

**Mise en place d'un préconditionneur  
appliqué  
à un problème d'électromagnétisme**

**F. Collino    F. Millot**

**CERFACS REPORT TR/EMC/02/122**

# Mise en place d'un préconditionneur appliqué à un problème d'électromagnétisme

F. Collino \*

F. Millot\*

---

\*CERFACS, 42 avenue G. Coriolis 31057 Toulouse

# Introduction

La méthode la plus utilisée, pour résoudre des problèmes d'ondes électromagnétiques en régime harmonique, repose sur l'écriture des équations intégrales. Après discrétisation, ces équations conduisent à la résolution de systèmes linéaires de matrice pleine  $A$  à coefficients complexes. Lorsque le nombre d'inconnues devient trop élevé, toute méthode directe de type inversion LU est proscrite.

Une alternative consiste en l'utilisation d'une méthode itérative, dont le temps est proportionnel au nombre d'itérations et au temps du produit matrice-vecteur. Pour diminuer ce coût, nous pouvons, d'une part, procéder à un calcul rapide du produit matrice-vecteur, comme le fait la méthode multipôles multiniveaux (FMM) et d'autre part, réduire le nombre d'itérations à l'aide d'un préconditionneur.

Le préconditionneur  $M$  est une matrice, généralement creuse pour ne pas surcharger la mémoire, qui tend à approcher l'inverse de  $A$ . Si  $M$  approche convenablement  $A^{-1}$ , on s'attend à ce que le nombre d'itérations nécessaire à la convergence soit drastiquement diminué.

Le but de ce rapport n'est pas de dresser une liste exhaustive des différents préconditionneurs, mais plutôt de décrire le type de préconditionneur choisi et de donner ses performances. Le rapport est organisé de la manière suivante. Le deuxième paragraphe abordera rapidement la construction des préconditionneurs de type SPAI choisis. Deux types de préconditionneurs ont été retenus. La construction de l'un s'appuie sur des considérations topologiques. Pour un degré de liberté  $j$  donné, on ne considère que les degrés de liberté connectés à  $j$  via le maillage. L'autre préconditionneur est de type géométrique et utilise plutôt une notion de distance. Pour un degré de liberté  $j$  donné, on ne considère que les degrés de liberté qui sont localisés à une certaine distance. L'étude spécifique de ce préconditionneur géométrique a fait l'objet d'une thèse présentée par B. Carpentieri([5], [3], [4], [2]) et nous reprendrons dans notre travail beaucoup des concepts développés dans cette thèse. Ces idées ont aussi été utilisées par G. Sylvand [11].

Le troisième paragraphe est consacré aux tests numériques. On va s'attacher à comparer les gains en temps et en place mémoire pour les deux types de préconditionneurs lors de leur construction. Ensuite, on s'intéressera à l'efficacité du préconditionneur en regardant son influence sur la résolution de problèmes du diffraction.

## 1 Quelques éléments sur la construction du préconditionneur

Afin de minimiser le nombre d'itérations, le système linéaire de la forme  $Ax = b$  est transformé un système préconditionné de la forme :

- $MAx = Mb$  si le préconditionneur est à gauche .
- $AMy = b$  avec  $x = My$  si le préconditionneur est à droite .

- $M_1^{-1}AM_2^{-1}z = M_1^{-1}b$  avec  $x = M_2^{-1}z$  si le préconditionneur est de la forme  $M = M_1M_2$ . Dans ce cas-là, on peut aussi écrire le système préconditionné :  $M_1AM_2z = M_2b$  avec  $x = M_1z$ .

Un préconditionneur doit satisfaire certaines conditions.

- Il doit être une bonne approximation de  $A^{-1}$  sous certains aspects,
- Sa construction ne doit pas être trop coûteuse. Il ne doit pas prendre trop de place mémoire.
- Le système préconditionné doit être plus facile à résoudre.

Il existe plusieurs manières de construire une telle matrice. Le but de ce rapport n'est pas de dresser une liste exhaustive des différents préconditionneurs. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur en particulier à [5] et à [3]. Nous allons nous intéresser exclusivement à la construction de préconditionneurs de type SPAI. Avant de décrire la construction de  $M$ , remarquons que la matrice  $A$  obtenue après discrétisation de l'équation intégrale associée au problème de conducteur parfait (EFIE), possède une structure particulière. Cette matrice a un petit nombre d'éléments d'amplitude importante. La figure FIG.1 donne le profil des coefficients les plus forts de la matrice  $A$  dans le cas d'une sphère.

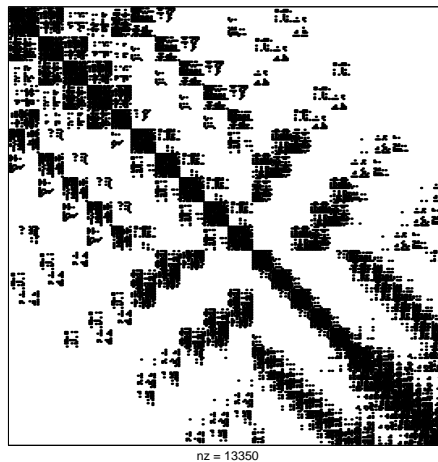


FIG. 1 – Profil des plus importantes entrées de  $A$

Sur la figure FIG.1, on a dessiné le profil de la matrice  $B$  obtenue en normalisant  $A$  de telle sorte que  $\max_{i,j} |B_{i,j}| = 1$  et en ne gardant que les coefficients d'amplitude supérieurs à  $10^{-2}$ . On remarque que les degrés de liberté proches sont fortement couplés. De plus, cette matrice est creuse (taux de remplissage de l'ordre de 1.8%). Ceci laisse envisager la possibilité de pouvoir creuser la matrice  $A$  en ne gardant que les coefficients d'amplitude élevée.

Les préconditionneurs vont être construits à partir de cette approximation creuse de  $A$  notée par la suite  $\tilde{A}$ . Il existe plusieurs méthodes pour définir le profil de  $\tilde{A}$ . Le paragraphe suivant va en proposer quelques unes.

## 1.1 Profil creux de $\tilde{A}$

On peut envisager différentes heuristiques pour déterminer le profil de  $\tilde{A}$ .

- On fixe un entier  $k$  avec  $k \leq n$ ,  $n$  étant la taille du système. On choisit les  $k$  plus grandes valeurs de chaque colonne de  $A$  en valeur absolue.  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des  $(i, j)$  ainsi définis, i.e.  $k \times n$  éléments.
- Pour chaque colonne, on trouve les indices de ligne des  $k$  plus grands coefficients en valeur absolue, puis pour chaque ligne d'indice  $i$  appartenant à l'ensemble précédent, on exécute la même recherche sur la colonne  $i$ . Les nouveaux indices de lignes trouvés s'ajoutent aux précédents pour déterminer la structure des éléments non nuls de chaque colonne.

Cette heuristique peut être étendue de façon claire en effectuant plusieurs itérations au lieu d'une seule. Cependant pour préserver le caractère creux de la matrice, le nombre d'éléments est réduit d'un facteur 2 à chaque itération. Généralement deux itérations sont suffisantes.

- On choisit une valeur seuil  $\epsilon \in [0, 1]$  et on choisit la position  $(i, j)$  dans la représentation des non zéros de  $M$  si

$$|a_{ij}| > \epsilon \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

Cette manière de construire le profil de  $\tilde{A}$  est appelée heuristique de Kolotilina.

Par la suite, seule la première méthode est gardée pour construire la matrice  $\tilde{A}$ . Nous allons maintenant nous intéresser à la construction d'un préconditionneur à droite de type SPAI. La démarche pour un préconditionneur à gauche reste identique.

## 1.2 Minimisation

La construction du préconditionneur de type SPAI est basée sur des techniques de minimisation de la norme de Frobenius sous certaines contraintes en particulier des contraintes liées à la définition du profil de  $M$ . L'avantage de cette norme dite de Frobenius est de permettre de découpler le problème en  $n$  petits problèmes de moindres carrés où  $n$  est la taille du système de telle sorte que

$$\|I - \tilde{A}M\|_F^2 = \sum_{k=1}^n \|e_k - \tilde{A}m_{\bullet k}\|_2^2 \quad (1)$$

avec  $m_{\bullet k}$  le vecteur colonne associé à la  $k^{\text{ième}}$  colonne de  $M$  et  $e_k$  le  $k^{\text{ième}}$  vecteur unité ( $e_k = (\delta_{ki})_{1 \leq i \leq n}$ ).

Supposons que le profil du préconditionneur soit connu. On note  $\mathcal{U}$  ce profil défini par :

$$\mathcal{U} = \{(i, j); m_{ij} \neq 0; 1 \leq i, j \leq n\}$$

Pour chaque colonne  $k$  du préconditionneur, on considère l'ensemble l'ensemble  $J = \{i, (i, k) \in \mathcal{U}\}$ . On note  $\widehat{m}_k$  le vecteur de dimension  $\text{card}(J)$  ne contenant que les termes non nuls d'indices  $j \in J$  de  $m_{\bullet k}$ .

Pour résoudre l'équation (1), seules les colonnes de  $\tilde{A}$  indexées par  $J$  interviennent. Comme  $\tilde{A}$  est une matrice creuse, quelques lignes de la matrice  $\tilde{A}(:, J)$  sont nulles et doivent être éliminées. Notons  $I$  l'ensemble d'indices des lignes non nulles de  $\tilde{A}(:, J)$ .

Considérons la matrice obtenue en ne gardant que les colonnes d'indice  $j \in J$  et puis en éliminant les lignes nulles soit  $\hat{A} = \tilde{A}(I, J)$ . Si  $\hat{e}_j = e_j(I)$ , on est amené à résoudre alors le problème de moindres carrés suivant

$$\min_{\widehat{m}_j \in S_j} \|\hat{e}_i - \hat{A}\widehat{m}_j\|_2^2 \quad (2)$$

**Remarque 1** – *le problème des moindres carrés décrit par l'équation (2) est de taille plus petite que celui décrit par (1).*

–  *$\hat{A}$  contiendra seulement quelques lignes et colonnes de termes non nuls, le problème de moindres carrés aura une petite taille et pourra être résolu de façon efficace avec des techniques de matrices denses (comme des décompositions  $QR$ )*

### 1.3 Résolution du problèmes des moindres carrés

Posons maintenant  $n_1$  et  $n_2$ , le nombre d'éléments de  $I$  et  $J$ . Si  $\hat{A}$  est non singulière, le rang de  $\hat{A}$  est alors  $n_2$  et on peut définir une décomposition  $QR$  de  $\hat{A}$  :

$$\hat{A} = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$R$  est non singulière triangulaire supérieure  $n_2 \times n_2$ . Si on pose  $\hat{c} = Q^T \hat{e}_j$  la solution du problème de moindres carrés est de la forme :

$$\widehat{m}_j = R^{-1}c(1 : n_2); j \in [1, n]$$

### 1.4 Amélioration

On peut aussi augmenter l'efficacité du préconditionneur en rajoutant des termes à l'ensemble  $J$  de façon récurrente. On calcule le résidu :

$$r = A(:, J)\widehat{m}_j - \hat{e}_k.$$

Si  $r = 0$ ,  $m_k$  serait exactement la  $k^{ieme}$  colonne de  $A^{-1}$  et ne pourrait pas être amélioré. Supposons maintenant  $r \neq 0$  et nous allons en fait augmenter l'ensemble  $J$  pour réduire  $\|r\|_2^2$ . On choisit les indices  $j$  qui permettent de corriger ce résidu de telle sorte que

$$\min_{\mu_j} \|r + \mu_j A e_j\|_2 = \|r\|_2^2 - \frac{(r^T A e_j)^2}{\|A e_j\|_2^2}$$

soit le plus petit possible.

Cette procédure permet d'ajouter de nouveaux indices à  $J$  et de résoudre le problème des moindres carrés sans recalculer la décomposition  $QR$  en entier à chaque étape.

## 1.5 Choix du profil de $M$

Se pose maintenant le problème de la détermination de l'ensemble  $J$  pour chaque colonne du préconditionneur. Deux approches peuvent être faites. Le profil peut être fixé a priori suivant certains critères. Cette technique permet de garantir la structure creuse de  $M$  tout en essayant de "capturer" les éléments les plus élevés du préconditionneur. Elle permet aussi de prévoir l'espace mémoire nécessaire au stockage de  $M$  à priori. Cependant, elle peut se révéler très dépendante du problème traité. L'autre manière de construire le profil de  $M$  est une technique adaptative en essayant de trouver la meilleure structure de  $M$ . Cette dernière approche est généralement très efficace mais aussi très coûteuse.

Nous avons choisi de définir le profil de  $M$  à l'avance. Rappelons que l'une de nos exigences est que la construction du préconditionneur soit la moins coûteuse possible en tout cas négligeable devant le temps de résolution du problème de diffraction à traiter. Si cette condition est vérifiée et si le préconditionneur se révèle peu efficace, on espère pouvoir recommencer la construction de ce préconditionneur avec un coût de construction faible en changeant le profil.

## 2 Choix des stratégies pour le profil

Les surfaces des objets diffractants sont maillées à l'aide de triangles. Chaque degré de liberté noté par la suite  $ddl$  est le flux du courant à travers les arêtes communes à deux triangles. Le nombre de  $ddl$  est en général égal à  $3/2$  le nombre de triangles. De ce maillage en triangles, deux informations peuvent être déduites

- d'une part la connection des triangles entre eux qui, pour chaque arête, décrit l'ensemble des arêtes qui lui sont liées. On parle alors de voisinage topologique.
- d'autre part la position des points des triangles qui définissent pour chaque arête des arêtes localisées à une certaine distance. On parle de voisinage géométrique.

Ainsi on peut distinguer deux types de stratégies pour la construction du préconditionneur.

### 2.1 Stratégie topologique

#### A . Profil de $M$

Quand la géométrie est relativement régulière, seuls les  $ddl$  proches les uns aux autres au sens topologique peuvent entrer en interaction forte. La construction du profil de  $M$  peut s'appuyer sur ces informations topologiques. La structure de  $M$  est définie à travers la conception des voisins de niveau  $k$ . La figure FIG.2 montre la représentation hiérarchique du maillage en terme de niveau topologique. Au niveau 1, les voisins du  $ddl$  sont le  $ddl$  et les quatre  $ddl$  appartenant aux deux triangles connectés à l'arête sur laquelle ce  $ddl$  s'appuie. Au niveau 2, les voisins sont tous les voisins du niveau 1, plus les  $ddl$  appartenant aux triangles qui sont voisins aux deux triangles

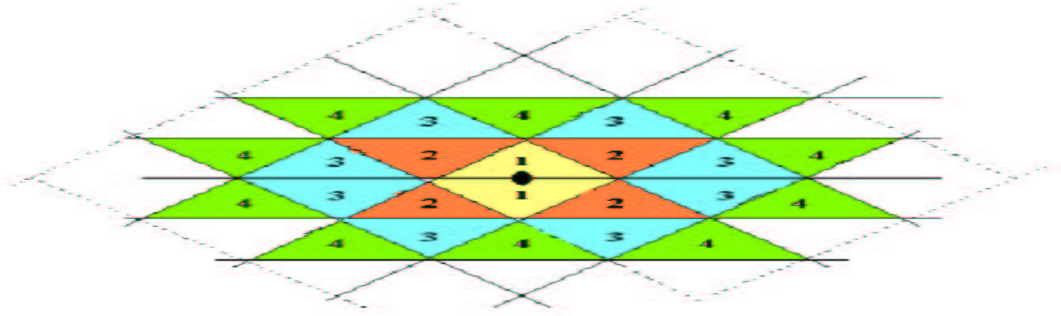


FIG. 2 – Schéma pour la stratégie topologique

considérés au niveau 1, et ainsi de suite... Cette stratégie est connue sous le nom : stratégie topologique. En pratique, 3 niveaux de voisinage suffisent pour construire un préconditionneur  $M$  efficace.

## B . Algorithme de construction

Ainsi, l'algorithme de construction est le suivant. Pour chaque colonne  $k$  ou pour chaque degré de liberté du maillage,

- on détermine les arêtes  $j$  voisines topologiques jusqu'au niveau 3 de l'arête  $k$ . On a ainsi déterminé l'ensemble  $J_k$ .
- On calcule de la matrice  $\hat{A}(I, J)$  en ne gardant que les contributions des arêtes voisines jusqu'au niveau 4 des arêtes  $j$ .
- On résout le problème de moindres carrés associé à chaque ddl.

**Remarque 2** *On a donc une résolution des moindres carrés pour chaque ddl.*

## 2.2 Stratégie géométrique

### A . Profil de $M$

Quand la géométrie n'est pas convexe, deux ddl éloignés au sens topologique peuvent entrer en interaction entre eux. Ils sont fortement couplés dans la matrice inverse. Contrairement au cas précédent où la construction du préconditionneur s'appuyait sur des considérations topologiques (pour un degré de liberté  $j$  donné, on ne considérait que les degrés de liberté connectés à  $j$  via le maillage), on va maintenant utiliser plutôt une notion de distance (pour un degré de liberté  $j$  donné, on ne considère que les degrés de liberté qui lui sont proches). Cette stratégie est connue sous le nom : stratégie géométrique.

Rappelons qu'on envisage d'utiliser ce préconditionneur dans le cadre d'une méthode itérative couplée à une méthode multipôle notée FMM ([8],[6],[1]) . Cette méthode FMM repose sur une approximation du noyau de Green  $G(x, y)$ . Comme ce

noyau présente une singularité, cette approximation n'est valable que si  $x$  et  $y$  sont assez distants. La FMM sépare donc le calcul des interactions entre éléments proches de celui des interactions d'éléments éloignés.

L'idée principale de la FMM est de partitionner le domaine de calcul  $\Gamma$  à l'aide de boîtes, et d'isoler les interactions proches en fonction de la proximité de ces boîtes. Les boîtes sont structurées sur plusieurs niveaux : au premier niveau un cube contenant tout le maillage  $\mathcal{T}_h$ , si on divise cette boîte en huit sous boîtes identiques, on forme le deuxième niveau, ainsi de suite jusqu'à un nombre de niveaux fixé. Notons que les boîtes vides ne sont pas prises en compte. Les boîtes du dernier niveau forment ainsi une partition de  $\mathcal{T}_h$ , et l'ensemble des boîtes est hiérarchisé par une structure arborescente naturelle. Une implémentation naturelle du préconditionneur géométrique va s'inspirer de la structure de boîtes de la méthode *FMM*. Nous dirons qu'un ddl appartient à une boîte si le centre de l'arête sur laquelle s'appuie le ddl, est contenu dans la boîte. Dès lors, en ne considérant que le dernier niveau, nous envisagerons comme *proches* éléments contenus dans deux boîtes ayant au moins un sommet en commun. Autrement dit un ddl est voisin au sens géométrique des ddl de cette même boîte et avec les ddl des 26 boîtes qui l'entourent.

Ces informations de voisinage sont utilisées, avec profit, pour calculer le profil de  $M$  ainsi que la structure de sparsité de  $A$  pour approcher l'inverse de la matrice  $A$ . Nous avons adopté le critère suivant pour le profil de  $M$ . La structure de non-zéros pour chaque colonne  $k$  du préconditionneur est de retenir tous les ddl voisins du ddl  $k$ , soit les ddl qui sont à l'intérieur de la boîte considérée, et ceux contenus dans les boîtes voisines.

Si le profil de  $M$  se révélait trop creux, il suffira donc de changer la taille des boîtes au dernier niveau pour augmenter la densité du préconditionneur.

## B . Algorithme de construction

- L'algorithme de construction est donc le suivant. Pour chaque boîte  $B$ ,
- on va considérer uniquement les ddl qui sont dans les boîtes voisines de la boîte  $B$ . On a ainsi déterminé l'ensemble  $J$  pour tous les ddl dans la boîte  $B$ .
  - On calcule de la matrice  $\widehat{A}(I, J)$  en ne gardant que les contributions des boîtes voisines de  $B$  ainsi que les voisines des voisines de  $B$ . La matrice  $\widehat{A}$  est construite en tenant compte les interactions entre les 125 boîtes voisines voisines de la boîte.
  - On fait une résolution par bloc  $QR$  des problème de moindres carrés pour tous les ddl de la boîte  $B$ . En effet, les problèmes de moindres carrés de la même boîte sont identiques, car ils sont définis en utilisant la même localisation des non-zéros de  $M$  et les mêmes éléments de la matrice  $\widehat{A}$ .

**Remarque 3** – *On a donc une résolution des moindres carrés pour chaque boîte et non plus pour chaque ddl*

- *Le préconditionneur a la structure sparse par bloc ; chaque bloc est dense et associé à une boîte.*

**Remarque 4** *La taille des boîtes au dernier niveau, dans la construction du préconditionneur géométrique, est un paramètre important . Elle est fixée par l'utilisateur. Elle permet aussi de contrôler le nombre de non zéros par colonne et par suite la densité du préconditionneur.*

### 3 Résultats numériques

Dans ce paragraphe, nous allons étudier la construction du préconditionneur en utilisant les deux stratégies définies précédemment à savoir la stratégie topologique et la stratégie géométrique. On va s'attacher à comparer les gains en temps et en place mémoire pour les deux types de préconditionneurs lors de leur construction. Ensuite, on s'intéressera à l'efficacité du préconditionneur en regardant son influence sur la résolution de problèmes du diffraction.

Seul le cas des conducteurs parfaits va être analysé. Il est bien connu que la formulation EFIE conduit à des matrices mal conditionnées et donc difficiles à inverser. Il nous a semblé intéressant de juger de l'efficacité du préconditionneur en utilisant seulement une formulation de type EFIE pour la résolution du problème de diffraction.

Dans tous les cas numériques traités, la solution du problème de diffraction est obtenue à l'aide d'une méthode itérative de type Gmres ([9] ou une nouvelle version [10]) couplée à une méthode multipôle.

Par la suite, les notations suivantes sont utilisées :

- $k$  le nombre d'onde et  $\lambda$  la longueur d'onde
- $d$  la taille des boîtes au dernier niveau
- $L_v$  le nombre de niveaux
- Top, abréviation pour noter que le préconditionneur est de type topologique

Afin de juger de l'efficacité du préconditionneur, différents types de géométries (sphère, cylindre, cavité cobra) ont été retenus.

Sauf cas contraire spécifié, tous les tests numériques ont été effectués sur Compaq SC40. C'est une machine travaillant à 1GHz et assurant 80Gflops en pic de performance. Elle dispose de 48Gb de mémoire vive et 1.5Tb d'espace disque.

#### 3.1 Sphère

La sphère est discrétisée en 3920 triangles. Le nombre d'arêtes est de 5880. Le vecteur d'onde  $k$  est fixé à  $6.7m^{-1}$  de telle sorte que le nombre de points par longueur est alors égal à 10. Le tableau TAB.1 donne les temps de construction du préconditionneur ainsi que son taux de remplissage lorsque l'on fait varier la taille des boîtes au dernier niveau. On note pour cet exemple, que le taux de remplissage est directement proportionnel à la taille des boîtes  $d$ . Lorsque celle ci augmente d'un facteur 2, le taux de remplissage chute d'un facteur 4. En regardant la dernière ligne du tableau TAB.1, on

	top	$lv = 4$	$lv = 5$	$lv = 6$
$d$	-	$0.27\lambda$	$0.13\lambda$	$0.07\lambda$
taux de remplissage	0.46%	5.2%	1.3%	0.33%
temps de construction	21s	4min16	1min02	1min06

TAB. 1 – Temps de construction du préconditionneur pour la sphère

constate que les temps de construction dans le cas du préconditionneur géométrique n'est ni proportionnel à sa taille ni à la taille des boîtes au dernier niveau. Comme on le verra plus loin(cf. paragraphe 3.2), ce temps de construction dépend d'un temps de résolution  $QR$  et du temps de formation de la matrice. Or ce dernier n'est pas lié directement à la taille des boîtes.

Sur ce tableau TAB.1, figure aussi le temps de construction du préconditionneur topologique noté *top* ainsi que son taux de remplissage. On note que ce dernier est pratiquement comparable à celui obtenu pour le préconditionneur géométrique où la taille des boîtes sont de l'ordre de  $0.07\lambda$ . On remarque que le coût de construction du préconditionneur topologique est de loin le plus faible.

La sphère est maintenant éclairée par une onde plane qui attaque la sphère par le haut et qui est polarisée en  $\hat{x}$  :

$$E^{inc}(x, y, z, t) = E_0 e^{-i(\omega t + kz)} \hat{x}, \quad E_0 = 1 \text{Vm}^{-1}.$$

Le tableau TAB.2 donne le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre le problème de diffraction. On a fixé le résidu à  $10^{-4}$ . Les paramètres de la méthode multipôle sont les mêmes pour tous les exemples présentés. On observe dans les trois premières colonnes que le nombre d'itérations est pratiquement le même, quel que soit le type de préconditionneur. De plus, il est très efficace. Le système exige 272 itérations pour atteindre le même résidu sans utilisation de préconditionneur. On constate aussi que le nombre d'itérations augmente drastiquement pour le dernier cas. Dans ce cas-ci, le préconditionneur géométrique se révèle très mauvais. Ceci est probable dû à une structure trop creuse (taux de remplissage inférieur à 0.3%).

Le tableau TAB.2 fournit aussi les temps de calcul pour la résolution. Notons que le temps d'un produit matrice vecteur est de l'ordre de 0s81. Si on note  $t_{mat}$  ce temps, le temps d'inversion est pratiquement égal à  $t_{inv} \approx n_{iter} t_{mat}$  où  $n_{iter}$  est le nombre d'itérations. Le coût de la résolution est essentiellement lié au coût d'un produit matrice-vecteur par la méthode multipôle. Et donc l'application du préconditionneur pour cette géométrie a un sur-coût faible. Plus précisément, on observe un sur-coût de l'ordre de quelques pour-cents ( $\leq 5\%$ ) pour un taux de remplissage inférieur à 5%. En revanche, lorsque le taux de remplissage devient trop élevé, le sur-coût généré par l'application du préconditionneur, devient plus important de l'ordre de quelques dizaines de pour-cents ( $\geq 20\%$  au delà d'un taux de remplissage de 6%). On note pour ce cas une chute seulement d'un facteur 1.2 pour le nombre d'itérations.

En conclusion, pour cette géométrie très régulière, les deux types de précondition-

	Top	$lv = 4$	$lv = 5$	$lv = 6$
taille des boîtes	-	$0.26\lambda$	$0.13\lambda$	$0.07\lambda$
Nombre d'itérations	33	26	33	240
Temps d'inversion	29s	29s	29s	3mn27

TAB. 2 – Nombre d'itérations nécessaires dans le cas d'une sphère et temps CPU

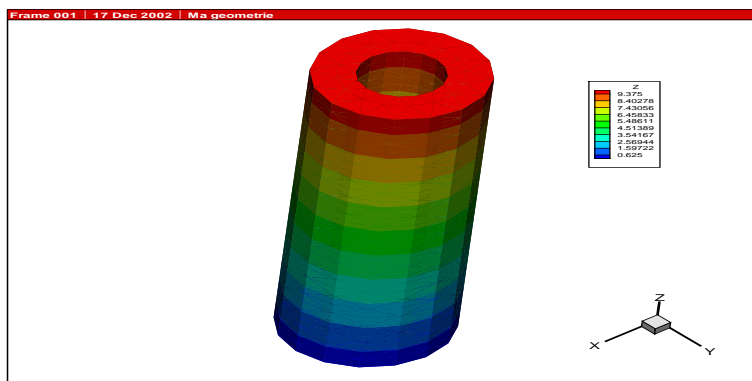


FIG. 3 – Forme du cylindre troué

neurs ont à peu près la même efficacité dès qu'ils présentent un taux de remplissage supérieur à 0.5%. Notons qu'en ce qui concerne le préconditionneur géométrique, la taille des boîtes au dernier niveau permet d'ajuster au mieux le taux de remplissage et d'améliorer éventuellement l'efficacité du préconditionneur. Mais on constate que pour cette géométrie, le préconditionneur de type topologique se révèle le plus performant du point de vue du temps de construction et du taux de remplissage. Nous allons essayer de voir si cette conclusion se confirme quelle que soit la forme de l'obstacle ou si elle est liée à la structure très régulière de la sphère.

## 3.2 Cas du cylindre

On va maintenant considérer le cas d'un cylindre troué de rayon extérieur  $1m$  et de rayon intérieur  $0.5m$  (cf figure FIG.3). On va faire aussi varier la hauteur notée  $h$ . Dans un premier temps, nous allons étudier un maillage à peu de degrés de liberté qui va correspondre à une hauteur  $h$  égale à  $10m$  et ensuite considérer un maillage plus "gros" qui va représenter un cylindre de hauteur  $50m$ .

### A . Cas du cylindre à 3000 ddl

Le cylindre est discrétisé en 2048 triangles. Le nombre d'arêtes est de 3072. Le vecteur d'onde  $k$  est fixé égal à  $1.8 m^{-1}$ . La discrétisation est identique au cas précédent à savoir que le nombre de points par longueur d'onde est alors égal à 10.

	top	$lv = 4$	$lv = 5$	$lv = 6$	$lv = 7$
d	-	$\frac{\lambda}{3}$	$\frac{\lambda}{5}$	$\frac{\lambda}{11}$	$\frac{\lambda}{22}$
Nombre de boîtes	-	32	240	1144	1670
taux de remplissage	0.77%	33.19%	8.7%	1.66%	0.77%
Temps res/QR	-	15mn59s	1mn48s	5s17	1s46
Temps construction de A	-	1mn9s	1mn31s78	1mn39s80	1mn22s49
Temps Total	13s	17mn10s	3mn21s	1mn45s	1mn24s

TAB. 3 – Temps de construction du préconditionneur géométrique pour un petit cylindre

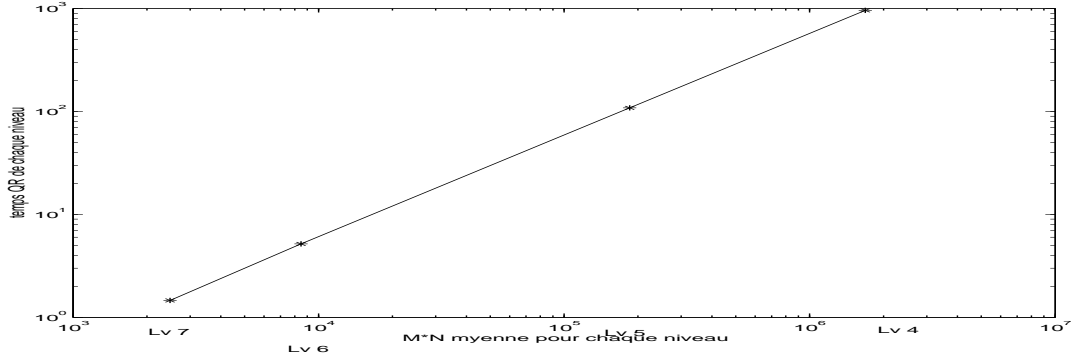


FIG. 4 – Temps de résolution pour les moindres carrés

Le tableau TAB.3 donne le taux de remplissage pour les préconditionneurs de type géométrique. On remarque que maintenant le taux de remplissage n'est plus directement proportionnel à la taille de boîtes au dernier niveau. Ceci est lié à la forme spécifique de l'obstacle.

Le tableau TAB.3 fournit aussi le temps de construction du préconditionneur. De nouveau, on constate que la construction du préconditionneur topologique est la moins coûteuse en temps de calcul. En ce qui concerne le préconditionneur géométrique, on remarque que sa construction n'est toujours pas liée à sa taille et donc à la taille des boîtes au dernier niveau. Rappelons que sa construction est réalisée suivant deux étapes : l'une est la détermination de la matrice et l'autre la résolution du problèmes des moindres carrés par l'algorithme  $QR$  comme cela a été expliqué dans le paragraphe précédent. Nous avons différencié ces deux temps de calcul à savoir le temps de construction de la matrice  $\hat{A}$  cumulé sur toutes les boîtes et le temps de la résolution  $QR$  du problème des moindres carrés pour toutes les boîtes. Ces deux temps pour cet exemple, sont donnés dans le tableau TAB.3. Nous constatons que le temps de construction de  $\hat{A}$  est pratiquement constant et varie peu en fonction de la taille de la boîte au dernier niveau. Pour des taux de remplissage inférieurs à quelques pour-cents, ce temps est même prépondérant devant le temps de résolution  $QR$ . Mais il devient négligeable dès que le taux de remplissage est très élevé. Il est à noter que la construction de la matrice  $\hat{A}$  n'est pas optimisée à l'heure actuelle.

	Top	$lv = 4$	$lv = 5$	$lv = 6$	$lv = 7$
d	–	$\frac{\lambda}{3}$	$\frac{\lambda}{5}$	$\frac{\lambda}{11}$	$\frac{\lambda}{22}$
taux de remplissage	0.78	33.19	8.7	1.66	0.77
Nombre d'itérations	480	15	70	168	218
Temps d'inversion	3mn25s	10s98	34s15	1mn12s	1mn36s

TAB. 4 – Nombre d'itérations pour le petit cylindre

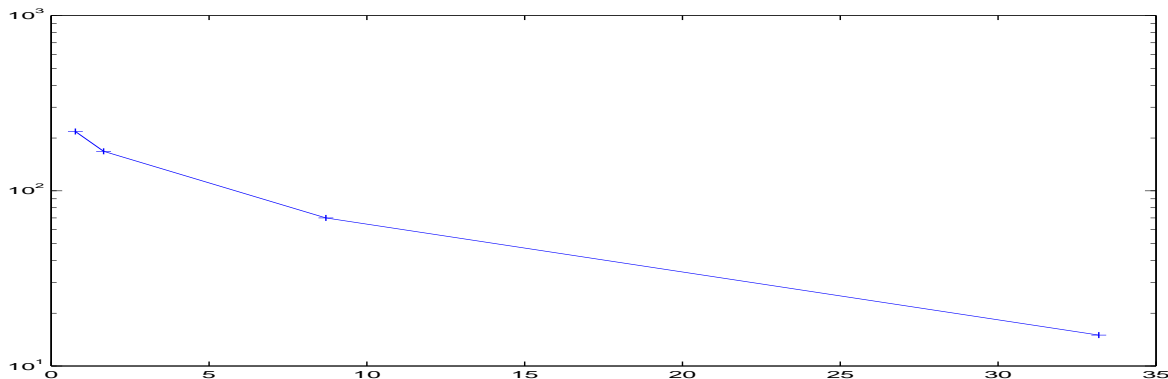


FIG. 5 – Nombre d'itérations en fonction du taux de remplissage pour le préconditionneur géométrique

En ce qui concerne le temps de résolution  $QR$  pour toutes les boîtes, on trouve que ce temps est proportionnel à la valeur moyenne pour toutes les boîtes du produit  $M \times N$  où  $M$  et  $N$  sont respectivement, le nombre de lignes et de colonnes de la matrice  $\hat{A}$ . La figure FIG.4 donne ce temps de la résolution par  $QR$  en fonction cette valeur moyenne pour les différentes tailles de boîtes au dernier niveau.

Le cylindre est éclairé par la même onde incidente à savoir une onde plane qui l'attaque par le haut. Le tableau TAB.4 donne le nombre d'itérations ainsi que le temps CPU pour la résolution du problème de diffraction. Le résidu est maintenant fixé à  $0.14 \cdot 10^{-03}$ . On remarque que pour cette géométrie contrairement au cas de la sphère, le préconditionneur topologique n'est plus du tout efficace. Le nombre d'itérations est maintenant important et supérieur à 300. On va étudier maintenant l'efficacité d'un préconditionneur de type géométrique. On remarque qu'à taux de remplissage identique (cf. premières et dernières colonnes de TAB.4), le préconditionneur géométrique se révèle plus efficace. Le nombre d'itérations chute et on observe un gain de l'ordre de 2 en temps de calcul. La figure FIG.5 donne le nombre d'itérations en fonction du taux de remplissage .

Si on augmente un peu le taux de remplissage du préconditionneur géométrique par exemple d'un facteur 11, on observe une chute du nombre d'itérations d'un facteur de 3. Le préconditionneur géométrique se révèle performant dès que le taux de remplissage dépasse les quelques pour-cents. Ce qui correspond à des tailles de boîte de taille comprises entre  $\lambda/5$  et  $\lambda/11$  .

	$\ell v = 8$	$\ell v = 9$
d	$0.22\lambda$	$0.11\lambda$
taux de remplissage	0.55%	0.08%
Temps Total	1h5mn52s	16mn47s

TAB. 5 – Temps de construction du préconditionneur pour un cylindre allongé

On remarque donc que même si la construction du préconditionneur devient plus coûteuse en temps de calcul (on note un facteur 15 par rapport au temps de construction du préconditionneur topologique), on observe un gain en temps de résolution de l'ordre de 6. On note que pour un calcul mono-incidence, on n'observe pas de gain en temps de calcul. En revanche, lors d'une résolution multi-incidences par exemple, comme le préconditionneur peut être construit une fois pour toutes, la résolution utilisant le préconditionneur de type géométrique va être de loin la plus rapide.

**En conclusion :** pour cette géométrie, seul le préconditionneur géométrique est efficace dès que son taux de remplissage devient de l'ordre de quelques pour-cents. Sa construction est relativement coûteuse. Mais, il semble bien adapté à une résolution multi-incidences.

Il est bien connu que la diffraction par une cavité reste un problème difficile à résoudre. Avant de regarder ce problème, nous allons considérer le cas d'un cylindre plus allongé et regarder l'efficacité du préconditionneur géométrique.

## B . Cas d'un cylindre : 51012 degrés de liberté

On va considérer un cylindre de hauteur  $h$  égale à  $50m$ . Le cylindre est maillé avec 34008 triangles, 17116 noeuds et 51012 arêtes. Le nombre d'onde  $k$  est choisi égal à  $3.6m^{-1}$ . La discrétisation est alors de 10 points par longueur d'onde. Le tableau TAB.5 suivant donne le temps total de la construction du préconditionneur. On remarque que pour un taux de remplissage de 0.55%, il faut plus d'une heure de calcul. Par comparaison pour le petit cylindre, il fallait moins d'une minute. On remarque les temps de construction sont essentiellement dus maintenant au temps de résolution  $QR$  par bloc.

Le tableau TAB.6 suivant donne le nombre d'itérations et le résidu atteint au bout de 300 itérations ainsi que le temps de calcul.

Le temps d'un produit matrice-vecteur est égal pour ce cas à 13s, ce qui donne pour 300 itérations un temps total de 1h5min. La différence avec le temps total est due à l'application du préconditionneur (soit 6h pour  $\ell = 8$  et 1h pour  $\ell = 9$ ) dont le coût est directement lié au nombre de non-zéros de celui-ci (qui sont bien dans un rapport de 6). On se rend compte que l'application du préconditionneur a maintenant un coût non négligeable (soit 10s pour  $\ell = 9$  soit 71s pour  $\ell = 8$ ).

Le tableau TAB.7 donne le nombre d'itérations pour atteindre un résidu de  $0.98 \cdot 10^{-3}$  pour les deux types de préconditionneurs géométriques. Lorsque on fixe la taille des

	$lv = 8$	$lv = 9$
d	$0.22\lambda$	$0.11\lambda$
taux de remplissage	0.55%	0.08%
nombre de non-zéros du préconditionneur	14311140	2083660
Nombre d'itérations	300	300
Temps des itérations	<i>7h5mn43s</i>	<i>2h4mn9s</i>
le résidu	$0.88 \cdot 10^{-03}$	$0.98 \cdot 10^{-03}$

TAB. 6 – Nombre d'itérations et temps CPU pour le cylindre allongé

	$lv = 8$	$lv = 9$
d	$0.22\lambda$	$0.11\lambda$
taux de remplissage	0.55%	0.08%
Nombre d'itérations	265	300
Temps des itérations	<i>6h11mn</i>	<i>2h4mn9s</i>

TAB. 7 – Nombre d'itérations et temps CPU pour atteindre un résidu de  $0.98 \cdot 10^{-03}$  pour le cylindre allongé

boîtes de l'ordre de  $0.22\lambda$ , il faut 265 itérations pour atteindre ce résidu. Cela va alors demander un temps de calcul de l'ordre de *6h11min*. Le gain en itération (facteur 1.13) entre les deux cas présentés n'est pas suffisant pour compenser le sur-coût en temps de calcul dû à l'application du préconditionneur (facteur 7.1). La figure FIG.6 donne la valeur du résidu en fonction du nombre d'itérations pour les deux préconditionneurs. On constate que les deux courbes sont proches et que le gain en nombre d'itérations est faible. Il s'avère à nouveau (cf paragraphe sur la sphère , tableau TAB.2) que lorsque le taux de remplissage est trop important, la construction et l'application du préconditionneur devient coûteuse et que le gain en nombre d'itérations n'est pas significatif.

**En conclusion :** on peut dire que le préconditionneur géométrique se révèle assez efficace. Dans notre implémentation, la taille des boîtes au dernier niveau est le para-

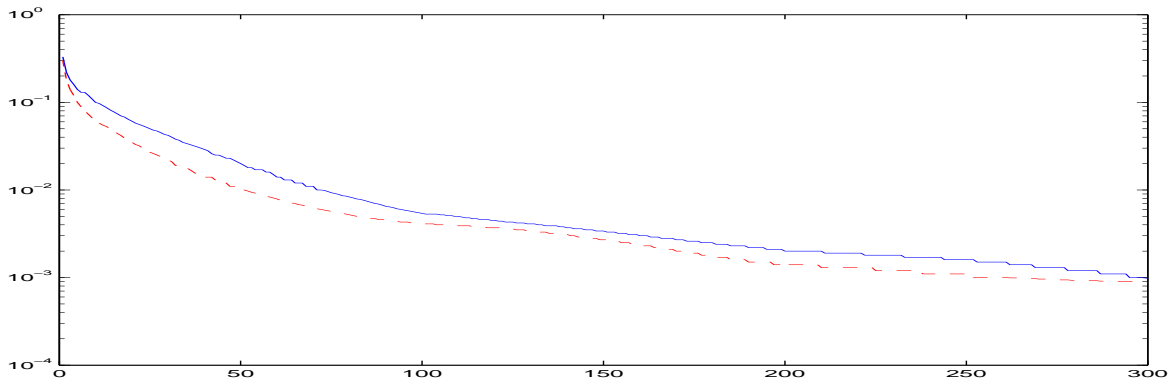


FIG. 6 – Convergence pour le cylindre allongé (- :  $d = 0.11\lambda$  , - =  $d = 0.22\lambda$ )

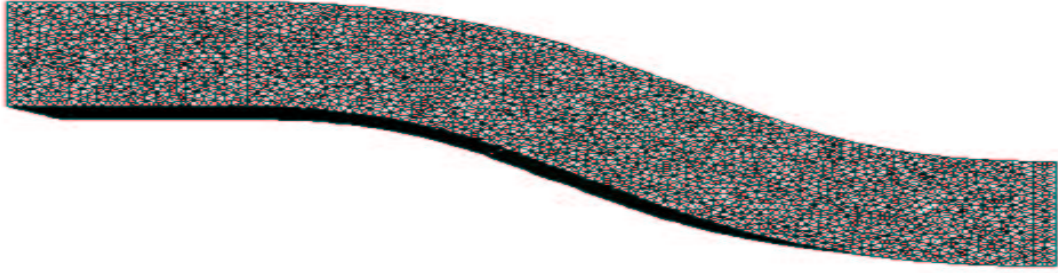


FIG. 7 – Maillage de la cavite Cobra

	top	$\ell = 6$	$\ell v = 7$
$d$	-	$0.24\lambda$	$0.12\lambda$
Nombre des non-zéros	309569	2629767	607357
taux de remplissage	0.22%	1.8%	0.42%
Nombre de boîte	-	632	2535
Temps Total	54s	4min56s	2min33s

TAB. 8 – Temps de construction du préconditionneur pour la cavité cobra

mètre important qui fixe le taux de remplissage du préconditionneur. Elle détermine aussi le temps d'application de ce préconditionneur. Ainsi, plus la taille de la boîte est grande plus le temps de construction du préconditionneur est important et plus le temps d'un produit préconditionneur -vecteur est grand. Et donc si la taille des boîtes devient trop grande, on n'observe pas un gain en nombre d'itérations qui puisse compenser à la hausse de temps d'application du préconditionneur. On peut conclure en disant qu'une taille de boîtes de l'ordre de  $\lambda/10$  semble assurer un gain assez important en nombre d'itérations sans entraîner un sur-coût trop important.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas difficile des cavités. Nous avons considéré le cas de la cavité cobra présentée comme cas tests au Workshop du JINA en 2000.

### 3.3 Effet de cavité

#### A . Cas d'un cobra 11939 ddl

On a maillé un cobra avec 7976 triangles, 6386 noeuds et 11989 arêtes, dont 50 sont libres. Le nombre d'onde  $k$  est choisi égal à  $83.7m^{-1}$ . Le tableau TAB.8 suivant donne le temps de construction du préconditionneur.

On fixe une onde plane incidente qui éclaire le cobra de la forme suivante

$$E^{inc}(\vec{x}, t) = (E_{\theta} \hat{\theta} + E_{\varphi} \hat{\varphi}) e^{-i(\omega t + k\hat{r} \cdot \vec{x})} \quad (3)$$

	top	$\ell v = 6$	$\ell v = 7$
Nombre d'itérations	300	240	274
Temps des itérations	22mn11s		17min
le résidu	$0.1210^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$

TAB. 9 – Nombre d'itérations pour la cavité cobra

(le vecteur d'onde est  $(-k\hat{r})$  avec

$$\hat{r} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

On a choisi

$$E_\theta = 1\text{Vm}^{-1}, \quad E_\varphi = 0\text{Vm}^{-1} \\ \theta = 90\text{degrés}, \quad \varphi = 0\text{degrés}$$

Le tableau suivant TAB.9 donne le temps d'itération, le nombre d'itérations et le résidu commis au bout de ces itérations . Pour ce problème, seul le préconditionneur géométrique permet d'atteindre un résidu de  $10^{-4}$ . Lorsque la taille de boîtes est de l'ordre de  $\lambda/10$ , le temps d'inversion est uniquement dû au temps du produit matrice-vecteur. L'application du préconditionneur a un sur-coût négligeable. Si on compare avec le cas du cylindre allongé à 51052 ddl, on voit que pour des tailles de boîtes comparables de l'ordre de  $\lambda/10$ , le temps d'un produit préconditionneur -vecteur est maintenant de l'ordre de 0.5s alors que pour le cylindre, il était de l'ordre de 10s. Le facteur entre ces deux temps est lié au nombre de non-zéros des deux préconditionneur et au nombre de ddl.

## B . Cas d'un cobra 260951 ddl

On a maillé un cobra avec 174052 triangles, 99354 noeuds et 260951 arêtes, avec 92 arêtes libres. Le nombre d'onde  $k$  est choisi égal à  $356.05 m^{-1}$ . Ce qui correspond à une fréquence de l'ordre de 17Ghz. On va construire uniquement un préconditionneur géométrique. On fixe la taille des boîtes au dernier niveau égale à  $\lambda/10$ . Le temps de construction du préconditionneur géométrique est de l'ordre de 52min. Le taux de remplissage est faible de l'ordre de 0.015%.

Au bout de 300 itérations, on atteint un résidu de l'ordre de  $0.510^{-3}$ . Le temps d'un produit matrice-vecteur est de  $t_{mat} = 1\text{min}16\text{s}$  alors que le temps d'inversion est de l'ordre de  $t_{inv} = 6\text{h}42\text{min}23\text{s}$ . On note que pour ce cas,  $t_{inv}$  est uniquement dû au temps du produit matrice-vecteur. La figure FIG.8 donne la surface équivalente radar bistatique.

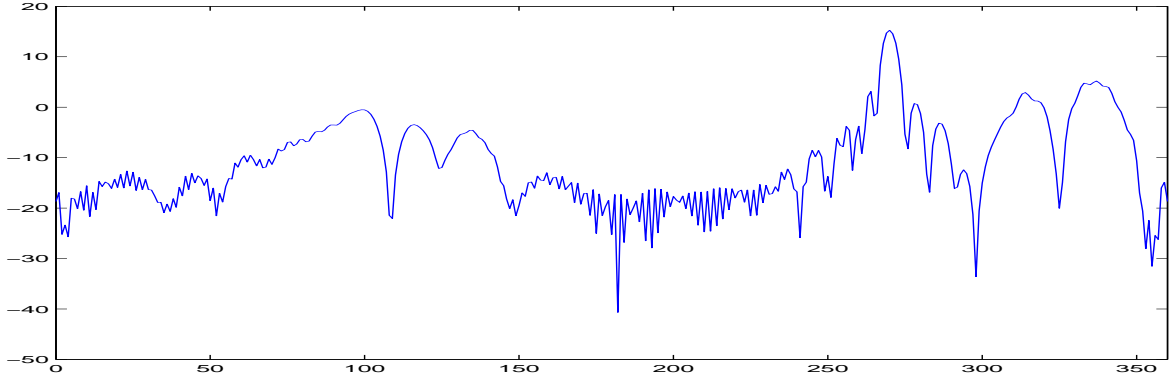


FIG. 8 – Surface équivalente radar bistatique pour  $F = 17\text{Ghz}$

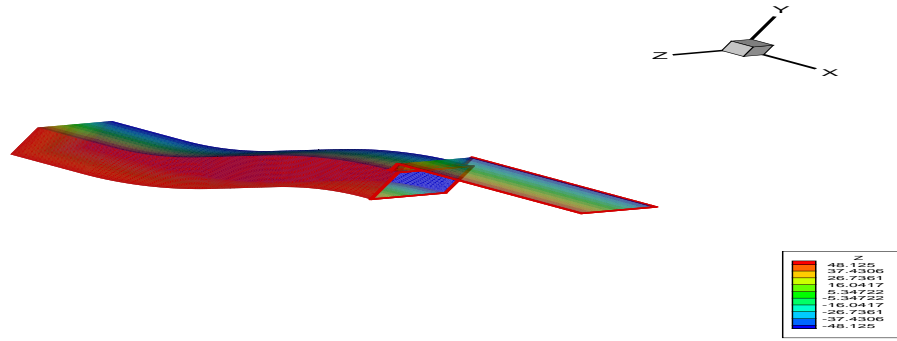


FIG. 9 – Vue d'un cobra avec casquette

### C . Cas d'un cobra avec casquette

On a maillé un cobra avec 40629 triangles, 20489 noeuds et 61155 arêtes, avec 110 arêtes libres (cf figure FIG.9). Le nombre d'onde  $k$  est choisi égal à  $209.4\text{ m}^{-1}$ . Ce qui correspond à une fréquence de l'ordre de  $2\text{Ghz}$ . On va construire uniquement un préconditionneur géométrique. On fixe la taille des boîtes au dernier niveau égale à  $\lambda/20$ . Le temps de construction du préconditionneur géométrique est de l'ordre de  $10\text{min}$ . Le taux de remplissage est faible de l'ordre de  $0.14\%$ .

On éclaire avec la même onde incidente que dans les cas précédent. Au bout de 300 itérations, on atteint un résidu de l'ordre de  $0.510^{-3}$ . Ce résidu est pratiquement identique à celui obtenu sans casquette. (On avait obtenu, pour un cobra sans casquette avec un nombre d'inconnues de l'ordre de 48600, un résidu de  $0.210^{-3}$  au bout de 300 itérations). On note donc que le problème avec ou sans casquette reste un problème difficile à résoudre. La convergence est certes améliorée avec le préconditionneur de type géométrique mais elle reste très lente.

Le temps d'un produit matrice-vecteur est de  $t_{mat} = 28s$  alors que le temps d'inversion est de l'ordre de  $t_{inv} = 2h25min58s$ . On note que pour ce cas,  $t_{inv}$  est uniquement dû au temps du produit matrice-vecteur.

Lorsque l'on augmente le nombre d'inconnues, la convergence est plus lente. On a maillé un cobra avec casquette avec 119933 triangles, 60276 noeuds et 180274 arêtes. Le nombre d'onde est fixé égal à  $356m^{-1}$ . Un préconditionneur géométrique est construit en fixant la taille des boîtes au dernier niveau égale à  $0.15 \lambda$ . On obtient un résidu de l'ordre de  $0.210^{-2}$  au bout de 200 itérations.

## 4 Conclusion

Nous avons étudié l'accélération de la résolution par méthode itérative de systèmes linéaires associés à l'équation EFIE. Le temps de résolution de ce système par une méthode itérative couplée à une méthode multipôle est directement lié au nombre d'itérations. Pour diminuer ce dernier, on peut utiliser des préconditionneurs de type SPAI. Après avoir rappelé brièvement les principes de construction d'une telle matrice, nous nous sommes intéressés à deux types de préconditionneurs SPAI, reprenant les idées développés par B. Carpentieri dans sa thèse [2]. L'un est dit topologique et s'appuie sur une définition de voisinage lié au maillage alors que l'autre est dit géométrique et utilise plutôt une notion de distance entre les degrés de liberté. Une implémentation naturelle de ce préconditionneur géométrique repose sur la structure en boîtes de la méthode multipôle. Un paramètre important est alors la taille des boîtes au dernier niveau.

Nous avons ensuite étudié les diverses performances de ces préconditionneurs sur différents types de géométrie. Le cas académique de la sphère a d'abord retenu notre attention. Pour cette géométrie très régulière, il s'avère que le préconditionneur topologique est le plus performant à la fois en temps de construction et en place mémoire. Il est très efficace pour faire diminuer le nombre d'itérations lors de la résolution du problème de diffraction. Cette chute du nombre d'itérations peut aussi être observée avec l'application d'un préconditionneur géométrique, mais pour un taux de remplissage plus élevé. L'efficacité de ce préconditionneur géométrique est visible dès que la taille des boîtes au dernier niveau est de l'ordre de  $\lambda/10$ . Il nous est alors apparu intéressant de voir si l'efficacité du préconditionneur topologique était liée à la forme de l'obstacle ou non. Nous avons étudié le cas d'un cylindre troué. Pour cette géométrie, il se trouve que le préconditionneur géométrique est le plus performant. On note que lorsque le taux de remplissage est trop grand, le temps de construction et surtout le temps d'application de ce préconditionneur deviennent trop élevés et ne peuvent être compensés par la décroissance du nombre d'itérations. Il semble qu'un bon compromis entre le temps d'application du préconditionneur et la diminution du nombre d'itérations soit obtenu pour des tailles de boîtes de l'ordre de  $\lambda/10$ .

Pour juger de l'efficacité de ce type de préconditionneur, nous avons étudié le cas difficile de la diffraction d'une cavité de type cobra. Une fois encore, on montre que le préconditionneur géométrique est performant et permet d'atteindre des résidus de l'ordre de  $10^{-3}$ .

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Quelques éléments sur la construction du préconditionneur</b>	<b>1</b>
1.1	Profil creux de $\tilde{A}$ . . . . .	3
1.2	Minimisation . . . . .	3
1.3	Résolution du problèmes des moindres carrés . . . . .	4
1.4	Amélioration . . . . .	4
1.5	Choix du profil de $M$ . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Choix des stratégies pour le profil</b>	<b>5</b>
2.1	Stratégie topologique . . . . .	5
	A . Profil de $M$ . . . . .	5
	B . Algorithme de construction . . . . .	6
2.2	Stratégie géométrique . . . . .	6
	A . Profil de $M$ . . . . .	6
	B . Algorithme de construction . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>8</b>
3.1	Sphère . . . . .	8
3.2	Cas du cylindre . . . . .	10
	A . Cas du cylindre à 3000 ddl . . . . .	10
	B . Cas d'un cylindre : 51012 degrés de liberté . . . . .	13
3.3	Effet de cavité . . . . .	15
	A . Cas d'un cobra 11939 ddl . . . . .	15
	B . Cas d'un cobra 260951 ddl . . . . .	16
	C . Cas d'un cobra avec casquette . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>18</b>

## Table des figures

1	Profil des plus importantes entrées de $A$ . . . . .	2
2	Schéma pour la stratégie topologique . . . . .	6
3	Forme du cylindre troué . . . . .	10
4	Temps de résolution pour les moindres carrés . . . . .	11
5	Nombre d'itérations en fonction du taux de remplissage pour le préconditionneur géométrique . . . . .	12
6	Convergence pour le cylindre allongé (- : $d = 0.11\lambda$ , - = $d = 0.22\lambda$ ) . .	14
7	Maillage de la cavite Cobra . . . . .	15
8	Surface équivalente radar bistatique pour $F = 17Ghz$ . . . . .	17
9	Vue d'un cobra avec casquette . . . . .	17

## Liste des tableaux

1	Temps de construction du préconditionneur pour la sphère . . . . .	9
2	Nombre d'itérations nécessaires dans le cas d'une sphère et temps CPU	10
3	Temps de construction du préconditionneur géométrique pour un petit cylindre . . . . .	11
4	Nombre d'itérations pour le petit cylindre . . . . .	12
5	Temps de construction du préconditionneur pour un cylindre allongé . .	13
6	Nombre d'itérations et temps CPU pour le cylindre allongé . . . . .	14
7	Nombre d'itérations et temps CPU pour atteindre un résidu de $0.98 \cdot 10^{-03}$ pour le cylindre allongé . . . . .	14
8	Temps de construction du préconditionneur pour la cavité cobra . . . .	15
9	Nombre d'itérations pour la cavité cobra . . . . .	16

## Références

- [1] Q. Carayol. Développement et analyse d'une méthode multipôle multiniveau pour l'électromagnétisme. *PhD Thesis Paris-VI*, 2002.
- [2] B. Carpentieri. *Sparse preconditioners for dense complex linear systems in electromagnetic applications*. Ph.D. dissertation, INPT, April 2002. TH/PA/02/48.
- [3] B. Carpentieri, I. S. Duff, and L. Giraud. Sparse pattern selection strategies for robust Frobenius-norm minimization preconditioners in electromagnetism. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 7(7-8) :667–685, 2000.
- [4] B. Carpentieri, I.S. Duff, L. Giraud, and M. Magolu monga Made. Sparse symmetric preconditioners for dense linear systems in electromagnetism. *Numerical Linear Algebra with Applications*, To Appear(?) :??-??, 2003.
- [5] B. Carpentieri, I.S. Duff, and L.Giraud. Experiments with sparse preconditioning of dense problems from electromagnetic applications. Technical Report TR/PA/00/04, CERFACS, Toulouse, France, 1999.
- [6] Eric Darve. The fast multipole method : numerical implementation. *J. Comput. Phys.*, 160(1) :195–240, 2000.
- [7] Ben Dembart and Elizabeth Yip. Accuracy of fast multipole methods for maxwell's equations. *IEEE Computational Science & Engineering*, 5(3) :48–55, July-September 1998.
- [8] Michael A. Epton and Benjamin Dembart. Multipole translation theory for the three-dimensional Laplace and Helmholtz equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16(4) :865–897, 1995.
- [9] V. Frayssé, L. Giraud, and S. Gratton. A set of GMRES routines for real and complex arithmetics. Technical report, Cerfacs TR/PA/97/49, Toulouse, France, 1997.
- [10] V. Frayssé, L. Giraud, S. Gratton, and J. Langou. A set of GMRES routines for real and complex arithmetics on high performance computers. Technical Report TR/PA/03/3, CERFACS, Toulouse, France, 2003.
- [11] G. Sylvand. *Résolution Itérative de Formulation Intégrale pour Helmholtz 3D : Applications de la Méthode Multipôle à des Problèmes de Grande Taille*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.