

# La méthode Multipôle pour les problèmes de diffraction

F. Collino \*      F. Millot\*

**CERFACS REPORT TR/EMC/00/95**

## Sommaire

Ce document constitue le rapport portant sur la méthode multipôle. Cette étude a été réalisée pour le compte de EADS par l'équipe "Electromagnétisme" du CERFACS. Elle comprend quatre parties. Le premier chapitre présente les méthodes intégrales pour les problèmes de diffraction. La deuxième partie explique la méthode multipôle à un seul niveau. Quant à la méthode multiniveau, elle est exposée au chapitre trois. Des résultats numériques sont donnés au dernier chapitre.

---

\*CERFACS, 42 avenue G. Coriolis 31057 Toulouse

# Contents

<b>1</b>	<b>Présentation de méthodes intégrales pour les problèmes de diffraction</b>	<b>5</b>
1.1	Présentation des équations intégrales classiques (rappels) . . .	5
1.2	Discrétisation . . . . .	8
1.3	Inversion des systèmes linéaires . . . . .	11
1.3.1	Méthode directe . . . . .	11
1.3.2	Méthodes itératives . . . . .	12
<b>2</b>	<b>La méthode multipolaire à un niveau</b>	<b>14</b>
2.1	Principe de la méthode . . . . .	15
2.1.1	Considérations algébriques. Matrices creuses et matrices de rang fini . . . . .	15
2.1.2	Matrices associées à des opérateurs à noyaux . . . . .	16
2.1.3	Produit matrice vecteur rapide . . . . .	18
2.2	Formules FMM pour la EFIE, MFIE et CFIE . . . . .	21
2.2.1	Rappel des formules multipolaires classiques . . . . .	21
2.2.2	Analyse d'erreur lors de la troncature des séries . . . . .	24
2.2.3	Points de quadrature sur la sphère . . . . .	26
<b>3</b>	<b>La méthode multiniveaux</b>	<b>30</b>
3.1	Description de la structure arborescente: les boîtes. . . . .	31
3.1.1	Notion de boîtes. Empilement de boîtes. . . . .	31
3.1.2	Notion de descendants, d'ascendants, de voisins et de voisins éloignés d'une boîte . . . . .	32
3.2	Découpages induits par la structure de boîte. . . . .	33
3.2.1	Découpage arborescent sur $\mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h$ . . . . .	33
3.2.2	Découpage des matrices . . . . .	34
3.3	Multiplication matrice vecteur via la FMM. . . . .	36
3.3.1	Formule multipôle abstraite . . . . .	36
3.3.2	Multiplication matrice vecteur (cas singulier) . . . . .	37
3.3.3	Multiplication matrice vecteur (cas régulier) . . . . .	40
3.4	Application aux équations intégrales de l'électromagnétisme .	42
3.4.1	Formules multipolaires à 4 composantes pour la EFIE	42
3.4.2	Formules multipolaires à 3 composantes pour la MFIE	43
3.4.3	Formules multipolaires pour la CFIE à 4 composantes	44
3.5	Quadrature, interpolation et filtrage des fonctions de la sphère unité . . . . .	46

<b>4</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>48</b>
4.1	Tests de performance sur le produit matrice-vecteur . . . . .	49
4.1.1	Variation du nombre de points de Gauss . . . . .	49
4.1.2	Variation du nombre de points par longueur d'onde . . . . .	52
4.1.3	Variation du nombre de multipôles . . . . .	54
4.2	Tests de performance sur la résolution du système . . . . .	55
4.2.1	Cas académique de la sphère . . . . .	56

## List of Figures

1	Module de l'erreur relative en fonction de $L$ . . . . .	24
2	Module de $(2n + 1)j_n( d )$ pour $ d  = 30$ en fonction de $n$ . . .	24
3	Module de $y_n( D )$ pour $ D  = 60$ en fonction de $n$ . . . . .	25
4	Mémoire utilisée pour réaliser un produit matrice-vecteur à l'aide la méthode multipôle . . . . .	50
5	Mémoire utilisée pour réaliser un produit matrice-vecteur à l'aide la méthode multipôle (* : $M^{near}$ , +: $M^{farfields}$ ) . . . . .	51
6	Temps de calcul (* : $npg = 1$ , +: $npg = 3$ ) . . . . .	51
7	Mémoire (+: $N_\lambda = 10$ , *: $N_\lambda = 7$ ) . . . . .	52
8	Mémoire (-: $N_\lambda = 10$ , -: $N_\lambda = 7$ ) . . . . .	53
9	Temps de calcul (-: 10 points par $\lambda$ $npg = 3$ , - - : 10 points par $\lambda$ $npg = 1$ , -: 7 points par $\lambda$ $npg = 3$ ) . . . . .	53
10	Temps de calcul (-: 10 points par $\lambda$ avec $npg = 3$ , - - : 10 points par $\lambda$ avec $npg = 1$ , -: 7 points par $\lambda$ avec $npg = 3$ ) . . .	54
11	Mémoire (-: $C = 1$ , - - : $C = 2.25$ ) . . . . .	54
12	Temps de calcul(-: $C = 1$ , - - : $C = 2.25$ , -: valeurs obtenues par le code FISC) . . . . .	55
13	Mémoire utilisée . . . . .	57
14	Nombre d'itérations en fonction du nombre de degré de liberté	57
15	Temps cpu en fonction du nombre de degré de liberté . . . . .	58

# 1 Présentation de méthodes intégrales pour les problèmes de diffraction

Dans cette partie, on rappelle très rapidement les équations intégrales classiques pour l'électromagnétisme. Le but ici est de donner les concepts et les notations qui nous seront utiles. Pour une présentation plus complète, on se reportera utilement à [4], [5]. Pour simplifier on se restreint au cas modèle d'un problème de diffraction avec une condition type conducteur parfait sur l'obstacle. La présentation du problème continu fait l'objet d'un premier paragraphe, la discrétisation est évoquée dans un deuxième; enfin, le troisième paragraphe abordera les questions relatives à la résolution pratique des systèmes linéaires.

## 1.1 Présentation des équations intégrales classiques (rappels)

On considère une surface fermée  $\Gamma$  de normale extérieure  $\nu$ . On suppose que cette surface partage l'espace en deux domaines : un domaine intérieur à  $\Gamma$  et un domaine extérieur. On note  $\Omega^{int}$  et  $\Omega^{ext}$  ces deux domaines. La normale à  $\Gamma$  est supposée pointer de  $\Omega^{int}$  vers  $\Omega^{ext}$ .

On note  $k$  est le nombre d'onde et  $Z_0$  l'impédance du vide. On s'intéresse à la solution sortante du problème de diffraction

$$(1) \quad \begin{cases} \nabla \wedge E - ikZ_0 H = 0 & \text{dans } \Omega^{ext} \\ \nabla \wedge H + ikZ_0^{-1} E = 0 & \text{dans } \Omega^{ext} \\ \nu \wedge (E \wedge \nu) = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

avec la condition de radiation de Silver-Muller à l'infini

$$(2) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\hat{x} \wedge ((E(x) - E^{inc}(x)) \wedge \hat{x}) + Z_0((H(x) - H^{inc}(x)) \wedge \hat{x}) d\hat{x}|^2 = 0$$

Le champ  $(E^{inc}, H^{inc})$  est le champ incident sur l'obstacle, C'est par exemple une onde plane pour fixer les idées.

Les équations intégrales s'appuient fondamentalement sur une représentation sous forme de potentiels des champs électromagnétiques. Celle-ci est fournie par les formules dites de Stratton-Chu, [5]

$$(3) \quad \begin{cases} E(x) = E^{inc}(x) + iZ_0 \tilde{T} J(x) & x \in \Omega^{ext} \\ H(x) = H^{inc}(x) - \tilde{K} J(x) & x \in \Omega^{ext}, \end{cases}$$

où les potentiels sont donnés par

$$(4) \quad \begin{cases} \tilde{T}J(x) = k \int_{\Gamma} G(x, y) J(y) d\Gamma(y) + \frac{1}{k} \int_{\Gamma} \vec{\nabla}_x G(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma} J(y) d\Gamma(y) \\ \tilde{K}\phi(x) = \int_{\Gamma} \vec{\nabla}_y G(x, y) \wedge J(y) d\Gamma(y). \end{cases}$$

$G(x, y)$  est la fonction de Green sortante

$$(5) \quad G(x, y) = \frac{\exp(ik|x - y|)}{4\pi|x - y|}.$$

et  $\operatorname{div}_{\Gamma}$  est la divergence surfacique de  $J$ .

L'inconnue  $J(x)$  est un champ tangent à la surface  $\Gamma$  : il s'interprète comme le courant circulant sur la surface

$$(6) \quad J(y) = \nu(y) \wedge H(y), \quad y \in \Gamma.$$

Le problème est ainsi ramené à la détermination de ce courant. Pour cela, on peut construire plusieurs équations intégrales. La plus simple consiste à écrire directement la condition de conducteur parfait sur l'objet

$$(7) \quad \frac{i}{Z_0} (E^{inc})_t(x) = \left( \tilde{T}J \right)_t(x), \quad x \in \Gamma$$

(on note  $(a)_t(x) = \nu(x) \wedge (a(x) \wedge \nu(x))$ , la projection de  $a$  sur le plan tangent à  $\Gamma$ ). C'est l'équation dite EFIE.

La seconde est d'obtention plus indirecte. On remarque dans un premier temps que les expressions des champs dans (3) ont également un sens pour  $x$  dans  $\Omega^{int}$  et vérifient également les équations de Maxwell. En outre, la théorie du potentiel nous indique que la composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée de  $\Gamma$ , cf. [5], et est donc nulle par hypothèse. On en déduit que le champ électromagnétique que définit les formules de Stratton-Chu est nul dans  $\Omega^{int}$  et en particulier que la trace intérieure de la composante tangentielle du champ magnétique est nul. Ainsi

$$(8) \quad n(x) \wedge H^{inc}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} n(x) \wedge \left( \tilde{K}J \right)(x - \epsilon\nu(x)).$$

Il ne reste plus qu'à utiliser l'expression de la limite, toujours fournie par la théorie du potentiel pour obtenir

$$(9) \quad n(x) \wedge H^{inc}(x) = \frac{1}{2} J(x) + n(x) \wedge (KJ)(x),$$

avec

$$(10) \quad KJ(x) = \int_{\Gamma} \vec{\nabla}_y G(x, y) \wedge J(y) d\Gamma(y),$$

opérateur intégral à noyau faiblement singulier. Cette seconde équation est connue sous le nom MFIE.

Ces deux équations souffrent d'un problème d'unicité pour certaines valeurs du nombre d'onde : c'est le problème de la résonance. On peut le comprendre en remarquant que la détermination du courant permet non seulement de résoudre le problème de diffraction dans le domaine extérieur mais il fournit également la solution du problème intérieur (ici avec trace tangentielle du champ électrique nulle). Or, pour certaines valeurs de  $k$  ce problème n'admet pas de solution unique. Pour ces valeurs particulières de  $k$ , on a plus d'inversibilité du système linéaire. On peut pallier à cette difficulté en combinant les deux équations. Par exemple si  $\alpha, \beta$  sont deux paramètres compris entre 0 et 1 avec  $\alpha + \beta = 1$ , on écrit

$$(11) \quad \begin{cases} \beta n(x) \wedge H^{inc}(x) + \frac{\alpha}{Z_0} (E^{inc})_t(x) = \\ \frac{\beta}{2} J(x) + \beta n(x) \wedge (KJ)(x) - i\alpha (\tilde{T}J)_t(x). \end{cases}$$

Cette équation est la CFIE pour Combined Fields Integral Equation. On montre que cette équation est exempte du problème des fréquences de résonance.

Avant de refermer cette section, nous donnons quelques remarques sur le cas des objets ouverts. Lorsque  $\Gamma$  est une surface non fermée, on montre que les formules de Stratton-Chu sont encore valables au prix d'une substitution dans l'expression du courant. On a dans ce cas

$$(12) \quad J(x) = [\nu(x) \wedge H(x)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \nu(x) \wedge (H(x + \epsilon\nu(x)) - H(x - \epsilon\nu(x))).$$

En d'autres termes, le courant est alors le saut de la composante tangentielle (à une rotation près) du champ magnétique à la traversée de  $\Gamma$ . On montre facilement que la dérivation de l'équation EFIE reste toujours valable : la EFIE permet de résoudre les problèmes de cavités semi-ouvertes. Il n'en est pas de même pour la MFIE et la CFIE. L'absence de domaine intérieur nous empêche de suivre la même démarche que précédemment. L'obligation d'utiliser la EFIE pour résoudre les problèmes de diffraction sur un objet non fermé est à la source des difficultés de leur résolution.

## 1.2 Discrétisation

On distingue deux grandes familles de discrétisations des équations intégrales. Les premières s'appuient sur des méthodes de collocation, les secondes sur des formulations variationnelles. Nous ne décrivons ici qu'une méthode variationnelle parmi beaucoup d'autres. C'est celle qui est certainement la plus utilisée en France.

Considérons par exemple la EFIE. L'écriture variationnelle est

$$(13) \quad \frac{i}{Z_0} \int_{\Gamma} E^{inc}(x) \cdot J^t(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \left( \tilde{T}J \right)_t(x) \cdot J^t(x) d\Gamma(x),$$

pour tout champ de vecteur  $J^t(x)$  tangent à  $\Gamma$  suffisamment régulier. La difficulté de cette écriture variationnelle est que l'opérateur intégral impliqué possède un noyau non localement intégrable et n'a de sens que comme une valeur principale de Cauchy. On peut s'affranchir de ce problème en effectuant une intégration par partie. On obtient

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} kG(x, y) \left( J(y) \cdot J^t(x) - \frac{1}{k^2} \operatorname{div}_{\Gamma} J(y) \operatorname{div}_{\Gamma} J^t(x) \right) d\Gamma(y) d\Gamma(x) \\ = \frac{i}{Z_0} \int_{\Gamma} E^{inc}(x) \cdot J^t(x) d\Gamma(x), \quad \forall J^t(x). \end{array} \right.$$

Maintenant, si  $\mathcal{T}_h$  est un maillage composé de triangles approchant l'obstacle  $\Gamma$ , on approche les inconnues du problème à l'aide d'éléments finis de Raviart-Thomas d'ordre le plus bas, conformes pour l'opérateur divergence surfacique. De manière plus concrète, on approche

$$(15) \quad J(x) \approx \sum_j I_j \phi_j(x)$$

où la sommation en  $j$  s'effectue sur les arêtes de la triangulation tandis que les  $\phi_j$  sont les fonctions de base de Raviart-Thomas. Celles-ci s'appuient (i.e. sont non nulles) sur les deux triangles d'arête commune  $A_j$  où leur variation est linéaire (cf. section 3.2.2 pour une définition plus précise). On écrit ensuite les équations variationnelles pour toutes les fonctions de base du système (i.e. on prend  $J^t(x) = \phi_i(x)$ ) : c'est la méthode de Galerkin. On obtient un système linéaire

$$(16) \quad U^{EFIE} = Z^{EFIE} I,$$

dans lequel

- $I = (I_j)$  est le vecteur des flux du courant à travers chaque arête
- $U^{EFIE} = (U_j)$  est le vecteur des potentiels de chaque arête

$$(17) \quad U_i = \frac{i}{Z_0} \int_{\Gamma} E^{inc}(x) \cdot \phi_i(x) d\Gamma(x).$$

- $Z^{EFIE} = (Z_{i,j})$  est la matrice d'impédance

$$(18) \quad Z_{i,j} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} kG(x,y) \left( \phi_j(y) \cdot \phi_i(x) - \frac{1}{k^2} \operatorname{div}_{\Gamma} \phi_j(y) \operatorname{div}_{\Gamma} \phi_i(x) \right) d\Gamma(y) d\Gamma(x)$$

Une particularité du système ainsi obtenu est que la matrice associée est symétrique non hermitienne. La taille de ce système est égal au nombre d'arêtes du maillage, soit 3/2 fois le nombre de triangles de la triangulation.

On peut procéder exactement de même pour la MFIE. On obtient un système de la forme

$$(19) \quad U^{MFIE} = Z^{MFIE} I,$$

avec cette fois-ci

$$(20) \quad U_i = \int_{\Gamma} n(x) \wedge H^{inc}(x) \cdot \phi_i(x) d\Gamma(x),$$

et

$$(21) \quad \begin{cases} Z_{i,j} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \phi_j(x) \cdot \phi_i(x) d\Gamma(x) \\ - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \nabla_y G(x,y) \wedge \phi_j(y) \cdot (\phi_i(x) \wedge n(x)) d\Gamma(y) d\Gamma(x). \end{cases}$$

Il est à noter que la matrice ainsi obtenue n'est plus symétrique. Enfin, la CFIE s'obtient par combinaison, en prenant si  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient  $\alpha + \beta = 1$

$$(22) \quad \beta U^{MFIE} - i\alpha U^{EFIE} = (\beta Z^{MFIE} - i\alpha Z^{EFIE}) I$$

La résolution pratique des problèmes discrétisés est confrontée à deux difficultés: le calcul effectif des éléments de la matrice (assemblage) et la résolution proprement dite. Ce second point est discuté dans le paragraphe suivant.

Concernant l'assemblage, il est à noter qu'un soin tout particulier doit être pris pour le réaliser si l'on veut ne pas détruire toute précision à la méthode. Il s'effectue en suivant la démarche habituelle pour les éléments finis; on utilise la triangulation pour se ramener à des matrices élémentaires en écrivant

$$(23) \quad Z_{i,j} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{T' \in \mathcal{T}_h} Z_{i,j}^{T,T'},$$

où les matrices élémentaires  $Z_{i,j}^{T,T'}$  sont obtenues en substituant  $\int_T \int_{T'}$  à  $\int_\Gamma \int_\Gamma$  dans l'expression de  $Z$ . Ces matrices sont très creuses puisque seuls 9 termes sont non nuls qui correspondent au couplage des 3 degrés de liberté associés aux 3 arêtes de  $T$  avec les 3 degrés de liberté associés aux 3 arêtes de  $T'$ . Lorsque les deux triangles sont éloignés (les distances étant rapportées au nombre d'onde), les noyaux sont réguliers et on peut utiliser une méthode de quadrature s'appuyant sur des points de Gauss choisis sur chaque triangle. Si les triangles sont proches, on ne peut plus faire de même à cause de la singularité du noyau. L'idée est de calculer l'une des intégrales de façon semi-analytique sur l'un des triangles puis d'utiliser des points de Gauss pour la seconde intégrale. Nous ne détaillerons pas ici les calculs très techniques utilisés mais retiendrons simplement qu'à l'erreur induite par le passage des équations continues aux équations discrétisées s'ajoute l'erreur due à la quadrature numérique lors de l'assemblage.

En résumé l'erreur totale sur le vrai courant peut être décomposée suivant

- Une erreur géométrique qui correspond au passage du vrai objet diffractant  $\Gamma$  à son approximation polygônale par les triangles de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ .
- Une erreur de discrétisation qui est liée à l'utilisation d'une base d'éléments finis pour approcher le courant et les courants tests (erreur induite par l'utilisation de la méthode de Galerkin). L'erreur de discrétisation a fait l'objet d'études poussées. On retient habituellement qu'un maillage à 10 points par longueur d'onde pour la plus grande des arêtes, soit  $k \max(\text{longueur}(A_j)) = 2\pi/10$ , est nécessaire pour un calcul précis tandis qu'un maillage à 7 voire 5 points par longueur d'onde fournit un résultat qui peut être satisfaisant.
- Une erreur d'assemblage induite par la quadrature numérique ou semi analytique. Celle-ci repose, outre sur la qualité du traitement des

singularités déjà signalé, essentiellement sur le nombre de points de Gauss utilisé. Celui-ci doit être choisi en fonction de la taille des triangles; si pour un maillage à 10 points par longueur d’onde un seul point de Gauss peut suffire, 3 points sont nécessaires à 7 points par longueur d’onde.

- Une erreur de résolution. Celle-ci peut être importante si une méthode itérative est utilisée ou si le système souffre d’un mauvais conditionnement.

Nous signalons ces points car lorsque nous utiliserons la méthode multipolaire qui est une méthode approchée, il conviendra de mettre en regard l’erreur multipolaire et l’ensemble des erreurs ici décrites.

### 1.3 Inversion des systèmes linéaires

L’inversion du système (ou des systèmes si l’on s’intéresse à plusieurs champs incidents) revient à résoudre une équation linéaire avec une matrice à coefficients complexes, pleine et non hermitienne. La seule particularité de cette matrice est d’être symétrique si l’équation EFIE est retenue. La résolution peut s’effectuer par une méthode directe LU ou par une méthode itérative éventuellement préconditionnée.

#### 1.3.1 Méthode directe

C’est la méthode classique LU. Elle consiste en la construction de deux matrices triangulaires, l’une inférieure (L) l’autre supérieure (U) puis à descendre et remonter le système pour la résolution. Si  $N$  est le nombre de degrés de liberté et  $N^{inc}$  le nombre d’incidences (i.e. le nombre de seconds membres à traiter) le temps CPU de la méthode est

$$(24) \quad C^{LU} = c_1 N^3 + c_2 N^2 N^{inc} + c_3 N^2 + c_4 N,$$

où les  $c_i$  dépendent de la machine utilisée. Le premier terme correspond à la factorisation  $LU$ , le second à la descente remontée des systèmes, le troisième et le quatrième à l’assemblage des matrices élémentaires pour les paires de triangles éloignés et proches ( $c_3 \ll c_4$ ). La place mémoire requise est directement liée à la taille de la matrice

$$(25) \quad M^{LU} \approx (N/1000)^2 \times 16 \text{ MBytes},$$

(on travaille en double précision avec des nombres complexes sur 16 bytes). Par exemple, un problème à 50 000 degrés de libertés nécessite 40 Gbytes

de mémoire pour un temps de calcul de 200 heures sur une bonne machine. On voit tout de suite que l'on est confronté à des problèmes de grande taille.

Une première approche pour aborder le problème est d'utiliser la parallélisation des calculs. Ce point fait l'objet de la section 4 et 5 du rapport joint intitulé "Résolution du cas test JINA  $n^o$  4 par le code CESC du CER-FACS". Une autre est d'utiliser une méthode itérative.

### 1.3.2 Méthodes itératives

Étant donné un système linéaire non singulier  $Ax = b$ , et un point de départ  $x^{(0)}$ , les méthodes itératives consistent à construire une suite  $x^{(k)}$  approchant la solution  $x$ . Beaucoup de ces méthodes génèrent successivement cette suite en prenant

$$(26) \quad x^{(k)} \in x^{(0)} + \mathcal{K}^k(A, r^{(0)}),$$

où  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$  est le résidu initial et

$$(27) \quad \mathcal{K}^k(A, r^{(0)}) = \text{span} \left( r^{(0)}, Ar^{(0)}, \dots, Z^{k-1}r^{(0)} \right),$$

( $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$  désigne le plus petit espace linéaire contenant les vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ). Cet espace est connu sous la dénomination de sous-espace de Krylov. La suite est construite de telle sorte à minimiser le résidu à l'étape  $k$ :

$$(28) \quad \|\|r^{(k)}\|\| = \|\|Ax^{(k)} - b\|\| = \min_{x \in x^{(0)} + \mathcal{K}^k(A, r^{(0)})} \|\|Ax - b\|\|.$$

En pratique, on arrête le processus lorsque le résidu est suffisamment petit (inférieur à  $10^{-4}\|b\|$  par exemple).

Lorsque la matrice est hermitienne, la minimisation peut s'effectuer très simplement car on montre que le résidu à l'étape  $k$  est orthogonal à l'espace de Krylov  $\mathcal{K}^k(A, r^{(0)})$ . L'algorithme nécessite pour chaque itération un produit matrice vecteur et l'application d'une récurrence courte pour calculer le nouvel itéré. Comme nous l'avons signalé, les systèmes qui nous intéressent ne sont pas hermitiens et on doit avoir recours à des méthodes plus sophistiquées. L'une d'elles, que nous privilégierons ici, est la méthode GMRES, [11], [9]. Nous n'entrerons pas ici dans les détails de la méthode mais signalons simplement que, en sus d'un calcul matrice vecteur par itération, l'algorithme nécessite de garder en mémoire un ensemble de  $k$  vecteurs à l'étape  $k$  ce qui peut très vite encombrer la mémoire. C'est pourquoi on choisit en pratique un paramètre appelé *longueur de la mémoire* ou *restart*,

noté  $m$ , qui fixe le nombre d'itérations maximal que l'on utilise avant de redémarrer la méthode. Il est connu que l'on n'a pas de théorème de convergence lorsque  $m < N$  pour une matrice  $A$  quelconque. Toutefois, cette méthode s'est avérée particulièrement efficace pour beaucoup de problèmes pratiques.

Si  $N_{inc}$  est le nombre d'incidences à traiter et  $N_{iter}$  le nombre d'itérations moyen pour converger, le temps de calcul est approximativement donné pour un problème de taille  $m$

$$(29) \quad C^{iter} = N^{inc} N^{iter} (C_{Ax}(N) + c_1^m N + c_2^m),$$

où  $C_{Ax}(N)$  est le temps de calcul pour un produit matrice vecteur  $Ax$  et  $c_1^m N + c_2^m$  est le temps mis par l'algorithme GMRES pour résoudre le problème de minimisation; on l'a ici décomposé en une partie dépendant linéairement du nombre d'inconnues (essentiellement des calculs de produits scalaires) et une partie qui dépend de la taille de l'espace de Krylov uniquement. Dans le cas des problèmes de grande taille avec matrices pleines qui nous occupent, c'est essentiellement le coût des produits matrice vecteurs qui va donner la complexité. Pour une matrice pleine préassemblée, ce coût est proportionnel à  $N^2$ , ce qui est multiplié par le nombre d'incidences et d'itérations peut s'avérer prohibitif.

Du point de vue de la mémoire utilisée, pour les matrices complexes et des calculs réalisés en double précision, l'encombrement est donné par

$$(30) \quad \begin{cases} M^{iter} = M^{GMRES} + M^{Ax} \\ \text{avec } M^{GMRES} = (m^2 + m(N + 5)) \times 16 \cdot 10^{-6} \text{ Mbytes,} \end{cases}$$

qui est négligeable devant  $M^{Ax}$  qui est l'encombrement nécessaire au produit matrice vecteur. Si l'on précalcule cette matrice, on se retrouve avec la même taille que pour la résolution  $LU$ , c'est à dire avec un encombrement proportionnel au carré de  $N$ . Une alternative est de ré-assembler la matrice à chaque itération en appliquant directement cette matrice au vecteur sans stocker la matrice. L'encombrement tombe alors avec une proportionnalité à  $N$  mais le coût de calcul explose en  $N^2$  avec une constante de proportionnalité sans commune mesure avec celle associée au calcul avec matrice précalculée (l'assemblage demande de nombreux calculs impliquant les fonctions sinus et cosinus qui ne sont pas précisément bon marché).

C'est ici que l'on voit tout l'intérêt des méthodes multipôles. Ces méthodes ont été introduites par Rokhlin pour les problèmes d'électromagnétismes et popularisé par Chew de l'université d'Urbana Champaign au travers de

résultats probants, (code de calcul FISC, [13]). Sa version dite multi-niveaux permet d'obtenir une bonne approximation du produit matrice vecteur avec un coût de calcul proportionnel à  $N \log^2 N$  voire  $N$  si l'on en croit les expériences présentées pour un encombrement mémoire en  $N \log N$ . L'utilisation de ces méthodes aboutissant à la complexité

$$(31) \quad C^{iter} \sim c_1 N^{inc} N^{iter} N \log^2 N; M^{iter} \sim c_2 N \log N$$

L'objet de la partie suivante sera précisément de présenter cette méthode.

Avant de clore cette section, signalons deux pistes prometteuses pour diminuer le coût de résolution. La première est liée à l'utilisation d'un préconditionneur. Le préconditionneur est une matrice, généralement creuse pour ne pas surcharger la mémoire, qui approche l'inverse de  $A$ ; plutôt que d'inverser le système  $Ax = b$ , on applique GMRES au système  $(AC)y = b$  et on pose  $x = Cy$  à la fin des itérations. Si  $C$  approche convenablement  $A^{-1}$ , on s'attend à ce que le nombre d'itérations nécessaire à la convergence soit drastiquement diminué. La recherche de bons préconditionneurs est l'objet de la thèse de Bruno Carpentieri ([2], [1]). La seconde piste est d'utiliser l'information relative à la résolution d'un système pour quelques incidences pour induire une bonne approximation du point de départ des autres systèmes. On procède à l'aide d'interpolation sur les courants (après correction du terme de phase).

## 2 La méthode multipolaire à un niveau

Nous avons vu dans la première partie que le calcul de la diffraction d'une onde par un obstacle au moyen des équations intégrales nécessite l'inversion d'un système linéaire plein à coefficients complexes. Pour des objets de grande taille, la résolution ne peut s'effectuer par une méthode directe et seules les méthodes itératives bien préconditionnées permettent de construire la solution. Le coût de ces méthodes est fortement lié au coût du produit matrice vecteur d'où l'intérêt des méthodes multipolaires multi-niveaux (MMM) qui effectuent ce produit avec une complexité en  $N \log^2(N)$  voire  $N$  où  $N$  est le nombre de degrés de liberté (le nombre d'arêtes du maillage de l'obstacle). Ces méthodes ont été introduites dans les années 80 pour les équations de Laplace et ont été généralisées aux problèmes de diffraction dans le début des années 90 par Rocklin et Greengard. Elles nécessitent un réglage fin des paramètres qui interviennent dans le procédé. Et ce n'est qu'en 1997 que les premiers résultats spectaculaires ont été publiés, [13],

[12]. Chew et son équipe (Illinois, USA) ont depuis annoncé des résultats de calcul sur des problèmes à 2.5 millions d'inconnues.

Une bonne introduction à la méthode dans sa version 1 niveau est donnée dans [3]. Bien que moins efficace (au moins pour les problèmes de très grande taille) que la version multiniveaux, il nous a paru utile de la présenter car elle est plus simple dans sa conception. Notre exposé se divisera en deux parties. On commencera par donner les principes de la méthode pour des matrices issues de la discrétisation d'opérateurs intégraux à noyau. Puis, on s'attachera à préciser les choses pour les équations de l'électromagnétisme.

## 2.1 Principe de la méthode

### 2.1.1 Considérations algébriques. Matrices creuses et matrices de rang fini

Comme nous l'avons dit, nous cherchons à réaliser un produit matrice vecteur  $b = Ax$  où  $A$  est une matrice  $N \times N$  avec une complexité inférieure à  $N^2$ . L'idée est d'exploiter les propriétés particulières de la matrice  $A$ . Par exemple, il est facile de vérifier que si  $A$  est de structure creuse, le coût de  $Ax$  est proportionnel à  $BN$  où  $B$  est le nombre moyen d'éléments non nuls sur chaque ligne de  $A$ . Si  $B$  est petit, cette structure s'avère intéressante (matrice très creuse).

Mais il existe une autre propriété de  $A$  qui génère un coût proportionnel à  $N$  : ce sont les matrices de rang fini. Une matrice de rang fini est une matrice dont l'image est de dimension finie  $P$ . Une telle matrice admet toujours une décomposition de la forme

$$A_{i,j} = \sum_{p=1}^P \lambda_p u_i^p w_j^p$$

où  $(w^p)_{p=1,P}$  est une base de l'image et  $(u^p)_{p=1,P}$  une base du co-noyau de  $A$ . Pour une telle matrice, on a

$$(Ax)_i = \sum_{p=1}^P \lambda_p u_i^p \left( \sum_{j=1}^N w_j^p x_j \right)$$

et le produit matrice vecteur s'effectue en  $(4N - 1)P$  opérations selon

$$\begin{aligned} 1 : \quad \mu_p &= \left( \sum_{j=1}^N w_j^p x_j \right), \quad p = 1, \dots, P \\ 2 : \quad \nu_p &= \lambda_p \mu_p, \quad p = 1, \dots, P \\ 3 : \quad (Ax)_i &= \sum_{p=1}^P \nu_p u_i^p, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

En conclusion, nous retiendrons que si une matrice est la somme d'une matrice creuse et d'une matrice de rang fini, on peut obtenir un produit matrice vecteur en moins de  $N^2$  opérations si le nombre  $B$  et le nombre  $P$  associés ont une croissance plus petite que  $N$ .

### 2.1.2 Matrices associées à des opérateurs à noyaux

Considérons une matrice de la forme

$$Z_{i,j} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} K(x-y) f_i(x) f_j(y) d\Gamma(x) d\Gamma(y)$$

où les fonctions  $f_i(x)$  sont à supports localisés.  $K(x, y) = K(x - y)$  est un noyau dont on suppose ici qu'il ne dépend que de la différence entre  $x$  et  $y$ . C'est une fonction très régulière en dehors de la diagonale  $x = y$  et admettant une singularité (intégrable) sur cette même diagonale. Ce genre de noyau est connu sous le nom de noyau de Schwartz.

Introduisons un découpage de  $\Gamma$  en  $Q$  morceaux  $\Gamma_q, q = 1, \dots, Q$  disjoints. Pour chaque morceau de surface, on choisit un centre  $c^q$  et on suppose que la distance de chaque morceau à  $c^q$  est bornée par une taille maximale  $|d|$

$$\max_{q=1, \dots, Q} \sup_{x \in \Gamma_q} |x - c^q| < |d|^Q = |d|$$

Maintenant, choisissons  $x$  sur  $\Gamma_q$  et  $y$  sur  $\Gamma_{q'}$  écrivons la différence  $x - y$  sous la forme

$$x - y = (c^q - c^{q'}) + (x - c^q) + (c^{q'} - y) = D + d_x + d_y$$

Si on fait l'hypothèse que la distance de centre à centre, soit  $|D|$  est strictement plus grande que  $\eta$  fois  $|d|$  avec  $\eta$  plus grand que 2, on voit facilement que  $x - y$  est uniformément minorée pour  $x$  dans  $\Gamma_q$  et  $y$  dans  $\Gamma_{q'}$ .

Mieux, l'argument de  $K$  peut toujours s'écrire comme la somme de trois composantes  $D + d_x + d_y$  avec  $(D, d_x, d_y) \in \Omega_{\eta, |d|}$  :

$$\Omega_{\eta, |d|} = \{ (D, d_x, d_y), |d_x| < |d|, |d_y| < |d|, |D| > \eta|d| \}$$

Sur cet ensemble, le noyau  $K(D + d_x + d_y)$  peut être considérée comme une fonction de trois variables, régulière, et on peut utiliser la théorie de l'approximation:

il existe une suite de triplet de fonctions soit  $(T^p(D), u^p(d_x), w^p(d_y))$  tel que pour tout  $\epsilon$  petit et positif, on ait

$$(32) \quad \sup_{\Omega_{\eta, |d|}} \left| K(D + d_x + d_y) - \sum_{p=1}^P T^p(D) u^p(d_x) w^p(d_y) \right| \leq \epsilon$$

pour  $P$  assez grand. Ainsi, avec une précision  $\epsilon$ , on aura

$$(33) \quad K(x, y) \approx \sum_{p=1}^P T^p(c^q - c^{q'}) u^p(x - c^q) w^p(-y + c^{q'})$$

C'est ce genre de formule que l'on veut utiliser pour accélérer le produit matrice vecteur. La difficulté est qu'elle n'est valable que lorsque les points d'intégrations  $x$  et  $y$  sont suffisamment éloignés.

L'idée est d'utiliser un découpage de l'intégrale double selon  $\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} = \sum_{q, q'} \int_{\Gamma_q} \int_{\Gamma_{q'}}$  et de séparer les termes de la double somme en deux parties selon que le critère de séparation est vérifié ou pas. On introduit donc une partition des paires de morceaux de surface en deux ensembles : soit

$$N^Q = \{(q, q') / |c_q - c_{q'}| \leq \eta|d|\}$$

$$F^Q = \{(q, q') / |c_q - c_{q'}| > \eta|d|\}$$

(les lettres  $N$  et  $F$  sont pour Near et Far selon la terminologie anglaise couramment utilisée) et on découpe la matrice selon

$$\begin{aligned} Z_{i,j} &= \left( \sum_{(q,q') \in N^Q} Z^{q,q} \right)_{i,j} + \left( \sum_{(q,q') \in F^Q} Z^{q,q'} \right)_{i,j} \\ Z_{i,j} &= Z_{i,j}^{near} + Z_{i,j}^{far}, \end{aligned}$$

avec

$$\left( Z^{q,q'} \right)_{i,j} = \int_{\Gamma_q} \int_{\Gamma_{q'}} K(x, y) f_i(x) f_j(y) d\Gamma(x) d\Gamma(y).$$

On suppose que les  $f_i(x)$  ont leur support entièrement localisé dans une boule de rayon beaucoup plus petit que le diamètre des morceaux de surface. Ce support est, pour donner un exemple, constitué de deux triangles d'une triangulation de  $\Gamma$  (cas des éléments finis utilisés en électromagnétisme). Cela entraîne que la plupart des fonctions de base ont leur support qui n'intersecte qu'un seul morceau de surface  $\Gamma_q$ . Les autres, situées à la périphérie des morceaux n'intersectent que deux voire exceptionnellement trois ou quatre morceaux d'indice voisin. Par voie de conséquence, de nombreux termes de la matrice proche  $Z_{i,j}^{near}$  vont s'annuler, en fait tout ceux dont les fonctions de base  $f_i(x)$  et  $f_j(y)$  ont des supports qui n'intersectent que des morceaux éloignés. Si on suppose la répartition uniforme, il est facile de se convaincre que la matrice des interactions proches admet approximativement  $B = N/Q$  éléments non nuls par ligne: c'est une valeur par défaut mais qui nous suffira pour notre propos. La matrice proche est donc une matrice creusée avec un  $B$  approximativement égal à  $N/Q$ .

Passons ensuite à la matrice des interactions éloignées. Pour cette matrice, on peut utiliser l'approximation que nous avons écrite précédemment. En substituant au noyau la série composée des  $P$  termes (33), on obtient avec une précision  $\epsilon$

$$\begin{aligned} \left( Z^{q,q'} \right)_{i,j} &\approx \\ \sum_{p=1}^P T^p(c^q - c^{q'}) &\int_{\Gamma_q} w^p(x - c^q) f_i(x) d\Gamma(x) \int_{\Gamma_{q'}} w^p(y - c^{q'}) f_j(y) d\Gamma(y) \end{aligned}$$

et l'approximation apparaît comme une matrice de rang fini. Par rapport à l'algorithme présenté dans la section précédente, la situation est un peu plus compliquée car on a tout une somme de matrices de rang fini à prendre en compte.

### 2.1.3 Produit matrice vecteur rapide

Si  $I = I_i, 1 \leq i \leq N$  est un vecteur donné, le produit matrice vecteur  $U = ZI$  s'effectuera selon l'algorithme

- Prise en compte de la matrice proche

$$U = Z^{near} I$$

- Regroupement par morceaux:

pour  $q = 1, \dots, Q$ ,

$$\mu_p^q = \int_{\Gamma_q} w^p(c^q - y) \left\{ \sum_{j/f_j \neq 0 \text{ sur } \Gamma_q} I_j f_j(y) \right\} d\Gamma(x), \quad p = 1, \dots, P.$$

- Translation des P informations de centre à centre

$$\nu_p^q = \sum_{q', (q, q') \in F^Q} T^p(c^q - c^{q'}) \mu_p^{q'}, \quad q = 1, \dots, Q, \quad p = 1, \dots, P$$

- Ventilation du centre de chaque morceau vers les degrés de liberté:

$$U_i = U_i + \sum_{q, f_i \neq 0 \text{ sur } \Gamma_q} \sum_{p=1}^P \nu_p^q \int_{\Gamma_q} w^p(x - c^q) f_i(x) d\Gamma(x).$$

Pour calculer la complexité de cet algorithme, on compte de la manière suivante:

- la prise en compte de la matrice proche donne un nombre d'opérations proportionnel à  $BN$  soit  $N^2/Q$  d'après nos hypothèses d'équirépartition.
- L'étape de regroupement met en jeux pour chaque morceau  $q$  et chaque information  $p$  une sommation sur les indices  $j$  du courant dont le support intersecte  $\Gamma_q$ . Il y a environ  $N/Q$  tels indices  $j$  et donc  $N/Q$  termes dans chaque somme. Si la fonction de base est fixée, le calcul de l'intégrale implique un nombre fini d'opérations. On a donc une complexité de  $PQ \times N/Q = NP$ .
- L'étape de translation nécessite un nombre proportionnel à  $PQ$  fois le nombre moyen de morceaux éloignés d'un morceau donné. Ce nombre est très voisin du nombre total de morceaux d'où une complexité en  $PQ^2$ .
- L'étape de ventilation est la transposée de l'étape de regroupement. On a encore un nombre d'opérations proportionnel à  $NP$ .

Cette petite analyse permet de donner un temps de calcul de la forme

$$T \approx c_1 \frac{N^2}{Q} + c_2 PQ^2 + c_3 NP$$

Pour aller plus loin, il faut faire intervenir la façon dont  $P$  varie en fonction de  $Q$ . On fait ici l'hypothèse que  $P$  varie comme la plus grande aire des morceaux de surface. On peut le supposer de la forme

$$P \approx C_1 \max_Q \text{Aire}(Q) \approx C_1 \text{Aire}(\Gamma)/Q$$

Si l'on suppose de plus que le nombre de degrés de liberté  $N$  tend vers l'infini comme la surface de  $\Gamma$  on a

$$P \approx C_2 \frac{N}{Q}$$

(ces hypothèses seront vérifiées pour les noyaux de l'électromagnétisme et pour des maillages à nombre de points par longueur d'onde fixé), on a alors ( $C = C_1 C_2$ )

$$T \approx c_1 \frac{N^2}{Q} + c_2 C Q N + c_3 C N^2 / Q,$$

dont le minimum est atteint pour

$$Q = \frac{\sqrt{c_1 + C c_3}}{\sqrt{c_2 C}} N^{1/2},$$

avec un temps associé de

$$T \approx \left( 2\sqrt{c_1 + C c_3} \sqrt{c_2 C} \right) N\sqrt{N},$$

et le temps de calcul est en  $N\sqrt{N}$ : on a gagné un facteur un demi sur la complexité!

Concernant la place mémoire nécessaire, outre la matrice des interactions proches qui est de taille  $N^2/Q$  donc proportionnelle à  $N^{3/2}$ , il faut également ajouter la place nécessaire aux termes de translations (les  $T^p(c^q - c^{q'})$  qui sont aux nombres de  $PQ^2 = CNQ = CN^{3/2}$ . On aboutit ainsi à une taille mémoire qui varie également comme  $N^{3/2}$ . Nous n'avons pas ajouté les informations relatives aux fonctions  $u_p$  et  $w_p$  car celles-ci sont explicites dans les applications pour l'électromagnétisme.

Ceci termine notre présentation de la méthode multipôles<sup>1</sup>. On voit qu'elle est assez générale et peut s'appliquer dans beaucoup de situations. Une des difficultés est de trouver le bon développement pour un noyau donné. C'est ce que nous nous proposons de faire pour les matrices EFIE et CFIE qui nous intéressent ici.

---

<sup>1</sup>Le terme multipôle provient de l'interprétation en termes de monopole, dipole, quadrupole, ... des fonctions  $u_p$  et  $w_p$  qui interviennent dans la série (33) lorsque  $K$  est le noyau de la l'électrostatique  $\frac{1}{4\pi|x-y|}$

## 2.2 Formules FMM pour la EFIE, MFIE et CFIE

### 2.2.1 Rappel des formules multipolaires classiques

La base des formules multipolaires pour l'électromagnétisme est maintenant bien connue, [7], [8], [3]. Elle se décompose en deux étapes. Une première phase consiste à trouver un développement de la forme de la forme (32) où la sommation sur  $p$  est remplacée par une intégrale sur les points de la sphère unité. On obtient finalement le développement en somme finie recherché après avoir discrétisé cette intégrale.

Le point de départ est une formule d'addition dite de Gegenbauer pour le noyau  $\frac{e^{ikr}}{ikr}$ . On a si  $d$  et  $D$  sont deux vecteurs de l'espace avec  $|D| > |d|$ ,  $d = |d| \hat{d}$ ,  $D = |D| \hat{D}$ ,

$$(34) \quad \frac{e^{ik|d+D|}}{ik|d+D|} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) h_n^{(1)}(k|D|) j_n(k|d|) P_n(\hat{d} \cdot \hat{D}),$$

la série étant uniformément convergente sur tout compact de  $\{(d, D), |D| > |d|\}$ . En particulier on peut la dériver sur cet ensemble. Cette formule fait intervenir toute une flopée de fonctions spéciales à savoir

- $P_n$ , le polynome de Legendre d'ordre  $n$ ,
- $j_n$ , la fonction de Bessel sphérique d'ordre  $n$ ,
- $h_n^{(1)} = j_n + iy_n$ , la fonction de Hankel sphérique d'ordre  $n$  et de première espèce,  $y_n$  étant la fonction de Neumann sphérique d'ordre  $n$ .

Pour une définition précise de ces fonctions, nous renvoyons le lecteur à [5], [8] par exemple.

Le second ingrédient est la formule de Funk-Hecke qui s'écrit

$$(35) \quad \frac{4\pi}{i^n} j_n(k|d|) P_n(\hat{D} \cdot \hat{d}) = \int_{S^2} P_n(\hat{D} \cdot \hat{s}) e^{-ikd \cdot \hat{s}} d\sigma(\hat{s}),$$

où  $S^2$  est la sphère unité de l'espace tridimensionnel,  $\hat{s}$  le point courant,  $d\sigma(\hat{s})$  la mesure superficielle sur la sphère. En rapprochant (35) de (34), on arrive à

$$(36) \quad \frac{e^{ik|d+D|}}{ik|d+D|} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) h_n^{(1)}(k|D|) \int_{S^2} P_n(\hat{D} \cdot \hat{s}) e^{-ikd \cdot \hat{s}} d\sigma(\hat{s}).$$

La première étape de l'approximation va consister à tronquer la série infinie; pour une précision  $\epsilon$  fixée, on choisit un nombre  $L$  tel que

$$(37) \quad \frac{e^{ik|d+D|}}{ik|d+D|} = \sum_{n=0}^L (-1)^n (2n+1) h_n^{(1)}(k|D|) j_n(k|d|) P_n(\hat{d} \cdot \hat{D}) \pm \epsilon$$

Après utilisation de (35) on obtient l'approximation

$$(38) \quad \frac{e^{ik|d+D|}}{ik|d+D|} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^L i^n (2n+1) h_n^{(1)}(k|D|) \int_{S^2} P_n(\hat{D} \cdot \hat{s}) e^{-ikd \cdot \hat{s}} d\sigma(\hat{s}) \pm \epsilon.$$

On fait commuter la sommation avec l'intégrale, ce qui est loisible car la somme est finie. On peut donc écrire

$$(39) \quad \frac{e^{ik|d+D|}}{ik|d+D|} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} T^L(\hat{s}, D) e^{-ikd \cdot \hat{s}} d\sigma(\hat{s}) \pm \epsilon,$$

avec

$$(40) \quad T^L(\hat{s}, D) = \sum_{n=0}^L i^n (2n+1) h_n^{(1)}(k|D|) P_n(\hat{D} \cdot \hat{s}).$$

Si l'on pose  $d = d_x + d_y$ , on voit immédiatement que l'on a

$$(41) \quad \frac{e^{ik|d_x+d_y+D|}}{ik|d_x+d_y+D|} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} T^L(\hat{s}, D) e^{-ikd_x \cdot \hat{s}} e^{-ikd_y \cdot \hat{s}} d\sigma(\hat{s}) \pm \epsilon.$$

Cette expression est de la forme (32), à ceci près qu'une intégrale est substituée à une somme finie. Pour ce ramener à la forme recherchée, on doit discrétiser l'intégrale; on choisit  $P$  points  $\hat{s}_p$  de quadrature sur la sphère  $S^2$  et un ensemble  $w_p$  de poids tels que

$$\int_{S^2} f(\hat{s}) d\sigma(\hat{s}) = \sum_{p=1}^P f(\hat{s}_p) w_p \pm \epsilon_{quad}$$

On obtient finalement

$$(42) \quad \frac{e^{ik|d_x+d_y+D|}}{ik|d_x+d_y+D|} = \frac{1}{4\pi} \sum_{p=1}^{\infty} w_p T^L(\hat{s}_p, D) e^{-ikd_x \cdot \hat{s}_p} e^{-ikd_y \cdot \hat{s}_p} \pm (\epsilon + \epsilon_{quad}).$$

qui est bien de la forme requise.

On peut appliquer cette formule à la matrice (18) associée à la EFIE, on se donne deux points  $x, y$ , deux centres  $c_x$  et  $c_y$ , on écrit

$$(43) \quad x - y = [(x - c_x) - (y - c_y)] + [c_y - c_x] = d + D = d_x + d_y + D$$

et on suppose

$$(44) \quad |x - c_x| + |y - c_y| \leq \eta |c_y - c_x| < |c_y - c_x|$$

pour un certain  $\eta$  positif et plus petit que 1.

On obtient alors l'approximation

$$(45) \quad \frac{k \exp ik|x - y|}{4\pi|x - y|} \approx \frac{k^2}{(4\pi)^2} \int_{S^2} iT^L(\hat{s}, c_y - c_x) e^{-ik(x-c_x)\cdot\hat{s}} e^{+ik(y-c_y)\cdot\hat{s}} d\sigma(\hat{s}).$$

Comme nous l'avons dit, on montre qu'il est loisible de dériver ces formules. En particulier, si  $\phi$  est un champ de vecteur, on a également la formule

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_y \frac{\exp ik|x - y|}{4\pi|x - y|} \wedge \phi(y) \approx \\ \frac{k^2}{(4\pi)^2} \int_{S^2} iT^L(\hat{s}, c_y - c_x) (i\hat{s} \wedge \phi(y)) e^{-ik(x-c_x)\cdot\hat{s}} e^{+ik(y-c_y)\cdot\hat{s}} d\sigma(\hat{s}). \end{array} \right.$$

Cette formule peut être utilisée, après discrétisation sur la sphère pour appliquer l'algorithme multipôles à la matrice MFIE (21).

Une autre formule intéressante fait intervenir le tenseur dyadique de Maxwell. Comme

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( Id_{3 \times 3} + \frac{1}{k^2} \nabla_x \otimes \nabla_x \right) \phi(y) e^{-ik(x-c_x)\cdot\hat{s}} = \\ (Id_{3 \times 3} - \hat{s} \otimes \hat{s}) \phi(y) e^{-ik(x-c_x)\cdot\hat{s}} = (\hat{s} \wedge (\phi(y) \wedge \hat{s})) e^{-ik(x-c_x)\cdot\hat{s}}, \end{array} \right.$$

on obtient

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( Id_{3 \times 3} + \frac{1}{k^2} \nabla_x \otimes \nabla_x \right) \frac{k \exp ik|x - y|}{4\pi|x - y|} \cdot \phi(y) \approx \\ \frac{k^2}{(4\pi)^2} \int_{S^2} iT^L(\hat{s}, c_y - c_x) (\hat{s} \wedge (\phi(y) \wedge \hat{s})) e^{-ik(x-c_x)\cdot\hat{s}} e^{+ik(y-c_y)\cdot\hat{s}} d\sigma(\hat{s}). \end{array} \right.$$

Cette formule est le point de départ pour effectuer un calcul multipolaires plus rapide pour la EFIE (calcul à deux composantes).

Les deux derniers points à préciser est le choix du  $L$  nécessaire à une "bonne" approximation (nombre de multipôles) et le choix de la "bonne" quadrature sur la sphère unité. C'est l'objet des deux sections suivantes

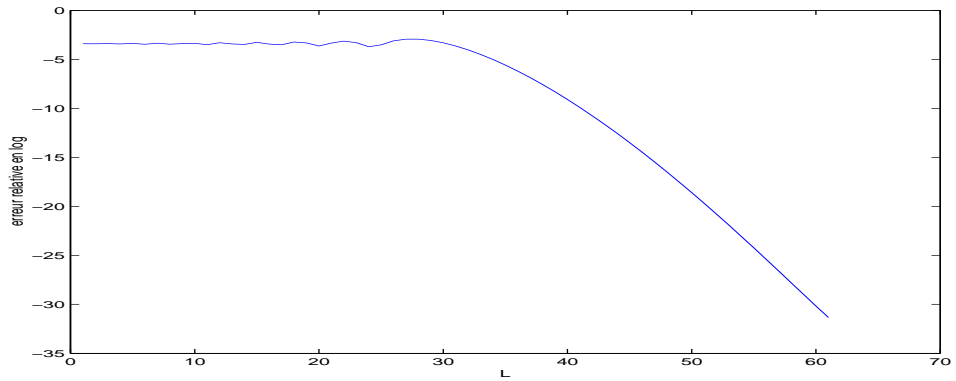


Figure 1: Module de l'erreur relative en fonction de  $L$

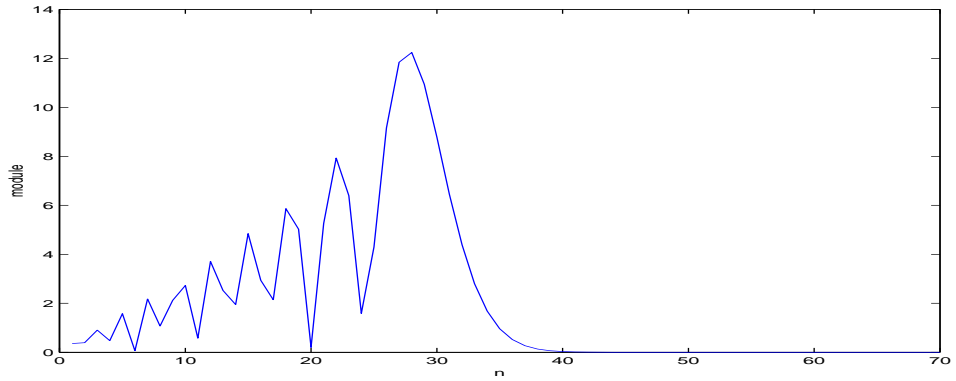


Figure 2: Module de  $(2n + 1)j_n(|d|)$  pour  $|d| = 30$  en fonction de  $n$

### 2.2.2 Analyse d'erreur lors de la troncature des séries

Nous commençons par illustrer ce qui se passe lors de la troncature de la série (34) par un exemple qui est assez significatif de la situation générale (on a repris cet exemple de la thèse de Darve). On choisit  $|d| = 30$ ,  $|D| = 60$  et  $\hat{D} \cdot \hat{d} = -1$  (de telle sorte que  $(-1)^n P_n(\hat{D} \cdot \hat{d}) = 1$ ) et on trace l'erreur relative en fonction du  $L$  retenu. Les résultats sont montrés sur la figure 1. On voit que tout d'abord (pour une trentaine de termes environ), il n'y a pas de convergence du tout, puis apparaît une zone où la décroissance est assez rapide, exponentielle apparemment. Sur une deuxième figure (Figure 2), est représenté comment varie chacun des termes  $(2n + 1)j_n(|d|)$  et  $|h_n^{(1)}(|D|)|$  en fonction de  $n$ . Le point essentiel à remarquer est que les termes en  $(2n + 1)j_n(|d|)$  commencent par osciller puis tendent brusquement vers 0 à

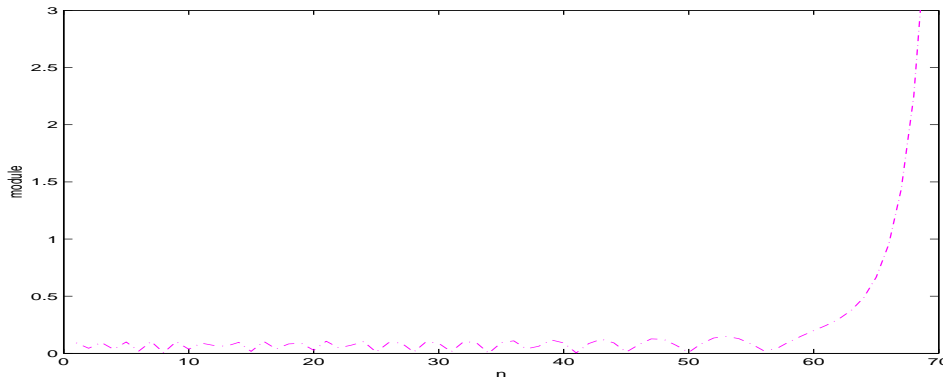


Figure 3: Module de  $y_n(|D|)$  pour  $|D| = 60$  en fonction de  $n$

partir de  $n \approx 30 = |d|$ . Les termes  $|h_n^{(1)}(|D|)|$  (cf figure 3) explosent lorsque  $n$  dépasse un entier un peu plus grand que  $60 = |D|$ . Ainsi, la série commence par ajouter des termes qui oscillent sans qu'il n'y ait convergence; puis, la convergence est assez brutale lorsque  $|(2n + 1)j_n(d)|$  est très petit. Enfin les derniers termes, produit de termes très petits et de termes très grands, ajoutent une contribution qui reste encore petite. Une analyse asymptotique montre en effet que ce produit se comporte comme une série géométrique de raison  $\frac{|d|}{|D|}$ .

Nous retiendrons de cet exemple que le nombre de termes que l'on doit retenir est toujours plus grand que  $|d|$ . Le nombre que l'on doit rajouter dépend de la précision que l'on veut obtenir.

Dans la littérature on trouve de nombreuses formules empiriques. Par exemple Coifman et Greengard, [3] utilisent

$$(49) \quad L = L(\epsilon_r(C), |d|) = |d| + C \log(|d| + \pi)$$

avec  $C = 5$  pour une précision relative de  $10^{-6}$ . Song et al., [14] confirment ce résultat et obtiennent également  $10^{-1}$  d'erreur relative lorsque  $C = 1$  et  $10^{-3}$  lorsque  $C = 3$ . Darve utilise  $C = 2.25$  dans le cadre de ses applications numériques. Ces résultats ne sont sûrement valables que pour une plage finie (mais suffisante en pratique).  $1 \leq |d| \leq 100$  et  $\frac{|D|}{|d|}$  "assez grand".

Une étude récente a été réalisée par Quentin Carayol et Francis Collino qui montre que l'on a pour les grands  $|d|$

$$L(\epsilon_r, |D|) + \frac{1}{2} \sim |d| + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} |d|^{\frac{1}{3}} W \left( \frac{C \left(\frac{|D|}{|d|}\right) |d|}{\epsilon_r^2} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad |d| \text{ grand}$$

avec  $\epsilon_r$  égale à la précision relative, c.à.d.  $\epsilon|d + D|$ , et  $W$  la fonction de Lambert

$$(50) \quad W(t)e^{W(t)} = t.$$

Comme  $W(t) \sim \log(\frac{t}{\log t})$ ,  $t$  pour  $t$  grand,  $L - |d|$  croît comme  $(|d| \log^2 |d|)^{1/3}$ , lui même négligeable devant  $|d|$ .

Les formules (46) et (48) n'ont pas donné lieu à de nombreuses d'études. Le choix

$$(51) \quad L = L(\epsilon_r, |D|) + 2$$

semble nécessaire pour la même précision sur ces approximations (il faut au moins rajouter deux termes pour tenir compte de la dérivation).

Il est remarquable de voir que ces approximations sont uniformément valables en  $D$ , toutefois il est impératif en pratique de ne pas prendre  $D$  trop petit car on est alors confronté au problème de précision machine; pour  $D$  fixé les fonctions de translation explosent en effet violemment lorsque  $D$  tend vers 0 pour un  $L$  fixé (explosion plus qu'exponentielle). Or, si l'on accroît la précision  $\epsilon_r$  requise, on doit prendre des  $L = L(\epsilon_r)$  de plus en plus grands et, parallèlement, pour une précision machine donnée, on ne peut manipuler des  $T_L(D, \hat{s})$  que pour des  $|D|$  plus grands qu'un certain seuil dépendant du  $L$ . On conclut que plus la précision requise est grande et plus grand est le  $|D|$  en deçà duquel on ne peut convenablement utiliser l'approximation. C'est le phénomène de rupture, cf. [7] par exemple. Ce phénomène n'est pas trop grave dans la version à un seul niveau car nous avons vu que la taille de chaque morceau croissait avec la taille de l'obstacle. Il est plus ennuyeux pour la version multiniveaux car on utilise alors de tous petits morceaux. Néanmoins, tous ces algorithmes vont s'avérer efficaces si l'on recherche des erreurs dans la plage  $[10^{-3}, 10^{-1}]$ .

### 2.2.3 Points de quadrature sur la sphère

Le problème est d'intégrer numériquement des fonctions de type

$$(52) \quad \hat{s} \longrightarrow F(\hat{s}) = T^L(D, \hat{s})e^{id \cdot \hat{s}}$$

avec  $d$  et  $D$  donnés  $|d| \leq \eta|D|$ ,  $T^L$  donnée dans (40) et enfin

$$(53) \quad L = L(\epsilon_r, |d|)$$

qui permet d'obtenir une précision relative de  $\epsilon_r$ . Il nous faut donc trouver une "bonne" règle de quadrature, assez précise pour discrétiser ces intégrales,

et qui s'appuie sur suffisamment peu de points pour rendre la méthode multipôles efficace.

La technique nécessite de faire un détour par les fonctions harmoniques sphériques. Ces fonctions jouent le rôle des fonctions trigonométriques pour les fonctions du cercle unité. Ce sont celles utilisées pour calculer les orbitales en mécanique quantique. Leur intérêt ici est que notre fonction se révèle être très bien approchée par une combinaison linéaire finie de fonctions harmoniques sphériques et que l'on sait construire une quadrature efficace pour ces fonctions.

Soit  $\hat{s}$  un point courant sur la sphère unité. On note  $\theta$  et  $\varphi$  les angles en coordonnées sphériques habituelles. Si  $n, m$  sont deux entiers,  $n \geq 0$  et  $|m| \leq n$ , on construit une famille de fonctions doublement indicées par  $m$  et  $n$  notée  $Y_n^m(\hat{s})$

$$Y_n^m(\hat{s}) = Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

qui forme une base orthonormale pour les fonctions de carré intégrable sur la sphère:

$$\int_{S^2} Y_n^m(\hat{s}) \overline{Y_p^q(\hat{s})} d\sigma(\hat{s}) = \delta_m^q \delta_n^p$$

Les fonctions  $P_n^m(t)$  sont les fonctions de Legendre modifiées

$$P_n^m(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}$$

avec  $P_n(t)$  le polynôme de Legendre d'ordre  $n$ .

Une combinaison linéaire finie de la forme

$$\sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^{+n} \alpha_{n,m} Y_n^m(\hat{s})$$

est appelée une fonction harmonique de degré  $L$  (penser aux polynômes trigonométrique pour le cas du cercle). On va montrer que la fonction  $F(\hat{s})$  définie en (52) est "presque" une fonction harmonique dont le degré est très précisément connu. La démonstration repose sur les points suivants

- Les fonctions  $\hat{s} \rightarrow (2n+1)P_n(\hat{D} \cdot \hat{s})$  pour  $n \leq L$  sont des fonctions harmoniques de degré inférieur ou égal à  $L$

On a en effet le théorème d'addition

$$(2n+1)P_n(\hat{D} \cdot \hat{s}) = 4\pi \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\hat{s}) \overline{Y_n^m(\hat{D})}$$

et en fait chaque fonction est exactement harmonique de degré  $n$  avec  $n \leq L$ .

- La fonction  $\hat{s} \rightarrow T^L(D, \hat{s})$  est une fonction harmonique de degré exactement  $L$

Utilisant la formule (40) donnant  $T^L$ , on se ramène à une somme finie de termes de la forme

$$\hat{s} \rightarrow (2n+1)P^n(\hat{D} \cdot \hat{s})e^{id \cdot \hat{s}}.$$

avec  $n \leq L$  et le point précédent s'applique.

- Pour une précision  $\epsilon$  donnée et un vecteur  $d$  fixé, on peut approcher la fonction  $\hat{s} \rightarrow e^{-id \cdot \hat{s}}$  par une fonction harmonique de degré  $\nu(\epsilon, |d|)$  que l'on sait calculer précisément.

Ce point repose sur la formule de Jacobi-Anger

$$e^{-id \cdot \hat{s}} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^n j_n(|d|) Y_n^m(\hat{s}) Y_n^m(\hat{d})$$

Une étude précise de la série tronquée montre que l'on a

$$\left| e^{-id \cdot \hat{s}} - 4\pi \sum_{n=0}^{\nu(\epsilon, |d|)} \sum_{m=-n}^n (-i)^n j_n(|d|) Y_n^m(\hat{s}) Y_n^m(\hat{d}) \right| \leq \epsilon$$

avec

$$\nu(\epsilon, |d|) + \frac{1}{2} \approx |d| + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} |d|^{\frac{1}{3}} W\left(\frac{|d|}{6\epsilon^2}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad |d| \geq 1$$

où  $W$  est la fonction de Lambert définie en (50).

- le produit de deux fonctions harmoniques de degré respectif égal à  $L$  et  $N$  est une fonction harmonique de degré  $L+N$

On sait en effet qu'il existe des nombres  $\alpha_{l,m,p,q}^{r,t}$  tels que

$$Y_n^m(\hat{s}) Y_q^p(\hat{s}) = \sum_{r=0}^{n+p} \sum_{t=-n}^n \alpha_{l,m,p,q}^{r,t} Y_r^t(\hat{s})$$

La formule donnant les coefficients  $\alpha$  est donnée dans [8].

- La fonction  $\hat{s} \rightarrow T^L(D, \hat{s})e^{id\hat{s}}$  peut se décomposer suivant

$$T^L(D, \hat{s})e^{id\hat{s}} = \sum_{n=0}^{L+\nu(\epsilon, |d|)} \sum_{m=-n}^n C_m^n(D, d)Y_m^n(\hat{s}) + r$$

avec

$$|r| \leq \epsilon \max_{\hat{s} \in S^2} |T^L(D, \hat{s})|$$

C'est une conséquence directe des points précédents.

..... En conclusion, on est ramené à chercher une formule de quadrature qui est exacte pour les fonctions harmoniques  $Y_n^m(\hat{s})$  de degré  $n$  inférieur à un  $N = L + \nu(\epsilon, |d|)$  donné. La méthode la plus utilisée consiste à construire un maillage cartésien dans le plan  $(\theta, \phi)$ . On a, avec un abus de notation sur  $f$

$$\int_{S^2} f(\hat{s}) d\sigma(\hat{s}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) d\varphi \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f(u, \varphi) d\varphi du$$

(on a posé  $u = \cos \theta$ ). Chaque fonction harmonique en  $\varphi$  étant en  $e^{im\varphi}$ , avec  $|m| \leq N$ , on choisit un maillage de  $M + 1$  points équidistribués en  $\varphi$  sur  $[0, 2\pi]$ . Soient  $T$  points  $u_t$ ,  $T$  poids  $w_t$ . On approche

$$\int_0^{2\pi} f(u, \varphi) d\varphi \approx \sum_{t=0}^T w_t \sum_{s=0}^M \frac{2\pi}{M+1} f(u_t, \frac{2\pi s}{M+1})$$

(les  $u_t, w_t$  sont pour l'instant indéterminés). Comme

$$\frac{1}{M+1} \sum_{s=0}^M e^{\frac{2i\pi ms}{M+1}} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

Si  $m$  non nul et si  $f(u, \varphi)$  varie en  $e^{im\varphi}$ , on obtient

$$\sum_{t=0}^T w_t \sum_{s=0}^M \frac{1}{M+1} f(u, \frac{2\pi s}{M+1}) du = 0 = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f(u, \varphi) dud\varphi$$

et la quadrature est exacte pour toutes les fonctions harmoniques de la forme  $Y_n^m(\theta, \varphi)$ ,  $m \neq 0$ , et cela indépendamment de la règle de quadrature sur  $u$ . Restent les harmoniques de la forme  $Y_n^0(\theta, \varphi)$ . On a

$$Y_n^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P^n(\cos \theta)$$

où l'on retrouve le polynôme de Legendre de degré  $n$ ,  $n \leq N$ . L'intégration numérique sur  $[-1, 1]$  d'un polynôme de degré plus petit que  $N$  peut se faire exactement en choisissant  $T = [N/2] + 1$  points de Gauss-Legendre  $u_t$ ,  $t = 1, \dots, T$  avec des poids  $w_k$  adéquats. Il suffit donc de choisir les points d'appui  $\theta_t$  avec  $\cos \theta_t = u_t$  pour réaliser l'intégration exacte.

Notre conclusion est qu'un maillage bien choisi de  $P = (N+1)([N/2]+1)$  points suffit pour réaliser une quadrature exacte des fonctions harmoniques sur la sphère unité. Une conséquence de ce résultat est d'établir la proportionnalité du nombre requis de points d'échantillonnage  $P$  avec la surface des morceaux que nous avons admise pour établir la complexité en  $N^{\frac{3}{2}}$  de l'algorithme multipôles. En effet, si  $|d|^Q$  est le plus grand diamètre des morceaux, on a

$$P \sim \frac{1}{2}(L(\epsilon_r, |d|^Q) + \nu(\epsilon, |d|^Q)^2),$$

et comme

$$L \sim |d|^Q, \nu(\epsilon, |d|^Q) \sim |d|^Q, |d|^Q \text{ grand},$$

on a

$$P \sim 2(|d|^Q)^2 \sim C_0 \max_q \text{Aire} \Gamma_q$$

et le résultat est établi.

*Remarque: Il est remarquable que le nombre de terme requis est pratiquement indépendant de la distance de centre à centre des morceaux: il ne dépend que de la taille maximale de chaque morceau.*

### 3 La méthode multiniveaux

De façon imagée, la méthode multipolaire multiniveaux procède à la manière d'un central téléphonique. L'information de départ est constituée d'un courant que l'on transforme en charges localisées en des points donnés (les points de Gauss du maillage de l'obstacle). L'information restituée est la valeur du potentiel dû à toutes les charges et évalués en ces mêmes points. Plutôt que de communiquer directement l'effet de chaque charge à tous les points (calcul en  $N^2$ ), les charges sont multiplexées aux centres de boîtes cubiques contenant les points de Gauss, puis l'information est transportée de centre à centre suivant une structure arborescente d'arbre octal (8 petites boîtes sont agrégées en une seule de taille double). L'information affectée

à chaque centre de boîte est constituée d'une fonction définie sur la sphère unité et échantillonnée en un nombre fini de points. Plus la taille de la boîte est grande, plus grand est le nombre d'échantillons. L'algorithme consiste à faire remonter l'information dans l'arbre jusqu'au niveau le plus haut puis à la démultiplexer par une formule ad hoc en redescendant dans l'arbre et en tenant compte de la contrainte que lors de cette descente, une boîte ne peut directement communiquer avec ses 26 voisines.

La méthode multiniveaux est présentée de manière claire depuis les travaux de thèse d'Eric Darve [7], [6]. Néanmoins, il nous a paru utile de donner une présentation quelque peu différente.

### 3.1 Description de la structure arborescente: les boîtes.

#### 3.1.1 Notion de boîtes. Empilement de boîtes.

La surface de l'objet diffractant est supposée maillée en triangles:  $\Gamma$  est réunion de triangles et on note  $\mathcal{T}_h$  la collection de tous les triangles:

$$(54) \quad \Gamma = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T.$$

La surface étant supposé bornée, on se donne une boîte cubique contenant  $\Gamma$  que l'on note  $B_0^0$

$$(55) \quad \Gamma \subset B_0^0, \quad B_0^0 = c_{B_0^0} + \left[ -\frac{D}{2}, +\frac{D}{2} \right]^3.$$

La taille de la boîte est alors  $D$  et son centre  $c_{B_0^0}$ .

À partir de cette première boîte, on construit toute une collection de boîtes de taille de plus en plus petite en effectuant des découpages successifs de chaque boîte en 8 boîtes de taille moitié et en rejetant systématiquement toute boîte ne contenant aucun triangle. Ceci suppose de définir la notion d'appartenance d'un triangle à une boîte. Pour cela, on choisit de privilégier le centre de gravité du triangle:

$$(56) \quad \text{si } T \in \mathcal{T}_h, \quad T \tilde{\in} B : G_T \in B, \quad (G_T \text{ centre de gravité de } T).$$

Cette succession de découpages induit une hiérarchie par niveaux de la totalité des boîtes. On pourra donc associer à chaque boîte un niveau qui permet de repérer à quel instant la boîte été créée. On notera  $lv(B)$  le niveau d'une boîte donnée et  $c_B$  son centre.

Plus précisément on obtiendra par tris successifs des centres de gravité des triangles l'empilement suivant:

- Au niveau  $\ell v = 0$ , on a une seule boîte :

$$(57) \quad \mathcal{B}^{\ell v=0} = \{B_0^0\}$$

- Au niveau  $\ell v = 1$ , on a au plus 8 boîtes :

$$(58) \quad \mathcal{B}^{\ell v=1} = \{B_1^1, B_2^1, \dots, B_{NB^1}^1\} \quad \text{où } NB^1 \leq 8.$$

On les obtient en divisant  $B_0^0$  en 8

$$(59) \quad B_0^0 = \bigcup_{\varepsilon=(\pm 1, \pm 1, \pm 1)} \left( c_{B_0^0} - \varepsilon \frac{D}{4} + \left[ -\frac{D}{4}, +\frac{D}{4} \right]^3 \right),$$

et en rejetant les boîtes sans triangles

- Au niveau  $\ell v = 2, \dots, Lv$ , on fait la même chose mais sur chaque boîte du niveau précédent.

Le nombre total de niveau est donc  $Lv$  et  $\mathcal{B}^{\ell v}$  est l'ensemble des boîtes d'un niveau donné. La collection complète est alors

$$(60) \quad \mathcal{B} = \bigoplus_{\ell v=0, \dots, Lv} \mathcal{B}^{\ell v}.$$

### 3.1.2 Notion de descendants, d'ascendants, de voisins et de voisins éloignés d'une boîte .

L'algorithme précédemment décrit permet de définir facilement la notion de descendant et d'ascendant d'une boîte. Dit rapidement, l'ascendant d'une boîte est la boîte de niveau supérieur dont elle est issue. Les descendants sont celles de niveau immédiatement inférieur qu'elle a engendrée :

$$(61) \quad \mathcal{D}(B) = \{b \in \mathcal{B}, b \subset B, \ell v(b) = \ell v(B) + 1\}$$

$$(62) \quad B = \text{Ascend}(b) \Leftrightarrow b \in \mathcal{D}(B)$$

On définit également la notion de boîte voisine. Si  $B$  est une boîte,  $B'$  une autre boîte. On dira que  $B'$  est voisine de  $B$  si elles sont de même niveau et si elles ont au moins un sommet commun.

Il est facile de voir qu'il y a au plus 27 boîtes voisines d'une boîte donnée: la boîte elle même et celles qui partagent avec elle une arête ou un sommet. On a donc

$$(63) \quad \mathcal{V}(B) = \left\{ B' \in \mathcal{B}, \ell v(B') = \ell v(B), \overline{B} \cap \overline{B'} \neq \emptyset \right\}.$$

On termine par la notion plus compliquée de voisins éloignés d'une boîte :

$$(64) \quad \mathcal{C}(B) = \{B' \in \mathcal{B}, \text{Ascend}(B') \in \mathcal{V}(\text{Ascend}(B)) \text{ et } B' \notin \mathcal{V}(B)\}$$

En gros, les voisins éloignés d'une boîte sont les boîtes de même niveau non voisines de  $B$  mais dont les deux ascendants sont voisins.

Pour chaque boîte, il y a au plus 189 boîtes voisines éloignées (27 fois  $8 - 27$  car les 27 voisins ont au plus 8 descendants et on doit enlever les 27 vrais voisins).

À partir de ces notions, il est facile de définir les ensembles des couples de boîtes voisines ou voisines éloignées à un niveau donné. On définit

$$(65) \quad \mathcal{V}^{\ell v} = \left\{ (B, B') \in \mathcal{B}^{\ell v} \times \mathcal{B}^{\ell v}, B \in \mathcal{V}(B') \right\},$$

$$(66) \quad \mathcal{C}^{\ell v} = \left\{ (B, B') \in \mathcal{B}^{\ell v} \times \mathcal{B}^{\ell v}, B \in \mathcal{C}(B') \right\},$$

(remarquez que la dissymétrie entre  $B$  et  $B'$  n'est qu'apparente puisque si  $B'$  est voisine (resp. voisine éloignée) de  $B$ ,  $B$  est voisine (resp. voisine éloignée) de  $B'$ .)

la propriété fondamentale que nous utiliserons par la suite est que

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } (B, B') \in \mathcal{V}^{\ell v}, \text{ alors } (b, b') \in \mathcal{D}(B) \times \mathcal{D}(B') \text{ entraine} \\ (b, b') \in \mathcal{V}^{\ell v+1} \text{ ou bien } (b, b') \in \mathcal{C}^{\ell v+1}. \end{array} \right.$$

Autrement dit, deux boîtes voisines ont tous leurs descendants respectifs voisins ou voisins éloignés.

## 3.2 Découpages induits par la structure de boîte.

### 3.2.1 Découpage arborescent sur $\mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h$ .

On a maintenant tous les éléments pour définir le découpage de  $\mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h$  adapté aux multipôles.

Si  $T$  est un triangle, à chaque niveau, son centre de gravité est localisé à l'intérieur d'une unique boîte. On peut écrire

$$(68) \quad T \in B_T^{Lv} \subset B_T^{Lv-1} \subset \dots \subset B_T^0 = B_0^0.$$

Maintenant, si  $(T, T')$  est une paire de triangles, on dira que  $(T, T')$  sont proches si chaque triangle appartient à deux boîtes voisines de niveau  $Lv$

(c.à.d. celui correspondant aux plus petites boîtes). On note  $\mathcal{N}_T$  l'ensemble des paires de triangles proches :

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}_T = \left\{ (T, T') \in \mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h, \left| \begin{array}{l} \exists (B, B') \in \mathcal{B}^{Lv} \times \mathcal{B}^{Lv}, \\ T \in B, T' \in B' \text{ et } B' \in \mathcal{V}(B) \end{array} \right. \right\} \\ \text{ou } \mathcal{N}_T = \left\{ (T, T') \in \mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h, (B_{T'}^{Lv}, B_T^{Lv}) \in \mathcal{V}^{Lv} \right\} \end{array} \right\}$$

On définira alors  $\mathcal{F}_T$ , ensemble des paires de triangles loins, comme le complémentaire de  $\mathcal{N}_T$  (deux triangles non proches sont considérés comme loins l'un de l'autre!)

$$(70) \quad \mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h = \mathcal{N}_T \oplus \mathcal{F}_T.$$

le signe  $\oplus$  désignant le caractère disjoint de la décomposition.

L'ensemble  $\mathcal{F}_T$  des paires de triangles éloignés peut lui-même être partitionné suivant le degré de proximité des triangles. On écrira

$$(71) \quad \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_T^{LV} \oplus \mathcal{F}_T^{LV-1} \oplus \dots \mathcal{F}_T^2$$

avec

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_T^{\ell v} = \left\{ (T, T') \in \mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h, \left| \begin{array}{l} \exists (B, B') \in \mathcal{B}^{\ell v} \times \mathcal{B}^{\ell v}, \\ T \in B, T' \in B' \text{ et } B' \in \mathcal{C}(B) \end{array} \right. \right\} \\ \text{ou } \mathcal{F}_T^{\ell v} = \left\{ (T, T') \in \mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h, (B_{T'}^{Lv}, B_T^{Lv}) \in \mathcal{C}^{Lv} \right\} \end{array} \right\}$$

Cette décomposition provient du fait que deux triangles éloignés sont nécessairement voisins pour un niveau assez grand (plus grand que 1 car toutes les boîtes de niveau 1 sont voisines). Or deux paires de boîtes voisines au niveau  $\ell v$  ne peuvent contenir que des paires de boîtes voisines ou bien voisines éloignées au niveau  $\ell v + 1$ . Quand les deux triangles ne sont pas voisins le processus doit s'arrêter à un certain niveau.

### 3.2.2 Découpage des matrices

Le découpage des paires de triangles va nous permettre de décomposer les matrices provenant des formulations éléments finis qui s'appuient sur une triangulation de  $\Gamma$ . La démarche est très générale, c'est pourquoi on a choisi de la présenter dans un cadre assez abstrait que l'on particularisera dans la suite.

On commence par rappeler les fonctions de base de Raviart-Thomas linéaires par triangle que l'on utilise. Celles-ci consistent en la collection des

$$(73) \quad (\phi_i)_{1 \leq i \leq N},$$

où  $i$  parcourt l'ensemble des arêtes de la triangulation (on suppose l'objet sans bord pour simplifier). À chaque arête  $A_i$  est ainsi associée une fonction de base. Celle-ci a son support qui coïncide avec les deux triangles qui s'appuient sur l'arête, soient  $T_{A_i}^+$  et  $T_{A_i}^-$ . On a

$$(74) \quad \phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - S_i^+}{2|T_{A_i}^+|} & \text{si } x \in T_{A_i}^+ \\ -\frac{x - S_i^-}{2|T_{A_i}^-|} & \text{si } x \in T_{A_i}^- \end{cases}$$

où  $S_i^\pm$  est le sommet de  $T_{A_i}^\pm$  opposé l'arête  $A_i$  et  $|T|$  est l'aire du triangle  $T$

Soit maintenant  $b(x, y; \phi, \phi')$  une fonction de 4 variables qui est bilinéaire en  $(\phi, \phi')$ . À partir de  $b$ , on construit la matrice

$$(75) \quad Z_{i,j} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} b(x, y, \phi_i(x), \phi_j(y)) d\Gamma(x) d\Gamma(y).$$

En utilisant la triangulation de  $\Gamma$ , on ramène l'assemblage de cette matrice à ce que l'on appelle couramment des matrices élémentaires

$$(76) \quad \begin{cases} Z_{i,j} = \sum_{(T,T') \in \mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h} \int_T \int_{T'} b(x, y, \phi_i(x), \phi_j(y)) dT(x) dT'(y) \\ = \sum_{(T,T') \in \mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h} Z_{i,j}^{T,T'}. \end{cases}$$

Les matrices élémentaires  $Z_{i,j}^{T,T'}$  sont très creuses car pour  $(T, T')$  fixé, seuls 9 termes sont non nuls (digression sans objet ici).

La partition de  $\mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h$  en  $\mathcal{N}_T \oplus \mathcal{F}_T$  nous permet de construire naturellement la décomposition

$$(77) \quad Z = Z^{near} + Z^{far},$$

avec

$$(78) \quad Z_{i,j}^{near} = \sum_{(T,T') \in \mathcal{N}_T} \int_T \int_{T'} b(x, y, \phi_i(x), \phi_j(y)) dT(x) dT'(y),$$

$$(79) \quad Z_{i,j}^{far} = \sum_{(T,T') \in \mathcal{F}_T} \int_T \int_{T'} b(x, y, \phi_i(x), \phi_j(y)) dT(x) dT'(y).$$

La partition de  $\mathcal{F}_T$  induit elle-même un découpage de la matrice  $Z^{far}$  suivant

$$(80) \quad Z^{far} = \sum_{\ell v=2}^{Lv} Z^{\ell v}, \quad Z_{i,j}^{\ell v} = \sum_{(T,T') \in \mathcal{F}_T^{\ell v}} \int_T \int_{T'} b(x, y, \phi_i(x), \phi_j(y)) dT(x) dT'(y)$$

ou encore

$$(81) \quad Z_{i,j}^{\ell v} = \sum_{(B,B') \in \mathcal{F}_B^{\ell v}} Z_{i,j}^{B,B'},$$

avec

$$(82) \quad Z_{i,j}^{B,B'} = \sum_{(T,T') \in B \times B'} \int_T \int_{T'} b(x, y, \phi_i(x), \phi_j(y)) dT(x) dT'(y).$$

### 3.3 Multiplication matrice vecteur via la FMM.

#### 3.3.1 Formule multipôle abstraite

Soient  $T$  et  $T'$  deux triangles appartenant à deux boîtes voisines éloignées  $B, B'$  de niveau  $\ell v$  donné. Si  $(x, y)$  sont deux points de  $T \times T'$ , on suppose que l'expression de  $b(x, y, \phi_i, \phi_j)$  est donnée par une formule du type

$$(83) \quad \begin{cases} b(x, y, \phi_i, \phi_j) = \\ \int_{S^2} T_{B,B'}(\hat{s}) \overline{\Pi_1(\hat{s}, \phi_i)} \Pi_2(\hat{s}, \phi_j) e^{-ik(x-c_B) \cdot \hat{s}} e^{ik(y-c_{B'}) \cdot \hat{s}} d\sigma(\hat{s}) \end{cases}$$

où

- $S^2$  est la sphère unité,  $\hat{s}$  est un point courant de  $S^2$ ,  $d\sigma(\hat{s})$  l'élément d'aire de  $S^2$ ,
- $T_{B,B'}(\hat{s})$  est une fonction à valeurs complexes régulière qui ne dépend de  $B$  et  $B'$  que par le truchement du vecteur  $c_B - c_{B'}$ ,
- $\Pi_1(\hat{s}, \phi)$  et  $\Pi_2(\hat{s}, \phi)$  sont des formes linéaires à valeurs complexes en  $\phi$  et  $C^\infty$  en  $\hat{s}$ .

On suppose cette formule valable pour tout  $(x, y)$  dans  $T \times T'$ .

Cette décomposition a plusieurs propriétés remarquables qui vont jouer un rôle important dans la suite

1. Les variables  $x$  et  $y$  sont maintenant séparées: on a, modulo une intégration sur la sphère, décomposé le noyau. On peut interpréter cette décomposition comme une décomposition spectrale de l'opérateur intégral associé.
2. La dépendance de cette décomposition par rapport aux boîtes est multiplicative par rapport au centre des boîtes.
3. La fonction ne dépendant que de  $c_B - c_{B'}$ , il n'existe qu'un nombre fini ( $\leq 316$ ) de telles fonctions pour un niveau donné. En effet, il est facile (enfin, pas trop difficile) de voir que la distance de centre à centre de deux boîtes voisines éloignées est de la forme

$$(84) \quad c_B - c_{B'} = (n_1 \hat{x} + n_2 \hat{y} + n_3 \hat{z}) \frac{D}{2^{\ell v}}$$

avec

$$(85) \quad (n_1, n_2, n_3) \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}^3 - \{-1, 0, 1\}^3$$

et  $7^3 - 3^3$  est égal à 316.

### 3.3.2 Multiplication matrice vecteur (cas singulier)

Soit  $I = (I_i)_{1 \leq i \leq N}$  un vecteur courant. On s'intéresse au calcul de

$$(86) \quad U^{far} = Z^{far} I \Leftrightarrow U_i^{far} = \sum_{j=1}^N Z_{i,j}^{far} I_j,$$

soit

$$(87) \quad U_i^{far} = \sum_{\ell v=2}^{Lv} \left( \sum_{j=1}^N Z_{i,j}^{\ell v} I_j \right) = \sum_{\ell v=2}^{Lv} U_i^{\ell v}.$$

On a plus précisément

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_i^{\ell v} = \\ \sum_{(B,B') \in \mathcal{C}_B^{\ell v}} \sum_{(T,T') \in B \times B'} \sum_j \left\{ \int_T \int_{T'} b(x, y, \phi_i(x), \phi_j(y)) dT(x) dT'(y) \right\} I_j. \end{array} \right.$$

On va inverser les sommations. On procède de la manière suivante. Si  $A_i$  est une arête associée au degrés de liberté  $i$ , toutes les intégrales sont nulles à l'exception de celles relatives à  $T = T_{A_i}^+$  et  $T = T_{A_i}^-$ . Maintenant  $T$  étant fixé, son centre de gravité appartient à une unique boîte de niveau  $\ell v$  soit  $B_T^{\ell v}$  et on a

$$(89) \quad \sum_{(B,B') \in \mathcal{C}_B^{\ell v}} \sum_{(T,T') \in B \times B'} (\dots) = \sum_{T=T_{A_i}^\pm} \sum_{B' \in \mathcal{C}(B_T^{\ell v})} \sum_{T' \in B'} (\dots).$$

En substituant l'ingrédient multipolaire, on arrive à l'expression

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_i^{\ell v} = \sum_{T=T_{A_i}^\pm} \int_T \int_{S^2} \overline{\Pi_1(\hat{s}, \phi_i(x))} e^{-ik(x-c_B)} \left( \sum_{B' \in \mathcal{C}(B_T^{\ell v})} T_{B,B'}(\hat{s}) \dots \right. \\ \left. \dots \left( \sum_{T' \in B'} \left( \int_{T'} e^{ik(y-c'_B) \cdot \hat{s}} \left( \sum_{j, A_j \subset \partial T'} \Pi_1(\hat{s}, \phi_j(y)) I_j \right) dT'(y) \right) \right) \right) d\sigma(\hat{s}) dT(x). \end{array} \right.$$

D'où un premier calcul "multipolaire"

- On boucle sur les niveaux : pour tous les niveaux  $\ell v \in \{Lv, Lv - 1, \dots, 2\}$

- on calcule les "far fields" : sur toute les boîtes de niveau  $\ell v$ , on forme

$$(91) \quad F^{B'}(\hat{s}) = \sum_{T' \in B'} \left( \int_{T'} e^{ik(y-c'_B) \cdot \hat{s}} \left( \sum_{j, A_j \subset \partial T'} \Pi(\hat{s}, \phi_j(y)) I_j \right) dT'(y) \right),$$

- on translate les boîtes voisines éloignées: sur toutes les boîtes de niveau  $\ell v$ , on écrit

$$(92) \quad N^B(\hat{s}) = \sum_{B' \in \mathcal{C}(B_T^{\ell v})} T_{B,B'}(\hat{s}) F^{B'}(\hat{s}),$$

- on reconstitue le "champ" en chaque degré de liberté

$$(93) \quad \begin{aligned} U_i^{\ell v} &= \sum_{T=T_{A_i}^\pm} \int_T \int_{S^2} \overline{\Pi(\hat{s}, \phi_i(x))} e^{-ik(x-c_B) \cdot \hat{s}} N^B(\hat{s}), \\ &\text{avec } B = B_T^{\ell v}, \end{aligned}$$

- on reconstitue enfin le champ lointain total

$$(94) \quad U_i^{far} = \sum_{\ell v=2}^{Lv} U_i^{\ell v}.$$

Maintenant, on peut utiliser l'emboîtement des boîtes : on remarque que

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{T' \in B'} \left( \int_{T'} e^{ik(y-c_{B'}) \cdot \hat{s}} \Pi_1(\hat{s}, \phi_j(y)) dT'(y) \right) = \\ \sum_{b' / Ascend(b')=B'} \sum_{T' \in b'} \left( \int_{T'} e^{ik(y-c'_b) \cdot \hat{s}} e^{ik(c_{b'}-c_{B'}) \cdot \hat{s}} \Pi_1(\hat{s}, \phi_j(y)) dT'(y) \right) \end{array} \right.$$

soit

$$(96) \quad F^{B'}(\hat{s}) = \sum_{b' / Ascend(b')=B'} e^{ik(c_{b'}-c_{B'}) \cdot \hat{s}} F^{b'}(\hat{s}).$$

Il y a donc une récurrence entre les champs  $F^B(\hat{s})$ .

De la même façon, on peut regrouper le calcul des quantités à intégrer : on définit

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{N}^B(\hat{s}) = N^B(\hat{s}), \text{ si } B \in \mathcal{B}^2 \text{ top niveau} \\ \tilde{N}^B(\hat{s}) = N^B(\hat{s}) + \tilde{N}^{Ascend(B)}(\hat{s}) e^{-ik(c_B-c_{Ascend(B)}) \cdot \hat{s}}, \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

Le vecteur  $U_i^{far}$  peut alors se calculer en une seule fois selon

$$(98) \quad U_i^{far} = \sum_{T=T^\pm(A_i)} \int_T \int_{S^2} \overline{\Pi_2(\hat{s}, \phi_i(x))} e^{-ik(x-c_{BT}) \cdot \hat{s}} \tilde{N}^{BT}(\hat{s}),$$

(il suffit d'injecter (97) dans (93) et d'utiliser le décalage sur les exponentielles). Ces remarques permettent de réécrire le premier algorithme selon :

- On calcule les "far fields" sur les boîtes  $B$  de plus petite taille (boîte de niveau  $Lv$ )

$$(99) \quad F^{B'}(\hat{s}) = \sum_{T' \in B'} \left( \int_{T'} e^{ik(y-c'_B) \cdot \hat{s}} \left( \sum_{j, A_j \subset \partial T'} \Pi_1(\hat{s}, \phi_j(y)) I_j \right) dT'(y) \right),$$

- on boucle sur les niveaux en remontant des plus petites boîtes vers les plus grosses : pour tous les niveaux  $\ell v \in \{Lv - 1, \dots, 2\}$  on calcule les “far fields” par regroupement de toutes les boîtes de niveau  $\ell v$

$$(100) \quad F^{B'}(\hat{s}) = \sum_{b' / \text{Ascend}(b')=B'} e^{ik(c_{b'} - c_{B'}) \cdot \hat{s}} F^{b'}(\hat{s}).$$

- pour tous les niveaux  $\ell v \in \{Lv - 1, \dots, 2\}$  on initialise les “near fields” de toutes les boîtes de niveau  $\ell v$  par translation des boîtes voisines éloignées:

$$(101) \quad \tilde{N}^B(\hat{s}) = \sum_{B' \in \mathcal{C}(B_T^{\ell v})} T_{B, B'}(\hat{s}) F^{B'}(\hat{s}),$$

- on effectue une nouvelle boucle sur les niveaux en remontant: pour tous les niveaux  $\ell v \in \{3, \dots, Lv\}$  on ré-assemble les “near fields” de toutes les boîtes de niveau  $\ell v$

$$(102) \quad \tilde{N}^B(\hat{s}) = \tilde{N}^B(\hat{s}) + \tilde{N}^{\text{Ascend}(B)}(\hat{s}) e^{-ik(c_B - c_{\text{Ascend}(B)}) \cdot \hat{s}}$$

- on reconstitue le “champ” à chaque degrés de liberté

$$(103) \quad U_i^{\ell v} = \sum_{T=T_{A_i}^{\pm}} \int_T \int_{S^2} \overline{\Pi_2(\hat{s}, \phi_i(x))} e^{-ik(x - c_{B_T^{\ell v}}) \cdot \hat{s}} \tilde{N}^{B_T^{\ell v}}(\hat{s})$$

Dans cet algorithme, on a pas précisé le maillage utilisé pour l' intégration numérique sur  $S^2$ . Ce maillage devra être adapté au niveau de la boîte considérée et des opérateurs d' interpolation et de filtrage doivent être utilisés pour passer d'un niveau à l'autre. Nous reviendrons sur ce point dans l'une des sections suivantes. Nonobstant cet ingrédient technique (et essentiel), cet algorithme est l'algorithme FMM ou fast multipole method.

### 3.3.3 Multiplication matrice vecteur (cas régulier)

Dans la section précédente, nous avons décrit un algorithme qui prenait en compte le fait que la décomposition du noyau à intégrer n'était valable que pour des boîtes suffisamment éloignées. Dans le cas où la décomposition est uniforme, on peut également construire un algorithme plus simple que l'on décrit ci-dessous.

On suppose maintenant que l'on a une formule du type

$$(104) \quad \left\{ \begin{array}{l} b^{reg}(x, y, \phi_i, \phi_j) = \\ \int_{S^2} \overline{\Pi_2(\hat{s}, \phi_i)} \Pi_1(\hat{s}, \phi_j) e^{-ikx \cdot \hat{s}} e^{iky \cdot \hat{s}} d\sigma(\hat{s}) \end{array} \right.$$

valable uniformément sur  $(x, y)$  dans  $B_0^0$ . Dans ce cas, la partie séparation partie proche, partie lointaine peut être évitée. Si  $Z^{reg}$  est la matrice

$$(105) \quad Z_{i,j}^{reg} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} b^{reg}(x, y, \phi_i(x), \phi_j(y)) d\Gamma(x) d\Gamma(y).$$

Le calcul  $Z^{reg}I$  peut se faire alors très simplement suivant

1. Faire sur toutes les boîtes de niveau  $Lv$

$$(106) \quad F^{B'}(\hat{s}) = \sum_{T' \in B'} \left( \int_{T'} e^{ik(y-c'_B) \cdot \hat{s}} \left( \sum_{j, A_j \subset \partial T'} \Pi_1(\hat{s}, \phi_j(y)) I_j \right) dT'(y) \right),$$

2. Faire sur tous les niveaux  $\ell v = Lv - 1, \dots, 0$ : faire sur toutes les boîtes de niveau  $\ell v$

$$(107) \quad F^{B'}(\hat{s}) = \sum_{b' / Ascend(b')=B'} e^{ik(c_{b'} - c_{B'}) \cdot \hat{s}} F^{b'}(\hat{s}).$$

3. Initialiser le “near field” de la plus grosse boîte

$$(108) \quad \tilde{N}^{B_0^0}(\hat{s}) = \tilde{F}^{B_0^0}(\hat{s})$$

4. Faire sur tous les niveaux  $\ell v = 1, \dots, Lv$ : faire sur toutes les boîtes de niveau  $\ell v$

$$(109) \quad \tilde{N}^B(\hat{s}) = \tilde{N}^B(\hat{s}) + \tilde{N}^{Ascend(B)}(\hat{s}) e^{-ik(c_B - c_{Ascend(B)}) \cdot \hat{s}}$$

5. Faire sur tous les degrés de liberté

$$(110) \quad U_i^{\ell v} = \sum_{T=T_{A_i}^{\pm}} \int_T \int_{S^2} \overline{\Pi_2(\hat{s}, \phi_i(x))} e^{-ik(x-c_{B_T L v}) \cdot \hat{s}} \tilde{N}_T^{B_T L v}(\hat{s})$$

Cet algorithme peut être utilisé pour calculer de manière rapide la far field d'un champ donné ou encore pour effectuer la produit matrice vecteur de la partie en  $\sin(r)/4\pi r$  du noyau de Green.

### 3.4 Application aux équations intégrales de l'électromagnétisme

Nous nous proposons dans cette section de spécifier la décomposition (83) qui est à la base de l'algorithme que nous venons de décrire pour chaque équation de l'électromagnétisme. Pour cela, on veut utiliser les formules de décomposition des noyaux de Green que nous avons établies précédemment. Un préalable est bien sûr de vérifier l'hypothèse de l'éloignement suffisant des boîtes. D'une façon précise, on doit montrer qu'il existe un  $\eta > 1$  tel que si  $x$  et  $y$  sont deux points appartenant à des boîtes éloignées  $B$  et  $B'$  à un certain niveau  $\ell v$ , on a

$$|x - c_B^{\ell v}| + |y - c_{B'}^{\ell v}| \leq \eta |c_{B'}^{\ell v} - c_B^{\ell v}|$$

Or, si  $|d^{\ell v}| = D2^{-\ell v}$  est la longueur commune des arêtes de  $B$  ou  $B'$ , on a les majorations

$$|x - c_B^{\ell v}| \leq \frac{\sqrt{3}|d^{\ell v}|}{2}, \quad |y - c_{B'}^{\ell v}| \leq \frac{\sqrt{3}|d^{\ell v}|}{2},$$

l'inégalité devenant égalité lorsque le point est localisé au coin d'un cube. D'autre part, le fait que les boîtes ne se touchent pas implique facilement que

$$|c_{B'}^{\ell v} - c_B^{\ell v}| \geq 2|d^{\ell v}| \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \left( |x - c_B^{\ell v}| + |y - c_{B'}^{\ell v}| \right)$$

et  $\eta = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.16$  convient.

Fort de ce résultat, nous allons maintenant préciser l'opérateur de translation ainsi que les  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  que l'on doit utiliser pour les équation EFIE, MFIE et CFIE

#### 3.4.1 Formules multipolaires à 4 composantes pour la EFIE

On rappelle que la matrice de la EFIE est donnée par

$$(111) \quad Z_{i,j} = \iint_{\Gamma} \iint_{\Gamma} kG(x,y) \left( \phi_j(y) \cdot \phi_i(x) - \frac{1}{k^2} \operatorname{div}_{\Gamma} \phi_j(y) \operatorname{div}_{\Gamma} \phi_i(x) \right) d\Gamma(y) d\Gamma(x).$$

On commence par écrire  $Z_{i,j}$  comme somme de 4 matrices

$$Z_{i,j} = Z_{i,j}^{(\hat{x})} + Z_{i,j}^{(\hat{y})} + Z_{i,j}^{(\hat{z})} - Z_{i,j}^{(d)}$$

avec

$$\begin{cases} Z_{i,j}^a = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} b^a(x, y, \phi_j, \phi_i) d\Gamma(y) d\Gamma(x) \\ b^{\hat{a}}(x, y, \phi, \phi') = kG(x, y) (\phi(x) \cdot \hat{a}) (\phi'(y) \cdot \hat{a}), \quad a = x, y, z \\ b^d(x, y, \phi, \phi') = \frac{1}{k} G(x, y) (\operatorname{div}_{\Gamma} \phi(x)) (\operatorname{div}_{\Gamma} \phi'(y)) \end{cases}$$

On utilise alors (45). On obtient, si  $x$  et  $y$  sont localisés dans des boîtes éloignées  $B$  et  $B'$

$$(112) \quad \begin{cases} b^a(x, y, \phi_i, \phi_j) = \\ \int_{S^2} T_{B,B'}(\hat{s}) \overline{\Pi_2^a(\hat{s}, \phi_i)} \Pi_1^a(\hat{s}, \phi_j) e^{-ik(x-c_B) \cdot \hat{s}} e^{ik(y-c_{B'}) \cdot \hat{s}} d\sigma(\hat{s}) \end{cases}$$

avec

$$(113) \quad T_{B,B'}(\hat{s}) = i \sum_{n=0}^L i^n (2n+1) h_n^{(1)}(k|D|) P_n(\hat{D} \cdot \hat{s}), \quad D = c_{B'} - c_B$$

et

$$(114) \quad \begin{cases} \overline{\Pi_1^{\hat{a}}}(\hat{s}, \phi) = \Pi_2^{\hat{a}}(\hat{s}, \phi) = \frac{k}{4\pi} \phi \cdot \hat{a}, \quad a = x, y, z, \\ \overline{\Pi_1^d}(\hat{s}, \phi) = \Pi_2^d(\hat{s}, \phi) \frac{1}{4\pi} \operatorname{div}_{\Gamma} \phi, \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

Ces formules permettent un calcul matrice vecteur en appliquant 4 fois l'algorithme multipolaire.

### 3.4.2 Formules multipolaires à 3 composantes pour la MFIE

La matrice de la MFIE se compose de 2 termes. Le premier est la moitié de la matrice de masse  $\int_{\Gamma} \phi_i(x) \phi_j(x) d\Gamma(x)$  qui est une matrice creuse (5 éléments non nuls par colonne). On l'incorporera dans la matrice des interactions proches. Reste le second terme qui s'écrit

$$(115) \quad \begin{cases} Z_{i,j} = \\ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \nabla_y G(x, y) \wedge \phi_j(y) \cdot (\phi_i(x) \wedge n(x)) d\Gamma(y) d\Gamma(x). \end{cases}$$

On peut transformer l'intégrante selon

$$\begin{aligned}
& (\nabla_y G(x, y) \wedge \phi_j(y)) \cdot (\phi_i(x) \wedge n(x)) \\
&= \phi_j(y) \cdot ((\phi_i(x) \wedge n(x)) \wedge \nabla_y G(x, y)) = \\
&= \sum_{\hat{a}=\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}} (\phi_j(y) \cdot \hat{a}) ((\phi_i(x) \wedge n(x)) \wedge \nabla_y G(x, y)) \cdot \hat{a} \\
&= \sum_{\hat{a}=\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}} (\phi_j(y) \cdot \hat{a}) ((\nabla_y G(x, y) \wedge \hat{a})) \cdot (\phi_i(x) \wedge n(x)) \\
&= \sum_{\hat{a}=\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}} (\phi_j(y) \cdot \hat{a}) (n(x) \wedge (\nabla_y G(x, y) \wedge \hat{a})) \cdot \phi_i(x) \\
&= \sum_{\hat{a}=\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}} b^a(x, y, \phi_i, \phi_j)
\end{aligned}$$

À cette décomposition en somme de trois termes correspond naturellement la décomposition de  $Z_{i,j}$  selon

$$\begin{aligned}
Z_{i,j} &= Z_{i,j}^{(\hat{x})} + Z_{i,j}^{(\hat{y})} + Z_{i,j}^{(\hat{z})} \\
Z_{i,j}^{\hat{a}} &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} b^{\hat{a}}(x, y, \phi_i, \phi_j) d\Gamma(y) d\Gamma(x).
\end{aligned}$$

Maintenant, si  $x$  et  $y$  sont deux points appartenant à des boîtes éloignées  $B$  et  $B'$ , on applique la formule (46) avec  $\phi = \hat{x}, \hat{y}$  ou  $\hat{z}$ .

$$(116) \quad \begin{cases} b^{\hat{a}}(x, y, \phi_i, \phi_j) = \\ \int_{S^2} T_{B,B'}(\hat{s}) \overline{\Pi_1^{\hat{a}}(\hat{s}, \phi_i)} \Pi_2^{\hat{a}}(\hat{s}, \phi_j) e^{-ik(x-c_B) \cdot \hat{s}} e^{ik(y-c_{B'}) \cdot \hat{s}} d\sigma(\hat{s}) \end{cases}$$

où l'opérateur de translation est toujours donné dans (113) et

$$(117) \quad \begin{cases} \Pi_2^{\hat{a}}(\hat{s}, \phi) = \frac{k}{4\pi} \phi \cdot \hat{a}, \quad a = x, y, z \\ \overline{\Pi_1^{\hat{a}}(\hat{s}, \phi)} = \frac{k}{4\pi} (n \wedge (i\hat{s} \wedge \hat{a})) \cdot \phi \end{cases}$$

Ces formules permettent un calcul matrice vecteur en appliquant 3 fois l'algorithme multipolaire.

### 3.4.3 Formules multipolaires pour la CFIE à 4 composantes

On rappelle que la matrice CFIE s'obtient par combinaison linéaire des matrices EFIE et MFIE

$$Z_{i,j} = (\beta Z^{MFIE} - i\alpha Z^{EFIE})_{i,j}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres de somme unité. Pour réaliser le calcul multipolaire on remarque que les formules relatives à la EFIE et la MFIE impliquent les mêmes opérateurs  $\Pi_2^{\hat{a}}$ ,  $\hat{a} = \hat{x}$ ,  $\hat{y}$  ou  $\hat{z}$ . On peut donc regrouper les résultats précédents et obtenir un calcul matrice matrice vecteur avec 4 calculs multipôles. On commence par décomposer

$$Z_{i,j} = Z_{i,j}^{(\hat{x})} + Z_{i,j}^{(\hat{y})} + Z_{i,j}^{(\hat{z})} + Z_{i,j}^{(d)}$$

avec

$$Z_{i,j}^a = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} b^a(x, y, \phi_i, \phi_j) d\Gamma(x) d\Gamma(y)$$

les  $b^a$  étant une combinaison linéaire des  $b^a$  précédents. On réutilise les formules EFIE et MFIE pour obtenir

$$(118) \quad \left\{ \begin{array}{l} b^a(x, y, \phi_i, \phi_j) = \\ \int_{S^2} T_{B,B'}(\hat{s}) \overline{\Pi_1^a(\hat{s}, \phi_i)} \Pi_2^a(\hat{s}, \phi_j) e^{-ik(x-c_B) \cdot \hat{s}} e^{ik(y-c'_B) \cdot \hat{s}} d\sigma(\hat{s}) \end{array} \right.$$

avec

- Le même opérateur de translation (113)
- Pour  $\hat{a} = \hat{x}$ ,  $\hat{y}$  ou  $\hat{z}$

$$\Pi_2^{\hat{a}}(\hat{s}, \phi) = \frac{k}{4\pi} \phi \cdot \hat{a}, \quad a = x, y, z$$

$$\overline{\Pi_1^{\hat{a}}}(\hat{s}, \phi) = \frac{k}{4\pi} (-i\alpha \phi \cdot \hat{a} + \beta(n \wedge (i\hat{s} \wedge \hat{a})) \cdot \phi)$$

- Pour la composante  $d$

$$\Pi_2^d(\hat{s}, \phi) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div}_{\Gamma} \phi$$

$$\Pi_1^d(\hat{s}, \phi) = \frac{i\alpha}{4\pi} \operatorname{div}_{\Gamma} \phi$$

### 3.5 Quadrature, interpolation et filtrage des fonctions de la sphère unité

Pour être complet, il nous reste à décrire les maillages de la sphère unité pour discrétiser les champs proches et lointains  $N^B(\hat{s})$  et  $F^B(\hat{s})$ . Le principe consiste à retenir un maillage adapté à la taille de chaque boîte et à employer des procédures d'interpolation et de filtrage pour passer d'un niveau à l'autre.

Pour chaque niveau  $\ell v$ , on construit ainsi

$$\begin{aligned} \hat{s}_p^{\ell v}, p = 1, \dots, P^{\ell v} & \text{ des points sur } S^2 \\ w_p^{\ell v}, p = 1, \dots, P^{\ell v} & \text{ des poids de quadrature} \end{aligned}$$

en suivant les principes exposés dans la section (2.2.3). Leur nombre  $P^{\ell v}$  est donc simplement donné par

$$P^{\ell v} = (N^{\ell v} + 1) \left( \left\lfloor \frac{N^{\ell v}}{2} \right\rfloor + 1 \right)$$

$$N^{\ell v} = \nu(\epsilon, \sqrt{3}k|d^{\ell v}|) + L(\epsilon, \sqrt{3}k|d^{\ell v}|)$$

À partir de ces maillages, on va discrétiser les champs suivants

$$\left\{ F^B \left( \hat{s}_p^{\ell v(B)} \right) \right\}_{1 \leq p \leq P^{\ell v(B)}}, \quad \left\{ N^B \left( \hat{s}_p^{\ell v(B)} \right) \right\}_{1 \leq p \leq P^{\ell v(B)}}$$

et l'algorithme multipôle devient

- On calcule les “far fields” sur les boîtes  $B$  de plus petite taille (boîte de niveau  $Lv$ ): pour  $p = 1, \dots, P^{Lv}$ ,

(119)

$$F^{B'}(\hat{s}_p^{Lv}) = \sum_{T' \in B'} \left( \int_{T'} e^{ik(y-c'_B) \cdot \hat{s}_p^{Lv}} \left( \sum_{j, A_j \subset \partial T'} \Pi_1(\hat{s}_p^{Lv}, \phi_j(y)) I_j \right) dT'(y) \right),$$

- on boucle sur les niveaux en remontant des plus petites boîtes vers les plus grosses : pour tous les niveaux  $\ell v \in \{Lv - 1, \dots, 2\}$  on calcule les “far fields” par regroupement et interpolation de toutes les boîtes de niveau  $\ell v$ . Soit, pour  $p = 1, \dots, P^{\ell v}$

$$(120) \quad F^{B'}(\hat{s}_p^{\ell v}) = \sum_{b' / \text{Ascend}(b')=B'} e^{ik(c_{b'} - c_{B'}) \cdot \hat{s}_p^{\ell v}} \left( \mathcal{I}_{\ell v+1 \rightarrow \ell v} F^{b'} \right) (\hat{s}_p^{\ell v}).$$

- pour tous les niveaux  $\ell v \in \{Lv - 1, \dots, 2\}$  on initialise les “near fields” de toutes les boîtes de niveau  $\ell v$  par translation des boîtes voisines éloignées: Pour  $p = 1, \dots, P^{\ell v}$

$$(121) \quad \tilde{N}^B(\hat{s}_p^{\ell v}) = \sum_{B' \in \mathcal{C}(B_T^{\ell v})} T_{B, B'}(\hat{s}_p^{\ell v}) F^{B'}(\hat{s}_p^{\ell v}),$$

- on effectue une nouvelle boucle sur les niveaux en remontant: pour tous les niveaux  $\ell v \in \{3, \dots, Lv\}$  on ré-assemble les “near fields” filtrés de toutes les boîtes de niveau  $\ell v$ . Soit, pour  $p = 1, \dots, P^{\ell v}$

$$(122) \quad \tilde{N}^B(\hat{s}_p^{\ell v}) = \tilde{N}^B(\hat{s}_p^{\ell v}) + \mathcal{F}_{\ell v - 1 \rightarrow \ell v} \left( \tilde{N}^{Ascend(B)}(\hat{s}) e^{-ik(c_B - c_{Ascend(B)}) \cdot \hat{s}} \right) (\hat{s}_p^{\ell v})$$

- on reconstitue le “champ” à chaque degrés de liberté

$$(123) \quad U_i^{\ell v} = \sum_{T=T_{A_i}^{\pm}} \int_T \int_{S^2} \overline{\Pi_2(\hat{s}_p^{\ell v}, \phi_i(x))} e^{-ik(x - c_{B_T^{\ell v}}) \cdot \hat{s}_p^{\ell v}} \tilde{N}^{B_T^{\ell v}}(\hat{s}_p^{\ell v})$$

Dans cet algorithme apparait les opérations de filtrage et d’interpolation d’un niveau à l’autre. Ces opérations sont naturellement transposées l’une par rapport à l’autre

$$\mathcal{F}_{\ell v \rightarrow \ell v + 1} = (\mathcal{I}_{\ell v + 1 \rightarrow \ell v})^t$$

Si l’on se rappelle que les fonctions manipulées sont bien représentées par un nombre fini d’harmoniques sphériques, il est tout naturel de privilégier une opération d’interpolation qui est exacte pour ces fonctions. On choisira la formule

$$(124) \quad \begin{aligned} (\mathcal{I}_{\ell v + 1 \rightarrow \ell v} F)(\hat{s}_p^{\ell v + 1}) &= \sum_{n=0}^{L_c^{\ell v}} \sum_{|m| \leq n} \tilde{\alpha}_{n, m} Y_n^m(\hat{s}_p^{\ell v + 1}) \\ \tilde{\alpha}_{n, m} &= \sum_{p=1}^{P^{\ell v}} w_p^{\ell v} F(\hat{s}_p^{\ell v}) \overline{Y_n^m(\hat{s}_p^{\ell v})} \approx \int_{S^2} F(\hat{s}) \overline{Y_n^m(\hat{s})} d\sigma(\hat{s}) \end{aligned}$$

Le nombre  $L_c^{\ell v}$  est la fréquence de coupure, choisie égale à

$$(125) \quad L_c^{\ell v} = \frac{1}{2} \left( \nu(\epsilon, \sqrt{3}|d^{\ell v}|) + L(\epsilon, \sqrt{3}|d^{\ell v}|) \right)$$

Ces formules se révèlent être exacte pour toute fonction harmonique de degré inférieur ou égal à la fréquence de coupure.

Il existe plusieurs manières plus ou moins efficaces et sophistiquées de réaliser les opérations d'interpolations et de filtrages. La plus directe est de précalculer les matrices (rectangulaires)

$$(\mathcal{I}_{\ell v+1 \rightarrow \ell v})(\hat{s}_p^{\ell v+1}, \hat{s}_p^{\ell v})$$

et d'appliquer simplement cette matrice. Le nombre d'opérations est alors proportionnel à  $P^{\ell v} P^{\ell v+1}$  ou encore

$$\frac{1}{4}(\nu(\epsilon, \sqrt{3}k|d^{\ell v}|) + L(\epsilon, \sqrt{3}k|d^{\ell v}|))^2 \times (\nu(\epsilon, \sqrt{3}k|d^{\ell v+1}|) + L(\epsilon, \sqrt{3}k|d^{\ell v}| + 1))^2.$$

Asymptotiquement et si l'on tient compte de toutes les interpolations à effectuer, on obtient un coût en  $k^4 \sim N^2$ , ce qui n'est pas acceptable. On peut améliorer les choses en utilisant une factorisation de la matrice via une transformation de Fourier discrète, [7], [10]. C'est l'algorithme dit semi-naïf. On montre que son coût varie en  $k^3 \sim N^{3/2}$  pour les grands  $k$ . On peut enfin améliorer encore les choses en utilisant des algorithmes mis au point par Greengard et son équipe. La complexité tombe alors à  $k^2 \log k$ . Toutefois le point de croisement des deux courbes représentant les variations des coûts de chaque méthode en fonction de  $k$  est assez grand ( $k \approx 100$ ). En pratique, et dans une première étape, on peut se contenter de l'approche semi-naïve.

Tout ceci demande bien sûr à être étayé tant par des expériences numériques que par des estimations d'erreur. Nous renvoyons cette étude à un prochain rapport.

## 4 Résultats numériques

Quelques expériences numériques sont présentées dans le paragraphe suivant. Dans un premier temps, on va s'intéresser à évaluer le coût de calcul d'un produit matrice-vecteur par la méthode multipolaire multiniveau. On tâchera de regarder l'influence du nombre de points par longueur d'onde ainsi que du nombre de points de Gauss choisi pour les formules de quadratures numériques. Dans un second temps, des calculs de diffraction dans le cas académique de la sphère seront exposées. Une méthode itérative préconditionnée a été utilisée. Le produit matrice-vecteur est fait à l'aide de la méthode multipôle. Le cas test JINA  $n^o = 4$  a aussi été résolu et est décrit dans le rapport joint intitulé "Résolution du cas test JINA  $n^o 4$  par le code CESC du CERFACS".

Avant de nous intéresser à l'obtention du courant, regardons les performances obtenues sur le produit matrice-vecteur. Le produit matrice-vecteur se fait à l'aide de quatre calculs multipolaires comme cela a été exposé au paragraphe (3.4.1). Ces calculs sont effectués simultanément. Nous utiliserons les notations suivantes:

- $k$ : nombre d'onde
- $\lambda$ : longueur d'onde ( $\lambda = 2\pi/k$ )
- $h$ : pas de discrétisation
- $N_\lambda$ : nombre de points par longueur d'onde ( $N_\lambda = \lambda/h$ )
- $n_{pg}$ : nombre de points de Gauss
- $Lv$  nombre total de niveau
- $B_i^{lv}$  la boîte  $i$  au niveau  $lv$
- $d^{lv}$  taille de la boîte  $B_i^{lv}$
- $N_{mul}^{lv}$  nombre de multipôles au niveau  $lv$

**Remarque:** Revenons quelques instants sur la formulation intégrale à choisir. Notre but est de pouvoir étudier les problèmes de diffraction des cavités semi ouvertes. Or pour résoudre ces problèmes, la seule formulation intégrale possible est une formulation EFIE. Nous avons donc choisir cette formulation EFIE pour réaliser les tests de performance.

## 4.1 Tests de performance sur le produit matrice-vecteur

Nous avons considéré le cas d'une sphère parfaitement conductrice de rayon  $1m$ . La machine utilisée est une SGI Power Challenge (R10000) et 2GB de mémoire.

### 4.1.1 Variation du nombre de points de Gauss

Nous avons fait varier la fréquence en fixant le nombre de points par longueur d'onde  $N_\lambda$  égal à 10. Le nombre d'inconnues  $N$  varie entre 6000 et 150000 alors que le nombre de niveau  $Lv$  varie entre 3 et 7. Ce dernier est choisi de telle sorte que la condition  $kd^{Lv} = 1$  soit satisfaite. Rappelons que  $d^{Lv}$  est la taille de la plus petite boîte. Le nombre de multipôles a été choisi tel que

$$(126) \quad N_{mul}^{lv} = kd^{lv} + 2.25 \log(kd^{lv} + \pi)$$

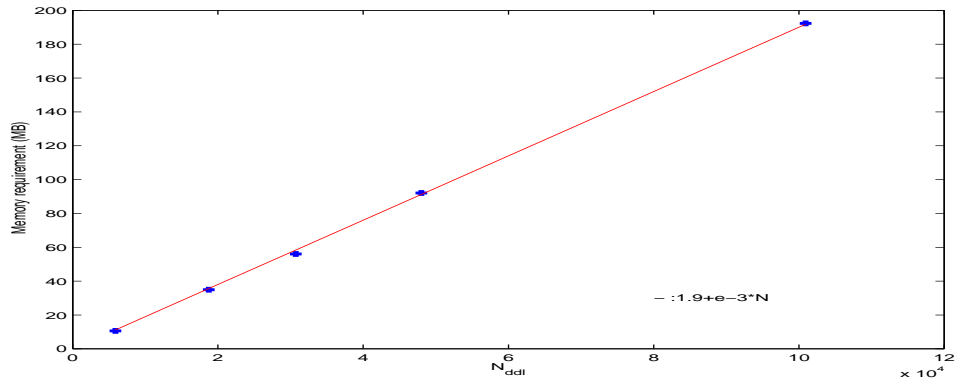


Figure 4: Mémoire utilisée pour réaliser un produit matrice-vecteur à l’aide la méthode multipôle

Le produit matrice-vecteur est fait soit de manière classique soit à l’aide de la méthode multipôle. Les erreurs relatives en norme  $L^1$  (resp. en norme  $L^2$ ) sont comprises entre 0.1% et 0.5% quelque soit la valeur du nombre de points de Gauss. La figure 4 donne l’encombrement mémoire utilisée pour deux valeurs de  $npg$ . La place mémoire, dans les deux cas, suit approximativement la courbe  $1.9e - 3N$ . Les valeurs obtenues sont comparables aux résultats du code FISC ([13]). Remarquons que l’encombrement mémoire est principalement lié au stockage de la matrice proche  $Z^{near}$  et aux calculs des interactions lointaines plus spécialement au stockage des “far-fields”  $F^B(\hat{s})$

$$(127) \quad M^{Ax} = M^{near} + M^{farfields}$$

La figure 5 donne la place mémoire pour ces deux contributions en fonction du nombre de degré de liberté. On note que les valeurs obtenues suivent les courbes  $9.e - 4 * n$  pour la place mémoire de la matrice proche  $Z^{near}$  et  $2e - 4 * n * \log_{10}(n)$  pour l’encombrement mémoire des “far-fields”. On remarquera que lorsque le nombre de degré de liberté augmente, le stockage des “far-fields” devient prépondérant. C’est pourquoi l’encombrement mémoire pour des valeurs de  $N$  élevées est alors de l’ordre de  $CN \log(N)$ . La figure 6 donne le temps CPU pour un produit matrice vecteur en fonction du nombre de degré de liberté. L’augmentation du calcul pour  $npg = 3$  est essentiellement du au calcul des “far-fields” au niveau  $Lv$ .

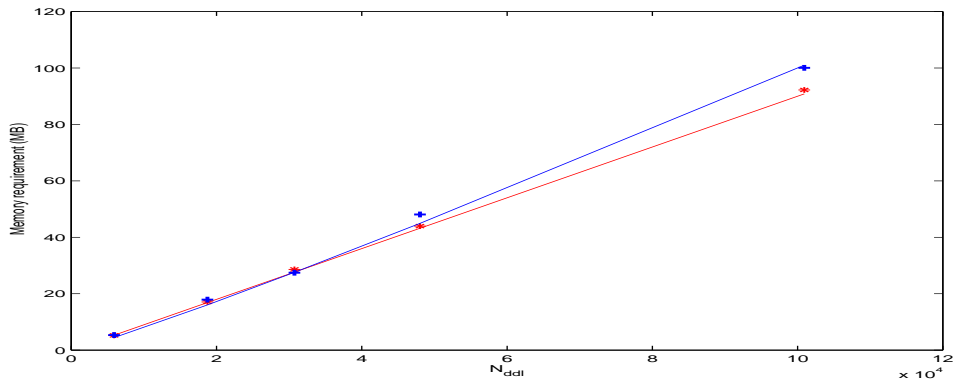


Figure 5: Mémoire utilisée pour réaliser un produit matrice-vecteur à l'aide la méthode multipôle (\* :  $M^{near}$ , + :  $M^{farfields}$ )

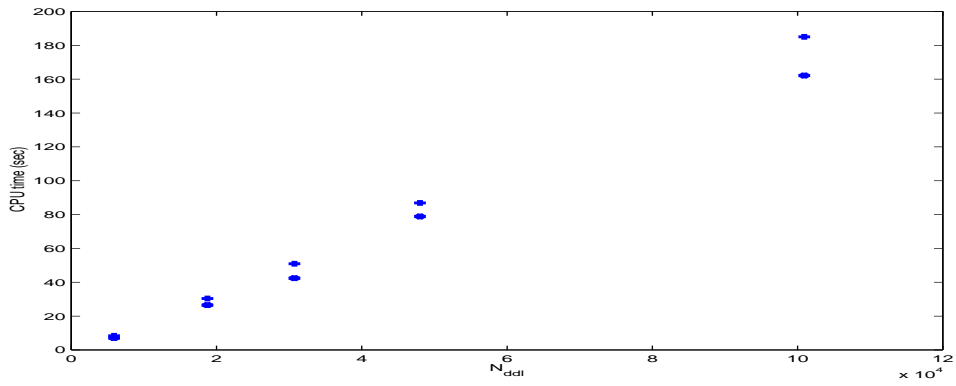


Figure 6: Temps de calcul (\* :  $npg = 1$ , + :  $npg = 3$ )

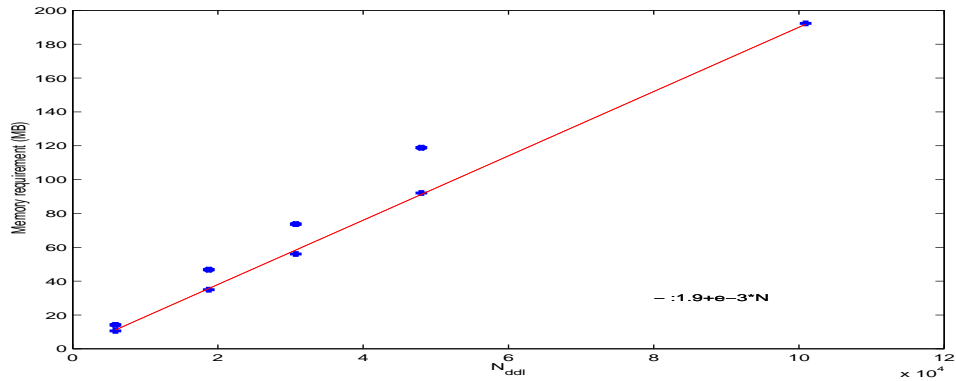


Figure 7: Memoire (+:  $N_\lambda = 10$ , \*:  $N_\lambda = 7$ )

#### 4.1.2 Variation du nombre de points par longueur d'onde

Le nombre de points de Gauss est maintenant fixé égal à 3 et nous allons faire varier le nombre de points par longueur d'onde soit  $N_\lambda$ . Nous avons pris deux valeurs de ce nombre. Remarquons que à discrétisation donnée (c'est-à-dire pour un même maillage), la fréquence est changée. Les erreurs relatives sur le produit matrice-vecteur en norme  $L^1$  (resp. en norme  $L^2$ ) sont comprises entre 0.1% et 0.5% quelque soit la valeur de  $N_\lambda$ . Elles sont du même ordre de grandeur que celles trouvées précédemment. En revanche, l'encombrement mémoire en fonction du nombre de degrés de libertés a augmenté (cf. figure 7). Pour un même maillage, le nombre de degré de liberté est fixé et la diminution de  $N_\lambda$  entraîne l'augmentation de la fréquence. Cette dernière va induire une hausse du nombre de multipôles choisis (cf formule 126) et aussi du nombre de directions angulaires choisies sur la sphère unité. C'est pourquoi le stockage des "far-fields" est plus important. La figure 8 donne la place mémoire en fonction de la fréquence. Pour une fréquence donnée, les stockages des "far-fields" dépend peu de la valeur de  $N_\lambda$ . En revanche, plus  $N_\lambda$  est important, plus le nombre de degré de liberté est grand et donc plus l'encombrement mémoire pour la matrice proche est important. Ce qui explique l'accroissement de la place mémoire pour  $N_\lambda$  égal à 10. Les figures 9 et 10 donnent le temps CPU pour les deux valeurs de  $N_\lambda$  en fonction du nombre de degré de liberté ou en fonction de la fréquence. On remarquera qu'à fréquence donnée, on obtient des résultats identiques soit pour 10 points par  $\lambda$  avec un nombre de points de Gauss égal à 1 soit pour 7 points par  $\lambda$  avec un nombre de points de Gauss égal à 3.

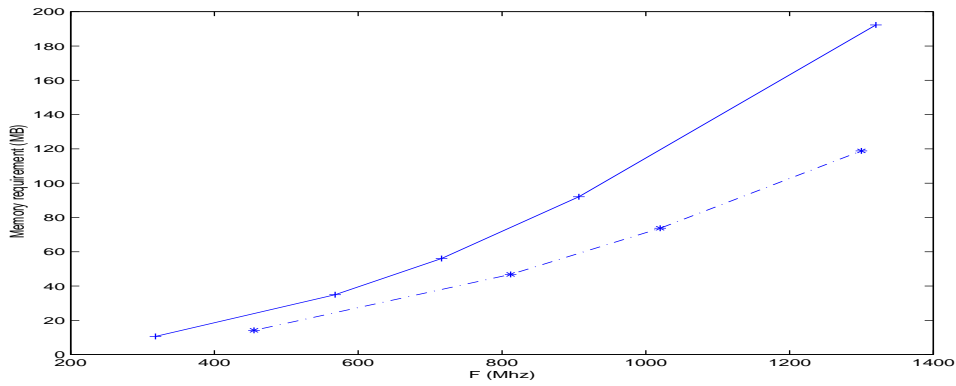


Figure 8: Mémoire ( -:  $N_\lambda = 10$ , -.:  $N_\lambda = 7$ )

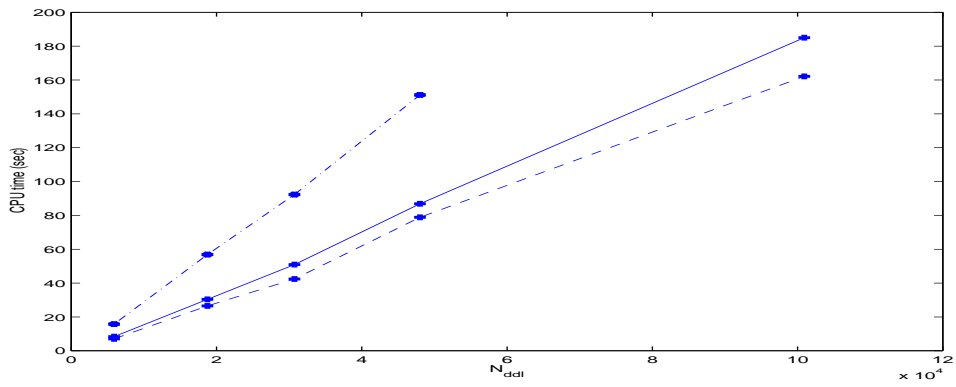


Figure 9: Temps de calcul ( -: 10 points par  $\lambda npg = 3$ , - - : 10 points par  $\lambda npg = 1$ , -.: 7 points par  $\lambda npg = 3$ )

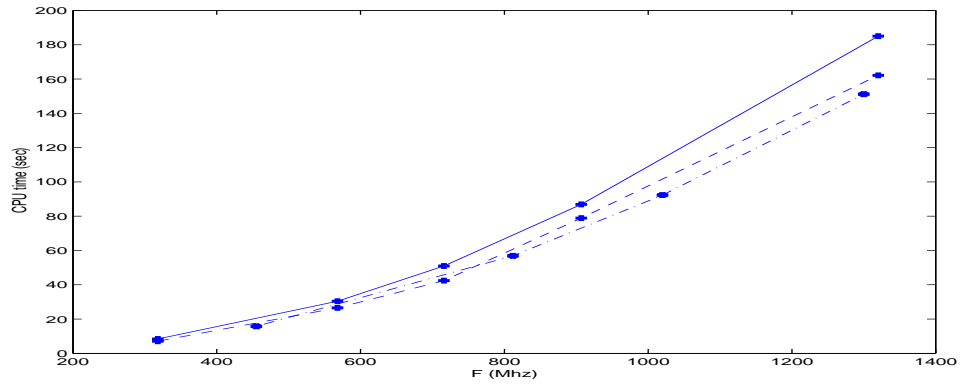


Figure 10: Temps de calcul (-: 10 points par  $\lambda$  avec  $npg = 3$ , - - : 10 points par  $\lambda$  avec  $npg = 1$ , -.: 7 points par  $\lambda$  avec  $npg = 3$ )

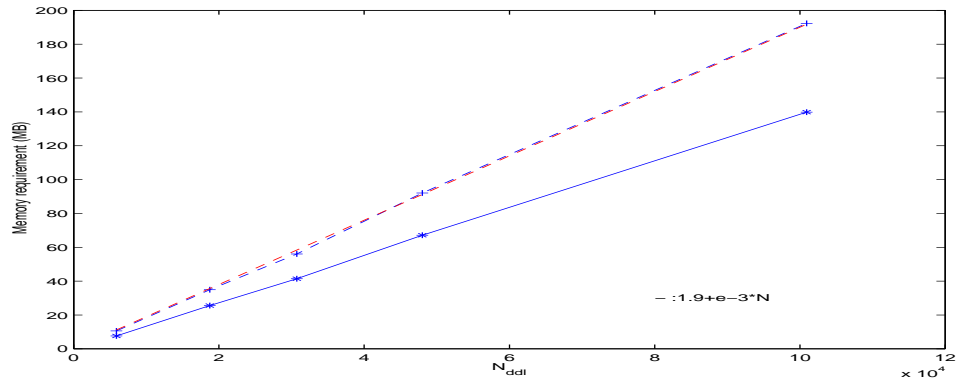


Figure 11: Mémoire (-:  $C = 1$ , - - :  $C = 2.25$ )

#### 4.1.3 Variation du nombre de multipôles

Le nombre de points par longueur d'onde est fixé égal à 10. Le nombre de points de Gauss est pris égal à 3. Nous allons nous intéresser maintenant à la variation du nombre de multipôles. Deux valeurs de la constante  $C$  (126) sont choisies. Les courbes ont été tracées pour deux valeurs  $C$  ( $C = 2.25$  et  $C = 1$ ). On notera que dans le cas où  $C$  vaut un, les erreurs relatives sur le produit matrice-vecteur augmentent. Elles sont de l'ordre de 3% en norme  $L^2$  et peuvent atteindre 14% en norme  $L^1$ . La figure 11 donne l'encombrement mémoire. L'accroissement observé pour  $C$  égale à 2.25 est dû uniquement aux stockage des "far-fields". Remarquons que la complexité (cf fig 12) obtenue est de l'ordre de  $35e - 5N \log N$  (resp.  $20e -$

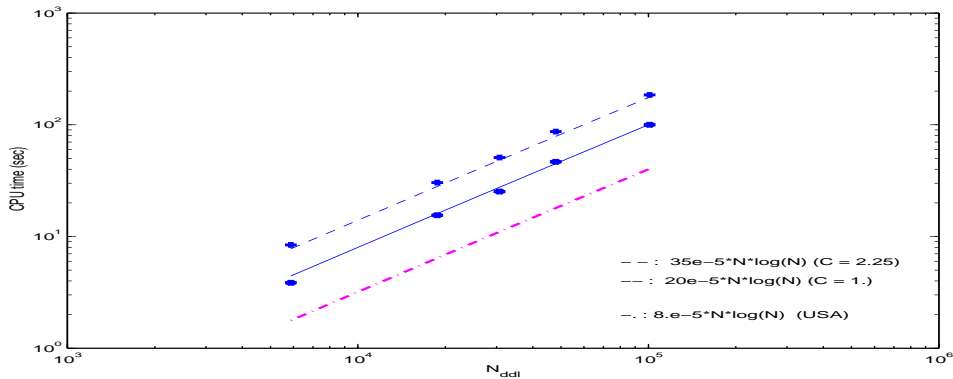


Figure 12: Temps de calcul(-:  $C = 1$  , - - :  $C = 2.25$ , -: valeurs obtenues par le code FISC)

$5N \cdot \log N$ ) lorsque la constante  $C$  vaut 2.25 (resp.  $C = 1$ ). Ces résultats sont un peu supérieurs aux valeurs obtenues par le code FISC (cf fig. 12)([13])

## 4.2 Tests de performance sur la résolution du système

Nous allons maintenant nous intéresser à l'obtention du courant et donc à la résolution du système (128)

$$(128) \quad Z_h I_h = U_h$$

Ce système est résolu à l'aide d'une méthode itérative. Le produit matrice-vecteur est réalisé à l'aide de la méthode multipôle multiniveau .

La résolution du système est réalisée à l'aide d'un algorithme de type GMRES. Afin de diminuer le nombre d'itérations nécessaires pour la résolution, nous avons utilisé un préconditionneur de type SPAI. Ce dernier est une matrice creuse qui approche au mieux l'inverse de  $Z$ . Sans rentrer dans les détails, disons qu'à chaque degré de liberté  $k$  , on associe un ensemble de degrés de liberté voisins  $I_k$ . On ne garde que les contributions de cet ensemble de degrés de liberté  $I_k$  dans la matrice  $Z$  pour construire le préconditionneur. Pour plus de précisions, nous renvoyons le lecteur aux travaux de ([2], [1]). Rappelons seulement que le nombre d'itérations sera d'autant plus faible que le préconditionneur est bien choisi.

Revenons quelques instants sur la formulation intégrale à choisir. Notre but est de pouvoir étudier les problèmes de diffraction des cavités semi ou-

vertes. Or pour résoudre ces problèmes, la seule formulation intégrale possible est une formulation EFIE. Il est aussi bien connu que cette formulation EFIE conduit à des matrices mal conditionnées et la résolution du système s'avère difficile. C'est pourquoi pour ces problèmes de cavités, le bon choix du préconditionneur est crucial.

On va d'abord nous commencer par étudier un cas plus académique, le cas de la sphère parfaitement conductrice en utilisant une formulation EFIE. Nous savons bien sur que cette formulation EFIE n'est pas la bonne formulation pour analyser les problèmes de diffraction des obstacles fermés. Cependant, il nous est apparu intéressant de se placer dans ce cadre car des solutions analytiques sont disponibles et des calculs de précisions peuvent être réalisés.

La valeur initiale pour l'algorithme itératif est choisi égale au second membre.

#### 4.2.1 Cas académique de la sphère

Nous avons considéré le cas d'une sphère parfaitement conductrice de rayon  $1m$ . Nous avons fait varier la fréquence de telle sorte que le nombre de points par longueur d'onde soit fixé égal à 10. Le nombre de points de Gauss est fixé égal à 1. Le nombre d'inconnues  $N$  varie entre 6000 et 150000 alors que le nombre de niveau  $Lv$  varie entre 3 et 7. Ce dernier est choisi de telle sorte que la condition  $kd^{Lv} = 1$  soit satisfaite.

Nous avons fixé pour la résolution par *GMRES* le nombre de vecteurs à retenir égal 50 ( $restart = m = 50$ ) et le critère d'arrêt égal  $10^{-4}$ . La figure (13) donne l'encombrement mémoire pour la résolution. On note une hausse de 30% par rapport à la place mémoire utilisée pour le produit matrice-vecteur (cf fig 13). Cette hausse est due à la place mémoire nécessaire pour le stockage du préconditionneur.

La figure 14 donne le nombre d'itérations nécessaire en fonction du nombre de degrés de liberté. Ce nombre est relativement important. Il est surtout lié au choix de la formulation intégrale choisie (EFIE). Il est bien connu que la matrice obtenue après discrétisation n'est pas bien conditionnée. Par conséquent la résolution du système nécessite un grand nombre d'itérations. Comme la sphère est une surface fermée, il aurait été plus astucieux de choisir une autre représentation intégrale (par exemple CFIE) qui va après discrétisation conduire à une matrice mieux conditionnée. Remarquons aussi que le nombre d'itérations suit approximativement le nombre de degré de liberté. La complexité de l'algorithme de résolution est donc de

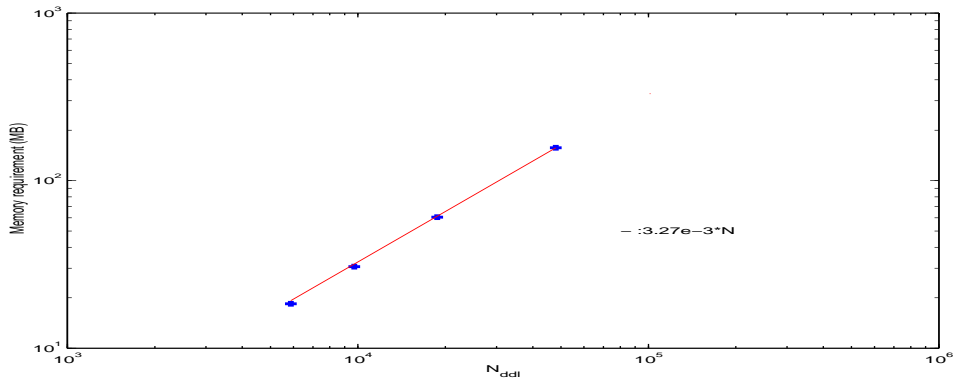


Figure 13: Mémoire utilisée

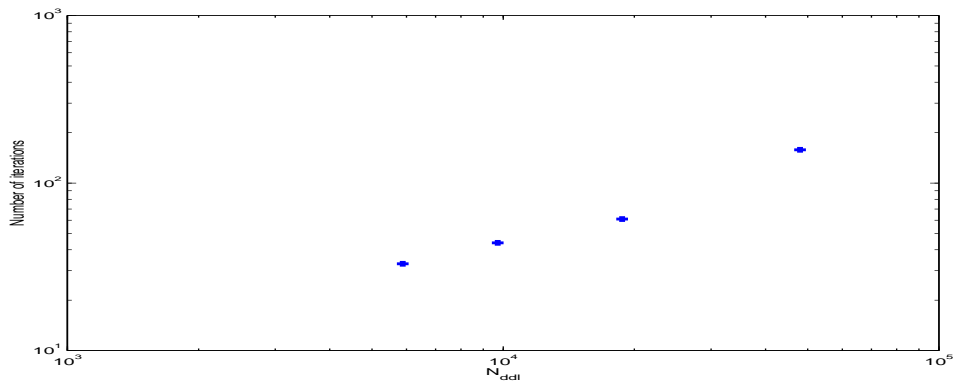


Figure 14: Nombre d'itérations en fonction du nombre de degré de liberté

l'ordre de

$$(129) \quad C^{iter} = C N (N \log N) N^{inc}$$

alors que l'encombrement mémoire est  $M^{iter} = C' (N \log N)$ . Ceci est à comparer aux résultats obtenus par une méthode directe de type LU. La complexité vaut alors

$$(130) \quad C^{LU} = C^1 N^3 + C^2 N^2 N^{inc}$$

soit en pratique, plutôt une complexité de l'ordre de  $C^{LU} = C^3 N^3$ . Si le nombre d'incidence n'est pas trop élevé, cette complexité  $C^{LU}$  reste toujours supérieure à  $C^{iter}$ . La figure 15 donne le temps CPU nécessaire pour résoudre le système. Dans le cas particulier de la sphère, une solution an-

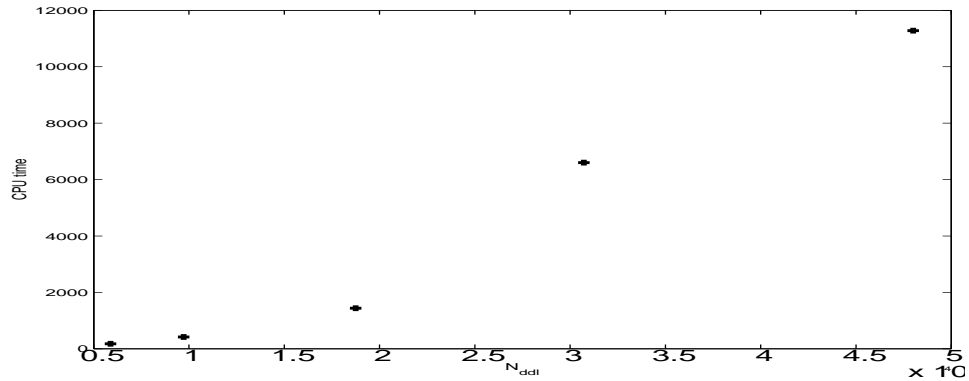


Figure 15: Temps cpu en fonction du nombre de degré de liberté

alytique peut être construite à partir du développement en série de Mie. Les résultats obtenus ont été comparés avec ces solutions analytiques. En particulier, on trouve des erreurs de l'ordre de 0.1% sur le calcul de la SER.

**Conclusion:** Le calcul de la diffraction d'une onde par une sphère conductrice a été résolu par une méthode itérative préconditionnée. Le coût de cette méthode est fortement lié au coût du produit matrice vecteur d'où l'intérêt d'utiliser une méthode multipolaire multi-niveaux (MMM). Nous avons montré que la complexité de l'algorithme est de l'ordre  $N(N \log N) N^{inc}$  avec un encombrement mémoire de l'ordre de  $(N \log N)$ . La précision trouvée sur la SER est de l'ordre de 1%. Rappelons que la formulation intégrale choisie est la EFIE. nous savons que cette formulation n'est pas appropriée pour traiter le cas de la sphère. Il apparaît donc nécessaire de regarder ce qui se passe si une autre formulation est choisie. Nous renvoyons cette étude dans un rapport suivant.

## References

- [1] B. Carpentieri, I. S. Duff, and L. Giraud. Sparse pattern selection strategies for robust frobenius-norm minimization preconditioners in electromagnetism. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 7(7-8):667–685, 2000.
- [2] B. Carpentieri, I.S. Duff, and L.Giraud. Experiments with sparse preconditioning of dense problems from electromagnetic applications. Technical Report TR/PA/00/04, CERFACS, Toulouse, France, 1999.

- [3] R. Coifman, V. Rokhlin, and S. Wandzura. The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 35:14–19, June 1993.
- [4] D. Colton and P.Kreiss. *Integral Equation Methods in Scattering*. Wiley & Sons(New York), 1983.
- [5] D. Colton and P.Kreiss. *Inverse Acoustic Electromagnetic Scattering Theory*. Applied Mathematical Science. Springer-Verlag, 1992.
- [6] E. Darve. The fast multipole method i: Error analysis and asymptotic complexity. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(1):98–128, ?? 2000.
- [7] E. Darve. The fast multipole method: Numerical implementation. *Journal of Comput. Physics*, 160(1):196–240, May 2000.
- [8] M.A. Epton and Benjamin Dembart. Multipole translation theory for the three-dimensionnal Laplace and Helmholtz equation. *Siam J. Sci. Comput.*, 14(4):865–897, 1995.
- [9] V. Frayssé, L. Giraud, and S. Gratton. A set of GMRES routines for real and complex arithmetics. Technical report, Cerfacs TR/PA/97/49, Toulouse, France, 1997.
- [10] R. Jakob-Chien and K. Alpert. Fast spherical filter with uniform resolution. *Journal of Comput. Physics*, 136(2):580–584, September 1987.
- [11] Y. Saad and M.H. Schultz. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SISSC*, 7:856–869, 1986.
- [12] J. Song and W.C Chew. Multilevel Fast-Multipole Algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering. *Microwave and optical technology letters*, 10:14–19, September 1995.
- [13] J. Song, C. Lu, and W.C Chew. Multilevel Fast Multipole Algorithm for Electromagnetic Scattering . *IEEE Antennas and Propagation*, 45:1488–1493, 1997.
- [14] J. Song, C.C Lu, and W.C Chew. Multilevel Fast-Multipole Algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects. *IEEE Antennas and Propagation*, 45(10):14–19, October 1997.