle doit être évaluée au point particulier  $(u_F, \lambda_F, v_F, \mu_F)$ , où  $(u_F, \lambda_F)$  (resp.  $(v_F, \mu_F)$ ) correspond à la solution du problème d'état direct (1.37) (resp. problème d'état adjoint (1.59)). Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} Dj(F).\Theta &= \partial_F \mathcal{L}(F, u_F, \lambda_F, v_F, \mu_F).\Theta \\ &= \partial_F j_1(F, \Omega).\Theta + \partial_F j_2(F, \Gamma).\Theta \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

avec  $j_1(F, \Omega)$  et  $j_2(F, \Gamma)$  définies comme suit :

$$j_1(F, \Omega) = \int_0^T \int_{\Omega} \left( u_F \cdot \frac{d^2 v_F}{dt^2} + \text{tr} \left( Du_F DF^{-1} (DF^{-T} Dv_F^T - Dv_F DF^{-1}) \right) - \tilde{f} \cdot v_F \right) JF \, dx \, dt \quad (\text{A.2})$$

$$j_2(F, \Gamma) = - \int_0^T \int_{\Gamma} (\lambda_F \cdot v_F \wedge n + \mu_F \cdot u_F \wedge n) J_{\Gamma} F \, d\Gamma \, dt \quad (\text{A.3})$$

Pour obtenir une expression plus précise de la dérivée directionnelle de la fonction coût, nous utiliserons les résultats suivants :

**Lemme 1** *Les applications*

$$\sigma : F \in \mathcal{U} \mapsto DF^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \delta : F \in \mathcal{U} \mapsto \det(DF) \in \mathbb{R} \quad (\text{A.4})$$

sont de classe  $C^\infty$  et leur dérivée respective est donnée par :

$$D\sigma(F).\Theta = -DF^{-1} D\Theta DF^{-1} \quad \text{et} \quad D\delta(F).\Theta = DF^c : D\Theta \quad (\text{A.5})$$

Rappelons que pour une matrice carrée  $A$ , la notation  $A^c$  désigne la comatrice de  $A$  (avec en particulier  $A^c = \det(A)A^{-T}$ , lorsque  $A$  est inversible).

**Lemme 2** *L'application*

$$\delta_{\Gamma} : F \in \mathcal{U} \mapsto \|DF^{-T} n\| \det(DF) \in \mathbb{R} \quad (\text{A.6})$$

est dérivable au point  $F = I$ , et sa dérivée est donnée par :

$$D\delta_{\Gamma}(I).\Theta = \text{div} \Theta - n^T D\Theta n \quad (\text{A.7})$$

**Preuve** Définissons, pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et pour  $F \in \mathcal{U}$ ,  $N(x) = \|x\|$  et  $\sigma_1(F) = \mathbf{D}F^{-T} n$ . L'application  $N$  est dérivable en tout point  $x \neq 0$ , et sa dérivée a pour expression :

$$\mathbf{D}N(x).y = \frac{(x, y)}{\|x\|} \quad (\text{A.8})$$

D'après les notations précédentes,  $\delta_\Gamma(F) = (N \circ \sigma_1)(F) \delta(F)$ . A partir des résultats du lemme 1, on peut alors obtenir facilement l'expression finale de la dérivée de  $\delta_\Gamma(F)$ , sous réserve que  $\mathbf{D}F^{-T} n$  soit non nulle :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\delta_\Gamma(F).\Theta &= N(\sigma_1(F)) \mathbf{D}\delta(F).\Theta + \mathbf{D}N(\sigma_1(F)).(\mathbf{D}\sigma_1(F).\Theta) \\ &= \|\mathbf{D}F^{-T} n\| \mathbf{D}F^c : \mathbf{D}\Theta - \frac{(\mathbf{D}F^{-T} n, \mathbf{D}F^{-T} \mathbf{D}\Theta^T \mathbf{D}F^{-T} n)}{\|\mathbf{D}F^{-T} n\|} \det(\mathbf{D}F) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

si bien que pour  $F = I$ , on trouve :

$$\mathbf{D}\delta_\Gamma(I).\Theta = \operatorname{div} \Theta - n^T \mathbf{D}\Theta n \quad (\text{A.10})$$

◇

Il ne reste plus qu'à appliquer ces résultats aux dérivées de  $j_1$  et  $j_2$ . On obtient tout d'abord pour  $j_2$  :

$$\begin{aligned} \partial_F j_2(I, \Gamma).\Theta &= - \int_0^T \int_\Gamma (\lambda_I.v_I \wedge n + \mu_I.u_I \wedge n) (\operatorname{div} \Theta - n^T \mathbf{D}\Theta n) d\Gamma dt \\ &= - \int_0^T \int_\Gamma \lambda.v_I \wedge n d\Gamma dt - \int_0^T \int_\Gamma \mu.u_I \wedge n d\Gamma dt \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

avec comme définitions :

$$\lambda = (\operatorname{div} \Theta - n^T \mathbf{D}\Theta n) \lambda_I \quad (\text{A.12})$$

$$\mu = (\operatorname{div} \Theta - n^T \mathbf{D}\Theta n) \mu_I \quad (\text{A.13})$$

Puisque  $\lambda$  et  $\mu$  sont des éléments de  $L^2(0, T, \mathcal{M})$ , les équations d'état direct (1.37) et adjoint (1.59) impliquent que la dérivée partielle  $\partial_F j_2(I, \Gamma).\Theta$  est nulle. Par conséquent, l'expression de la dérivée directionnelle de la fonction coût est réduite au seul terme  $\partial_F j_1(I, \Gamma).\Theta$ . Après quelques petits calculs, on obtient finalement le résultat espéré :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}j(I).\Theta &= \int_0^T \int_\Omega \left( u_I \cdot \frac{d^2 v_I}{dt^2} + \operatorname{rot} u_I \cdot \operatorname{rot} v_I - \tilde{f} \cdot v_I \right) \operatorname{div} \Theta dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_\Omega \operatorname{tr} \left( \mathbf{D}u_I \mathbf{D}\Theta (\mathbf{D}v_I^T - \mathbf{D}v_I) + \mathbf{D}v_I \mathbf{D}\Theta (\mathbf{D}u_I^T - \mathbf{D}u_I) \right) dx dt \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

**Remarque 8** Comme  $u_I$  est nul dans  $\Omega_{int}$  (voir Annexe B), on pourra remplacer dans l'expression (A.14) l'intégrale relative au domaine  $\Omega$  par une intégrale définie uniquement sur  $\Omega_{ext}$ .

## Annexe B

# Quelques résultats techniques

Les résultats donnés dans cette annexe serviront essentiellement à déterminer l'expression intrinsèque de la fonction coût.

**Lemme 3** *La première composante  $u_T$  de l'état direct vérifie la propriété :*

$$u_T = 0 \quad \text{dans } \Omega_{int} \times [0, T] \quad (\text{B.1})$$

**Preuve** Pour commencer, rappelons qu'il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- (i) Le couple  $(u_T, \lambda_T)$  est solution du problème d'état direct (1.37)
- (ii) La composante  $u_T$  satisfait l'équation de Helmholtz (1.7) étendue au domaine  $\Omega$ , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_T}{\partial t^2} + \text{rot rot } u_T = \tilde{f} & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ u_T \wedge n|_\gamma = 0 & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \\ u_T(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_T}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

En particulier,  $u_T$  doit vérifier le problème homogène dans le sous domaine  $\Omega_{int}$  (car  $\tilde{f} = 0$  dans  $\Omega_{int} \times [0, T]$ ). Par unicité de la solution, on a :

$$u_T|_{\Omega_{int}} = 0 \quad (\text{B.3})$$

◇

**Lemme 4** *Les champs  $u_T$  et  $v_T$  vérifient la relation :*

$$\text{rot } u_T \cdot \text{rot } v_T = (\text{rot } u_T \wedge n) \cdot (\text{rot } v_T \wedge n) \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \quad (\text{B.4})$$

**Preuve** Dans un premier temps, les propriétés du produit mixte permettent d'écrire l'égalité :

$$(\text{rot } u_T \wedge n) \cdot (\text{rot } v_T \wedge n) = n \cdot (\text{rot } v_T \wedge (n \wedge \text{rot } u_T)) \quad (\text{B.5})$$

Ensuite, en développant le double produit vectoriel, on trouve la relation :

$$\begin{aligned} (\text{rot } u_I \wedge n) \cdot (\text{rot } v_I \wedge n) &= n \cdot \left( (\text{rot } u_I \cdot \text{rot } v_I) n - (n \cdot \text{rot } v_I) \text{rot } u_I \right) \\ &= \text{rot } u_I \cdot \text{rot } v_I - (n \cdot \text{rot } u_I)(n \cdot \text{rot } v_I) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que  $n \cdot \text{rot } u_I = \nabla_\Gamma \cdot u_I \wedge n = 0$  sur  $\Gamma \times [0, T]$  (par définition de  $u_I$ ).

◇

**Lemme 5** *Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_I$  issu de l'état direct peut être interprété physiquement comme la dérivée en temps d'un courant surfacique localisé sur  $\Gamma$ . Plus précisément, nous avons la relation :*

$$\lambda_I \wedge n = -\text{rot } u_I \wedge n \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \quad (\text{B.7})$$

**Preuve** Nous avons montré au paragraphe 1.2.2 que le couple  $(u_I, \lambda_I)$  vérifiait le problème d'évolution variationnel (cf. (1.14)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{d^2 u_I}{dt^2}(t) \cdot v + \text{rot } u_I(t) \cdot \text{rot } v \, dx \, dt = \int_{\Omega} \tilde{f}(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma} \lambda_I(t) \cdot v \wedge n \, d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{V} \\ \int_{\Gamma} \mu \cdot u_I(t) \wedge n \, d\Gamma = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{M} \\ u_I(0) = \frac{du_I}{dt}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.8})$$

Puisque  $u_I|_{\Omega_{int}} = 0$ , nous pouvons raisonnablement écrire :

$$\int_{\Omega_{ext}} \frac{d^2 u_I}{dt^2}(t) \cdot v + \text{rot } u_I(t) \cdot \text{rot } v \, dx = \int_{\Omega_{ext}} f(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma} \lambda_I(t) \cdot v \wedge n \, d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (\text{B.9})$$

D'autre part, en multipliant l'équation

$$\left( \frac{d^2 u_I}{dt^2}(t) + \text{rot rot } u_I(t) \right) \Big|_{\Omega_{ext}} = f(t) \quad (\text{B.10})$$

par une fonction  $v \in \mathcal{V}$ , et en intégrant sur  $\Omega_{ext}$ , nous obtenons grâce à une formule de Green :

$$\int_{\Omega_{ext}} \frac{d^2 u_I}{dt^2}(t) \cdot v + \text{rot } u_I(t) \cdot \text{rot } v \, dx = \int_{\Omega_{ext}} f(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma} \text{rot } u_I(t) \wedge n \cdot v \, d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (\text{B.11})$$

Il ne reste plus qu'à faire la différence des équations (B.9) et (B.11) pour trouver le résultat :

$$\int_{\Gamma} \lambda_I(t) \cdot v \wedge n \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \text{rot } u_I(t) \wedge n \cdot v \, d\Gamma \quad (\text{B.12})$$

c'est à dire :

$$\lambda_I \wedge n = -\text{rot } u_I \wedge n \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \quad (\text{B.13})$$

◇

**Lemme 6 (Equation de conservation de la charge)** La charge  $\rho_I = u_I \cdot n$  est solution du problème d'évolution :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \rho_I}{dt^2}(t) = \operatorname{div}_\Gamma (\lambda_I(t) \wedge n) & \text{sur } \Gamma \\ \rho_I(0) = \frac{d\rho_I}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

**Preuve** On repart de l'équation (B.9). En choisissant  $v = \operatorname{grad} \psi$ , avec  $\psi \in H^1(\Omega)$ , on obtient la relation :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_{ext}} \operatorname{div} \frac{d^2 u_I(t)}{dt^2} \psi \, dx + \int_\Gamma \frac{d^2 u_I(t)}{dt^2} \cdot n \, \psi \, d\Gamma &= \\ = - \int_{\Omega_{ext}} \operatorname{div} f(t) \cdot \psi \, dx + \int_\Gamma f(t) \cdot n \, \psi \, d\Gamma + \int_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma (\lambda_I(t) \wedge n) \psi \, d\Gamma &\quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Par hypothèse,  $f(t)$  (resp.  $\operatorname{div} f(t)$ ) est nulle à chaque instant sur  $\Gamma$  (resp.  $\Omega_{ext}$ ). De plus, on montre aisément que  $\left( \operatorname{div} \frac{d^2 u_I(t)}{dt^2} \right) \Big|_{\Omega_{ext}} = 0$  (en prenant la divergence de chacun des termes apparaissant dans l'équation (B.10)). Pour finir, on voit que  $\rho_I = u_I \cdot n$  vérifie le système annoncé. ◇

**Remarque 9** On peut montrer de la même façon que la charge adjointe, définie par  $\sigma_I = v_I \cdot n$ , est solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \sigma_I}{dt^2}(t) = \operatorname{div}_\Gamma (\mu_I(t) \wedge n) & \text{sur } \Gamma \\ \sigma_I(T) = \frac{d\sigma_I}{dt}(T) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

**Lemme 7** Soit  $z \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$  et soient  $\varphi, \psi \in C^\infty(\Gamma, \mathbb{R}^n)$  vérifiant les propriétés :

- (i)  $\varphi = (\varphi \cdot n) n$  sur  $\Gamma$
- (ii)  $\psi$  est un champ tangent de  $C^\infty(\Gamma, \mathbb{R}^n)$

Alors, nous avons l'égalité :

$$\int_\Gamma D\varphi^T n \cdot z \psi \, d\Gamma = - \int_\Gamma \varphi \cdot n (z \operatorname{div}_\Gamma \psi + \psi \cdot \nabla_\Gamma z) \, d\Gamma \quad (\text{B.17})$$

**Preuve** Le terme  $D\varphi^T n$  se décompose de la façon suivante :

$$D\varphi^T n = \nabla(\varphi \cdot n) - Dn^T \varphi \quad (\text{B.18})$$

Cependant, comme  $\varphi$  est normal à la courbe  $\Gamma$ , nous pouvons écrire :

$$Dn^T \varphi = (\varphi \cdot n) Dn^T n = \frac{1}{2}(\varphi \cdot n) \nabla(\|n\|^2), \quad (\text{B.19})$$

cette dernière expression étant nulle, par définition de  $n$ .

La formule de Stokes (cf. [Ben84]) permet ensuite de conclure :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{D}\varphi^T n \cdot z\psi \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} (\varphi \cdot n) \cdot z\psi \, d\Gamma = - \int_{\Gamma} \varphi \cdot n \operatorname{div}_{\Gamma} (z\psi) \, d\Gamma, \quad (\text{B.20})$$

ou plus précisément :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{D}\varphi^T n \cdot z\psi \, d\Gamma = - \int_{\Gamma} \varphi \cdot n (z \operatorname{div}_{\Gamma} \psi + \psi \cdot \nabla_{\Gamma} z) \, d\Gamma \quad (\text{B.21})$$

◇

# Bibliographie

- [Ben84] A. BENDALI. *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*. Thèse d'Etat, Paris VI, 1984.
- [Céa86] J. CÉA. *Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût*. M<sup>2</sup>AN, vol. 20, n° 3, 1986.
- [CJM96] F. COLLINO, P. JOLY et F. MILLOT *Fictitious domain method for unsteady problems: application to electromagnetic scattering*. CERFACS Report, TR/EM/96/32, 1996.
- [DaL88] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, Paris, 1988.
- [Gui94] Ph. GUILLAUME. *Dérivées d'ordre supérieur en conception optimale de forme*. Thèse de Doctorat, Toulouse, 1994.
- [Jin93] J.-M. JIN. *The finite element method in electromagnetics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.
- [LiM68] J.-L. LIONS et E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1. Dunod, Paris, 1968.
- [MaA94] M. MASMOUDI et P. AIMÉ. *Optimisation de la forme d'un réflecteur*. Alcatel, rapport interne, 1994.
- [Min83] M. MINOUX. *Programmation mathématique. Théorie et algorithmes*, tome 1. Dunod, Paris, 1983.
- [RaT83] P.A. RAVIART et J.-M. THOMAS. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1983.
- [Taf95] A. TAFLOVE. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House, Londres, 1995.