

**Résolution des problèmes de diffraction  
d'ondes électromagnétiques avec  
condition d'impédance par méthodes intégrales**

**F. Silva**

Juin-Juillet 2003

**CERFACS REPORT WN/EMC/03/53**

---

# **Résolution des problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques avec condition d'impédance par méthodes intégrales**

Stage d'initiation à la Recherche

Magistère 2<sup>o</sup> Année EEA

2 Juin - 25 Juillet 2003

---

SILVA Fabrice

Stage réalisé au service EMC - CERFACS Toulouse  
et encadré par Abderrahmane BENDALI

dans le cadre du Magistère EEA 2<sup>o</sup> année  
de l'Université Paris-sud et de l'ENS Cachan

---



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Position du problème</b>	<b>6</b>
1.1 Description physique . . . . .	6
1.2 Equations de Maxwell . . . . .	7
1.3 Condition de radiation . . . . .	7
1.4 Condition d'impédance . . . . .	7
1.4.1 Métal recouvert d'une fine couche de diélectrique . . . . .	8
1.4.2 Métal imparfaitement conducteur . . . . .	9
1.4.3 Surface métallique rugueuse . . . . .	10
1.5 Condition d'absorption . . . . .	10
<b>2 Méthodes intégrales</b>	<b>12</b>
2.1 Courants équivalents . . . . .	12
2.2 Théorème de représentation intégrale . . . . .	13
2.3 Discrétisation . . . . .	14
2.3.1 Discrétisation de la géométrie . . . . .	14
2.3.2 Éléments de Raviart-Thomas . . . . .	15
2.3.3 Principe variationnel et méthode de Galerkin . . . . .	17
<b>3 Formulations à un courant</b>	<b>19</b>
3.1 Formulation directe . . . . .	19
3.1.1 Obtention . . . . .	19
3.1.2 Propriétés . . . . .	20
3.1.3 Discrétisation . . . . .	20
3.2 Formulation EFIE . . . . .	20
3.2.1 Obtention . . . . .	21
3.2.2 Propriétés . . . . .	21
3.2.3 Unicité de la solution . . . . .	21
<b>4 Formulations à deux courants</b>	<b>23</b>
4.1 Formulation de Bachelot, Gay et Lange . . . . .	23
4.1.1 Obtention . . . . .	23
4.1.2 Propriétés . . . . .	24
4.1.3 Discrétisation . . . . .	24
4.2 Formulation de Bendali . . . . .	25
4.2.1 Obtention . . . . .	26

4.2.2	Propriétés . . . . .	27
4.2.3	Discrétisation . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Formulation de Després</b>	<b>31</b>
5.1	L'espace des solutions $\mathcal{W}$ . . . . .	31
5.1.1	Définition . . . . .	31
5.1.2	Paramétrisation . . . . .	32
5.2	La fonctionnelle à minimiser . . . . .	34
5.2.1	Construction de $I(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$ . . . . .	34
5.2.2	Reformulation à l'aide des paramètres de $\mathcal{W}$ . . . . .	35
5.2.3	Minimisation de $L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}; \mathbf{v})$ . . . . .	36
5.3	Généralisation à une impédance quelconque . . . . .	37
5.4	Résolution du système . . . . .	37
	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>
	<b>Annexes</b>	<b>III</b>
	<b>Présentation du Cerfacs</b>	<b>III</b>

# Introduction

*Ce stage d'initiation à la recherche a été effectué au sein de l'équipe EMC (Electromagnetism and Control) du CERFACS (Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique) sous la direction de Abderrahmane BENDALI.*

*Ce stage se place dans le cadre de l'étude des problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques avec condition d'impédance en régime harmonique. L'intérêt de cette étude se trouve dans des applications telles que la furtivité radar, ou le rayonnement d'antennes.*

*Plusieurs méthodes de calculs existent pour résoudre de manière numérique approchée ces problèmes. Par rapport à des méthodes types éléments-finis de volume, les méthodes intégrales par éléments-finis de frontière semblent plus appropriées pour le calcul du champ diffracté. Elles permettent d'abord de ramener un problème volumique à un problème surfacique, ce qui est particulièrement intéressant dans le cas d'obstacles de géométrie complexe (avions pour la furtivité radar). Elles ont aussi l'avantage décisif sur les schémas éléments-finis de ne pas introduire de dispersion.*

*Plusieurs formulations ont déjà été proposées et implémentées. L'objectif de ce stage est de réaliser une synthèse des différents travaux réalisés à ce jour. Dans un premier chapitre, nous donnerons le modèle mathématique du problème physique étudié en mettant en relief les hypothèses utilisées. Puis, dans le chapitre 2, nous présenterons le point clé des méthodes intégrales, à savoir le théorème de représentation intégrale qui permet de ramener le problème volumique à un problème surfacique qui est ensuite discrétisé par une méthode d'éléments-finis de frontière. Nous aborderons ensuite, une à une, les différentes formulations, en mettant en évidence les points forts et les points faibles de chacune aussi bien du point de vue théorique que du point de vue de la résolution numérique.*

# Chapitre 1

## Position du problème

### 1.1 Description physique

Considérons un obstacle placé dans le vide. Il occupe le volume  $\Omega_{int}$ . On note  $\Omega_{ext}$  le domaine extérieur séparé de  $\Omega_{int}$  par la frontière  $\Gamma$  de l'obstacle. Plusieurs situations physiques pourront être traitées par le cadre mathématique donné dans la suite : obstacle métallique recouvert d'une fine couche de diélectrique, obstacle métallique imparfaitement conducteur, obstacle métallique rugueux (Cf. section 1.4).

On considère par exemple un rayonnement créé par une distribution de sources  $(\mathbf{J}_a, \mathbf{M}_a)$  que l'on suppose non perturbées par la présence de l'obstacle. L'onde électromagnétique créée par  $(\mathbf{J}_a, \mathbf{M}_a)$  est alors décrite par les champs  $(\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc})$ .

On se propose ici de déterminer quel est le champ  $(\mathbf{E}^{diff}, \mathbf{H}^{diff})$  diffracté par l'obstacle dans le domaine  $\Omega_{ext}$ .

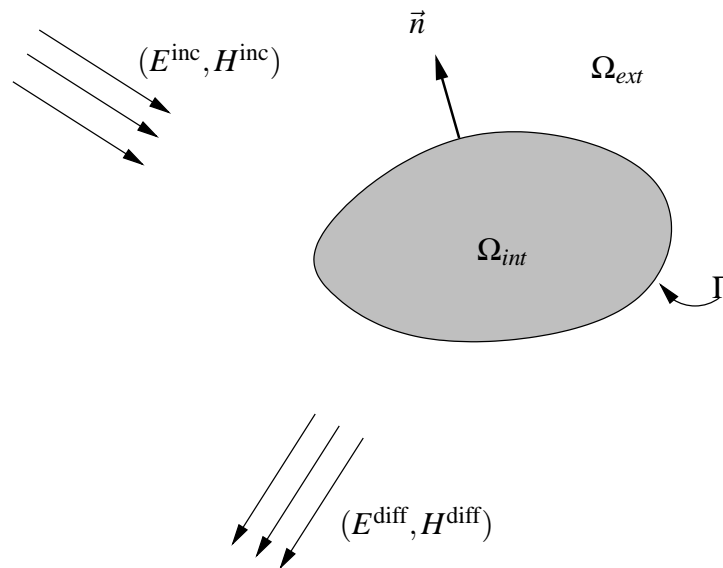


FIG. 1.1 – Problème initial : Notations

## 1.2 Equations de Maxwell

Les champs incidents vérifient les équations de Maxwell dans  $\Omega_{\text{ext}} \cup \Omega_{\text{int}}$

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{E}^{\text{inc}} - ikZ_0 \mathbf{H}^{\text{inc}} = -\mathbf{M}_a, \\ \text{rot} \mathbf{H}^{\text{inc}} + ikZ_0^{-1} \mathbf{E}^{\text{inc}} = \mathbf{J}_a, \end{cases} \quad (1.1)$$

en régime harmonique avec une dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$ . Dans ces équations,  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  est l'impédance du vide et  $k$  le nombre d'onde relié à la pulsation par  $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$

$$kZ_0 = \omega\mu_0 \quad \text{et} \quad kZ_0^{-1} = \omega\epsilon_0.$$

Les sources  $(\mathbf{J}_a, \mathbf{M}_a)$  intervenant également dans les équations de Maxwell pour les champs totaux  $(\mathbf{E}^{\text{ext}}, \mathbf{H}^{\text{ext}})$ , il est intéressant de travailler sur les champs diffractés  $(\mathbf{E}^{\text{diff}}, \mathbf{H}^{\text{diff}})$ . Ceux-ci vérifient en effet les équations de Maxwell homogènes sur  $\Omega_{\text{ext}}$

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{E}^{\text{diff}} - ikZ_0 \mathbf{H}^{\text{diff}} = 0, \\ \text{rot} \mathbf{H}^{\text{diff}} + ikZ_0^{-1} \mathbf{E}^{\text{diff}} = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Pour le problème en champ diffracté, il nous reste à définir :

- une condition de radiation à l'infini, qui doit traduire la propagation de l'énergie portée par l'onde diffractée de l'obstacle vers l'infini ;
- une condition aux limites sur la frontière  $\Gamma$  de l'obstacle.

## 1.3 Condition de radiation

Le champ diffracté solution de notre problème doit vérifier les conditions suivantes :

- son énergie doit être finie,
- son flux d'énergie à travers toute surface fermée englobant l'obstacle doit être sortant.

On peut modéliser ces contraintes de diverses manières. Celle que nous adoptons est la condition de radiation de Silver-Müller, qui s'écrit dans le cas tridimensionnel

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( Z_0 \mathbf{H}^{\text{diff}} \wedge \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{E}^{\text{diff}} \right) = 0, \quad (1.3)$$

où  $r$  et  $\mathbf{r}$  sont respectivement le rayon scalaire et le vecteur d'un point quelconque de  $\mathbb{R}^3$  par rapport à l'origine.

*Remarque.* La condition de radiation justifie le fait que l'on préfère travailler avec le champ diffracté plutôt qu'avec le champ total. En effet, si le champ incident est créé par des sources placées à l'infini, alors le champ total peut ne pas vérifier cette condition de radiation de Silver-Müller.

## 1.4 Condition d'impédance

Le problème de la diffraction d'ondes électromagnétiques par des obstacles parfaitement conducteurs est un problème qui a déjà été résolu. Citons en particulier les travaux de J.C. Nédélec [9] et de A. Bendali [6].

On s'intéresse désormais au cas d'une condition d'impédance de la forme

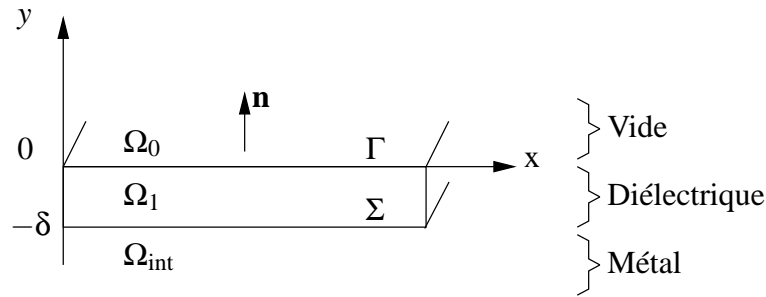
$$\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_{|\Gamma}^{\text{ext}} \wedge \mathbf{n}) - Z_0 \mathcal{Z}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_{|\Gamma}^{\text{ext}}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (1.4)$$

où  $\mathcal{Z}$  est l'opérateur impédance.

Historiquement, la condition d'impédance a été formulée pour la première fois par Leontovich [4] sous la forme  $\mathcal{Z} = ik\eta$ . Elle a été présentée initialement comme la condition aux limites modélisant la pénétration d'une onde dans un obstacle métallique imparfaitement conducteur. Cependant, on s'est aperçu par la suite qu'elle pouvait modéliser aussi d'autres situations, telles que celle d'un obstacle conducteur parfait recouvert d'une fine couche de diélectrique ou celle d'un obstacle conducteur parfait mais dont la surface est «rugueuse». Elle est depuis largement utilisée comme condition aux limites effective pour la résolution de multiples problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques.

### 1.4.1 Métal recouvert d'une fine couche de diélectrique

On considère un demi-espace métallique conducteur parfait ( $y < -\delta$ ) recouvert d'une couche de diélectrique d'épaisseur  $\delta$  ( $-\delta < y < 0$ ). On éclaire le tout par une onde électromagnétique incidente. On fait l'hypothèse d'une onde incidente plane de pulsation  $\omega$  en incidence normale.



On se place en mode TE ce qui nous permet de nous ramener à un problème bidimensionnel. On doit alors résoudre le problème suivant. On cherche  $u = u^{\text{inc}} + u^{\text{ref}}$  tel que :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{sur } \Omega_0, \\ \Delta u + k^2 n^2 u = 0 & \text{sur } \Omega_1, \\ \partial_{\mathbf{n}} u|_{\Sigma} = 0 & \text{Condition de Dirichlet,} \end{cases}$$

où  $n$  est l'indice optique du milieu diélectrique  $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$  ( $\mu_r = 1$  pour un milieu non magnétique). On cherche une solution de la forme

$$\begin{cases} u(y) = e^{-iky} + R_0 e^{iky} & y > 0, \\ u(y) = T_0 (e^{-ikny} + R_1 e^{ikny}) & -\delta < y < 0, \end{cases}$$

avec

- $R_0$  : coefficient de réflexion en amplitude sur  $\Gamma$ ,
- $T_0$  : coefficient de transmission en amplitude sur  $\Gamma$ ,
- $R_1$  : coefficient de réflexion en amplitude sur  $\Sigma$ .

Les conditions aux limites sur  $\Sigma$  et sur  $\Gamma$  donnent alors

$$\left\{ \begin{array}{l} iknT_0(-e^{ikn\delta} + R_1e^{-ikn\delta}) = 0 \\ 1 + R_0 = T_0(1 + R_1) \\ \frac{ik}{\epsilon_0}(-1 + R_0) = \frac{ikn}{\epsilon_0\epsilon_r}T_0(1 - R_1) \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} R_1 = e^{2ikn\delta}, \\ 1 + R_0 = T_0(1 + R_1), \\ 1 - R_0 = \frac{n}{\epsilon_r}T_0(1 - R_1). \end{array} \right.$$

L'impédance vue par l'onde incidente est donc :

$$Z_0Z = Z_0 \frac{1 - R_0}{1 + R_0} = -iZ_0 \frac{n}{\epsilon_r} \tan(kn\delta).$$

Dans le cas d'une couche mince  $\delta \ll \frac{\lambda}{2\pi n}$ , on a :

$$Z_0Z \approx -ikZ_0\delta$$

## 1.4.2 Métal imparfaitement conducteur

On considère ici une autre situation qui peut être modélisée par la condition d'impédance de Leontovich  $Z_0Z = ikZ_0\eta$ .

Soit un métal de conductivité finie  $\sigma$  occupant le demi-espace  $y < 0$ , le domaine complémentaire étant occupé par le vide.

On se place en régime ohmique  $j = \sigma E$ . Les équations de Maxwell en régime harmonique (pour une dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$ ) sont donc :

Dans le vide	Dans le métal
$\text{rot}E - i\omega\mu_0H = 0$	$\text{rot}E - i\omega\mu_0H = 0$
$\text{rot}H + i\omega\epsilon E = 0$	$\text{rot}H = (\sigma - i\omega\epsilon)E$
$\Delta E + k^2E = 0$	$\Delta E + \kappa^2E = 0$

On a posé  $\kappa^2 = +i\omega\mu_0(\sigma - i\omega\epsilon_0)$ . On décompose  $\kappa$  en partie réelle et partie imaginaire :  $\kappa = \kappa' + i\kappa''$  avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa'^2 - \kappa''^2 = k^2, \\ 2i\kappa'\kappa'' = i\omega\mu_0\sigma. \end{array} \right.$$

On considère alors des solutions de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dans le vide} \quad E_x(y) = e^{-iky} + R_0e^{iky}, \\ \text{Dans le métal} \quad E_x(y) = T_0e^{-i\kappa y} = T_0e^{\kappa''y}e^{-i\kappa'y}. \end{array} \right.$$

L'onde se propage dans le métal avec une atténuation en  $1/\kappa''$  : c'est l'effet de peau.

Les conditions de transmission sur l'interface  $\Gamma$  ( $y = 0$ ) donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + R_0 = T_0, \\ \frac{ik}{\epsilon_0}(-1 + R_0) = \frac{-i\kappa}{\epsilon_0 + i\sigma/\omega}. \end{array} \right.$$

L'impédance vue par l'onde incidente est donc

$$Z_0 Z = Z_0 \frac{1 - R_0}{1 + R_0} = Z_0 \frac{\kappa}{k} \frac{1}{1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}}.$$

Or on a  $\kappa^2 = k^2 + i\omega\mu_0\sigma \Rightarrow \frac{\kappa}{k} = \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}\right)^{1/2}$ . Alors

$$Z_0 Z = Z_0 \frac{1}{\left(1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}\right)^{1/2}}.$$

$$\eta = \frac{1}{ik \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}\right)^{1/2}}$$

On retrouve bien le cas du conducteur parfait lorsque  $\sigma \rightarrow \infty$  :  $\eta \rightarrow 0$ .

### 1.4.3 Surface métallique rugueuse

On peut également considérer le cas de la diffraction par une surface métallique rugueuse. Pour plus de détails, on pourra se référer aux travaux de G. Soriano et M. Saillard de l'Institut Fresnel de Marseille [12].

Il existe d'autres exemples de condition d'impédance. On note en particulier la condition d'impédance d'Engquist-Nédélec qui permet de prendre en compte des incidentes non normales, en utilisant notamment des opérateurs intégrô-différentiels. Néanmoins les simulations numériques montrent, qu'en dépit des hypothèses contraignantes de la condition d'impédance de Leontovich (incidence normale essentiellement...), son utilisation donne de bons résultats.

## 1.5 Condition d'absorption

Nous allons ici regarder ce que devient l'énergie fournie par les sources  $(\mathbf{J}_a, \mathbf{M}_a)$ .

Considérons un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , de frontière  $\Sigma$ . La puissance fournie par les sources à  $\Omega$  est

$$P_f = -\frac{Z_0}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E}^{\text{tot}} \cdot \overline{\mathbf{J}_a} + \overline{\mathbf{H}^{\text{tot}}} \cdot \mathbf{M}_a d\Omega.$$

Le champ  $(\mathbf{E}^{\text{tot}}, \mathbf{H}^{\text{tot}})$  vérifie les équations de Maxwell (1.1). On a donc

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{Z_0}{2} \int_{\Omega} \overline{\mathbf{H}^{\text{tot}}} \cdot \text{rot} \mathbf{E}^{\text{tot}} - \mathbf{E}^{\text{tot}} \cdot \text{rot} \overline{\mathbf{H}^{\text{tot}}} d\Omega + \frac{ik}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{E}^{\text{tot}}\|^2 - Z_0^2 \|\mathbf{H}^{\text{tot}}\|^2 d\Omega \\ &= \frac{Z_0}{2} \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{E}^{\text{tot}} \wedge \overline{\mathbf{H}^{\text{tot}}}) d\Omega + P_r \\ &= \frac{Z_0}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{E}^{\text{tot}} \wedge \overline{\mathbf{H}^{\text{tot}}}) \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} d\Sigma + P_r, \end{aligned} \tag{1.5}$$

où  $\mathbf{n}_\Sigma$  est la normale *sortante* du domaine borné  $\Omega$ . La puissance fournie par les sources s'écrit comme la somme de la puissance réactive (non dissipative)

$$P_r = \frac{ik}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{E}^{\text{tot}}\|^2 - Z_0^2 \|\mathbf{H}^{\text{tot}}\|^2 d\Omega$$

et du flux du vecteur de *Poynting* à travers  $\Sigma$ .

Appliquons maintenant ce résultat avec comme domaine  $\Omega = \mathcal{B}_R \cup \Omega_{\text{ext}}$  (Cf. figure 1.2) où l'on fait ensuite croître le rayon  $R$ .

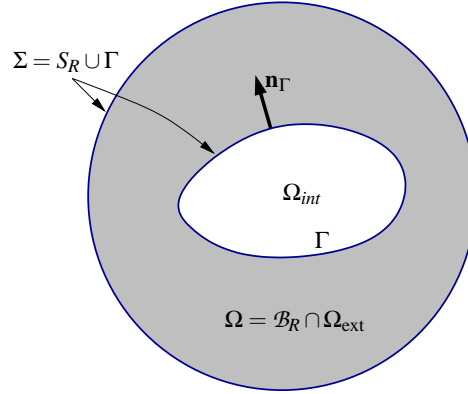


FIG. 1.2 – Domaine considéré pour le calcul de la puissance dissipée

Calculons la puissance dissipée dans ce domaine :

$$P = \frac{Z_0}{2} \int_{\Gamma \cup S_R} (\mathbf{E}^{\text{tot}} \wedge \overline{\mathbf{H}^{\text{tot}}}) \cdot \mathbf{n} d\Sigma.$$

Sur  $\Gamma$ , la normale sortante à  $\Omega$  est l'opposée de la normale sortante  $\mathbf{n}_\Gamma$  à l'obstacle  $\Omega_{\text{int}}$ , d'où

$$P = \frac{1}{2} \int_{S_R} (\mathbf{E}^{\text{tot}} \wedge \overline{\mathbf{H}^{\text{tot}}}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dS_R - \int_{\Gamma} (\mathbf{E}^{\text{tot}} \wedge \overline{\mathbf{H}^{\text{tot}}}) \cdot \mathbf{n}_\Gamma d\Gamma.$$

D'après la condition de radiation, le premier terme tend vers  $\frac{1}{2} \int_{S_R} \|\mathbf{E}^{\text{tot}}\|^2 dS_R$  quand  $R$  croît. C'est l'énergie dissipée par rayonnement.

On utilise la condition d'impédance afin de mettre le second terme sous la forme  $\frac{ikZ_0^2}{2} \int_{\Gamma} \eta (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{\text{tot}}) \cdot (\mathbf{n} \wedge \overline{\mathbf{H}^{\text{tot}}}) d\Gamma$ . Il ne peut y avoir de création d'énergie. Ce terme doit donc avoir une partie réelle positive (énergie dissipée), ce qui implique que

$$\Im \int_{\Gamma} \eta (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{\text{tot}}) \cdot (\mathbf{n} \wedge \overline{\mathbf{H}^{\text{tot}}}) d\Gamma \leq 0.$$

Cette condition est assurée si

$$\boxed{\forall \xi \text{ champ tangent à } \Gamma, \forall x \in \Gamma, \Im \left( \eta \xi(x) \cdot \overline{\xi(x)} \right) \leq 0} \quad (1.6)$$

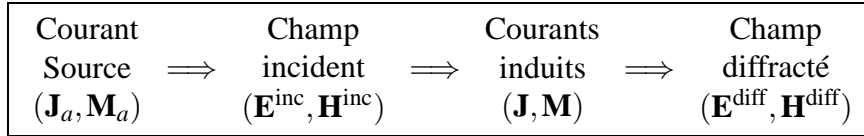
*Remarque.* Physiquement, cette relation traduit la propriété d'absorption du matériau constituant l'obstacle.

# Chapitre 2

## Méthodes intégrales

Pour cette étude de la diffraction par un obstacle, on souhaite utiliser des méthodes intégrales. On veut ramener le problème de la détermination sur  $\Omega_{\text{ext}}$  des champs diffractés  $(\mathbf{E}^{\text{diff}}, \mathbf{H}^{\text{diff}})$  vérifiant la condition de radiation à l'infini et les équations de Maxwell, à celui de la détermination des courants équivalents  $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$  sur la surface  $\Gamma$  de l'obstacle. On passe ainsi d'un problème volumique à un problème surfacique à l'aide du théorème de représentation intégrale.

C'est une démarche assez intuitive du point de vue des interactions champ-matière : les sources  $(\mathbf{J}_a, \mathbf{M}_a)$  créent le champ incident, qui à son tour induit les courants sur la surface de l'obstacle. Ces champs induits créent ensuite le champ dit diffracté :



### 2.1 Courants équivalents

On va donc remplacer la recherche des champs  $(\mathbf{E}^{\text{ext}}, \mathbf{H}^{\text{ext}})$  par celle des courants équivalents. Pour cela, on définit le courant électrique  $\mathbf{J}$  et magnétique  $\mathbf{M}$  sur la surface  $\Gamma$  par :

$$\begin{cases} \mathbf{J} &= \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}|_{\Gamma} \\ \mathbf{M} &= -\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}|_{\Gamma} \end{cases} \quad (2.1)$$

*Remarque.* Physiquement, le courant magnétique  $\mathbf{M}$  n'existe pas. Cependant sa considération permet de symétriser les équations, ce qui simplifie certains problèmes de modélisation.

Par contre, il faut s'assurer, lors de la discrétisation du problème, de la conservation des flux de chacun des courants. Ceci est fondamental pour la conformité et la stabilité des schémas numériques utilisés dans la résolution par méthodes intégrales.

Comment se traduit la condition d'impédance de Leontovich sur les courants  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$  ? Puisqu'elle fait intervenir les composantes tangentielles des champs  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  sur  $\Gamma$ , on peut l'exprimer avec  $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$  :

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} = ikZ_0 \eta \mathbf{J} \quad (2.2)$$

## 2.2 Théorème de représentation intégrale : formule de STRATTON-CHU

On cherche ici une représentation des champs ( $\mathbf{E}^{\text{diff}}, \mathbf{H}^{\text{diff}}$ ) à l'extérieur de l'obstacle en fonction des courants ( $\mathbf{J}, \mathbf{M}$ ) sur la surface  $\Gamma$ .

La démarche proposée est celle suivie par Nédélec [9] (p. 257 à 262). Au sens des distributions, on a :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}^{\text{diff}} - ikZ_0 \mathbf{H}^{\text{diff}} = -\mathbf{M} \delta_\Gamma, & (a) \\ \text{rot } \mathbf{H}^{\text{diff}} + ikZ_0^{-1} \mathbf{E}^{\text{diff}} = \mathbf{J} \delta_\Gamma. & (b) \end{cases} \quad (2.3)$$

Le théorème de superposition nous permet de considérer d'abord le cas où seul le courant électrique  $\mathbf{J}$  est présent ( $\mathbf{M} = 0$ ) puis le cas contraire ( $\mathbf{J} = 0$ ).

Dans le cas  $\mathbf{M} = 0$ , on cherche donc  $\mathbf{E}^{\text{diff}}$  de la forme  $\mathbf{E}^{\text{diff}} = \mathbf{A} + \nabla V$  avec une condition de jauge de Lorentz  $\text{div } \mathbf{A} = k^2 V$ . En prenant la divergence de (2.3a) et en utilisant la condition de jauge, on vérifie que  $V$  vérifie l'équation de Helmholtz scalaire

$$\Delta V + k^2 V = ik^{-1} Z_0 \text{div}(\mathbf{J} \delta_\Gamma) = ik^{-1} Z_0 \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{J}.$$

Il s'exprime donc comme le potentiel de simple couche de densité  $ik^{-1} Z_0 \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{J}$

$$V(x) = ik^{-1} Z_0 \int_\Gamma G(x, y) \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{J}(y) d\Gamma(y).$$

Dans cette expression  $G$  est le noyau de Green, solution fondamentale sortante de l'équation de Helmholtz, c'est-à-dire vérifiant les équations de Maxwell et la condition de radiation

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} \exp(ik|x-y|). \quad (2.4)$$

On montre ensuite que  $\mathbf{A}$  vérifie l'équation de Helmholtz vectorielle

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = ikZ_0 \mathbf{J} \delta_\Gamma.$$

$\mathbf{A}$  est donc le potentiel de simple couche de densité  $ikZ_0 \mathbf{J}$ . On peut donc écrire  $\mathbf{E}^{\text{diff}} = ikZ_0 \mathcal{T} \mathbf{J}(x)$  où :

$$\boxed{\mathcal{T} \mathbf{J} = \int_\Gamma G(x, y) \mathbf{J}(y) + \frac{1}{k^2} \nabla_x G(x, y) \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{J}(y) d\Gamma(y)} \quad (2.5)$$

En utilisant (2.3a), on a  $\mathbf{H}^{\text{diff}} = \frac{1}{ikZ_0} \text{rot } \mathbf{E}^{\text{diff}} = \frac{1}{ikZ_0} \text{rot } \mathbf{A}$ , soit  $\mathbf{H}^{\text{diff}} = -\mathcal{K} \mathbf{J}$  avec :

$$\boxed{\mathcal{K} \mathbf{J} = -\text{rot}_x \int_\Gamma G(x, y) \mathbf{J}(y) d\Gamma(y) = \int_\Gamma \nabla_y G(x, y) \wedge \mathbf{J}(y) d\Gamma(y)} \quad (2.6)$$

Le même raisonnement pour  $\mathbf{J} = 0$  donne :

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{diff}} = \mathcal{K} \mathbf{M}, \\ \mathbf{H}^{\text{diff}} = ikZ_0^{-1} \mathcal{T} \mathbf{M}. \end{cases}$$

On obtient finalement la formule de STRATTON-CHU :

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{diff}}(x) &= ikZ_0 \mathcal{T} \mathbf{J} + \mathcal{K} \mathbf{M}, \\ \mathbf{H}^{\text{diff}}(x) &= -\mathcal{K} \mathbf{J} + ikZ_0^{-1} \mathcal{T} \mathbf{M}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Ces expressions ne sont néanmoins valables que sur le domaine extérieur  $\Omega_{\text{ext}}$ . L'inconvénient est que la condition d'impédance lie les valeurs des champs sur la frontière  $\Gamma$ . Il nous faut donc déterminer les valeurs limites extérieures sur  $\Gamma$ . Ces formules de saut nous sont données dans [9] :

<b>Formules de saut</b>	$\begin{cases} \mathbf{E}_t^{\text{diff}} &= ikZ_0 \mathcal{T} \mathbf{J}_t + \mathcal{K} \mathbf{M}_t + \frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge \mathbf{M}, \\ \mathbf{H}_t^{\text{diff}} &= ikZ_0^{-1} \mathcal{T} \mathbf{M}_t - \mathcal{K} \mathbf{J}_t - \frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge \mathbf{J}. \end{cases} \quad (2.8)$
-------------------------	---

où l'indice  $t$  désigne les composantes tangentielles sur  $\Gamma$ . On rappelle qu'on obtient la composante tangentielle d'un vecteur  $\mathbf{u}$  sur une surface par  $\mathbf{n} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n})$  où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante à la surface considérée.

## 2.3 Discrétisation

Les formulations que nous allons présenter dans les chapitres suivants sont des formulations intégrales : elles font intervenir des intégrales sur la surface de l'obstacle  $\Gamma$ . La résolution se fait donc de manière numérique à l'aide de la méthode des *éléments finis de frontière*. La discrétisation se fera en deux temps :

- discrétisation du contour,
- interpolation des inconnues sur des fonctions de base.

### 2.3.1 Discrétisation de la géométrie

La première étape consiste donc à approcher la surface de l'obstacle en un nombre fini d'éléments bidimensionnels, dans notre cas ce seront des triangles. Ce maillage approche la surface  $\Gamma$  par une surface polyédrique.

*Remarque.* Cette première étape est déjà source d'erreur : en réalisant cette discrétisation, on introduit une erreur sur la normale à  $\Gamma$ . On remplace la normale  $\mathbf{n}(M)$  en un point  $M$  de  $\Gamma$  par la normale au triangle auquel  $M$  «appartient».

Il est clair que le résultat sera d'autant plus précis que le nombre d'éléments du maillage sera grand, mais le temps nécessaire au calcul sera alors plus long. Il faudra donc réaliser un compromis entre précision de la solution et rapidité de la résolution.

#### Numérotation locale

À un triangle  $K$  est associée la numérotation locale suivante : les sommets  $(a_j^K)_{j=1..3}$  sont disposés dans le sens direct en accord avec la normale  $\mathbf{n}^K$  sortante. Les arêtes sont ensuite numérotées de sorte que l'arête  $K'_j$  soit l'arête reliant les sommets  $a_j^K$  et  $a_{j+1}^K$ .

### Numérotation globale

On attribue à chaque triangle un numéro  $K \in [1..N_{tr}]$ . De même on donne à chaque arête un numéro  $n \in [1..N_{ar}]$ . On définit ici une table qui indique quelles arêtes (repérées par leur numérotation globale) appartiennent à chacun des triangles. C'est la table de connectivité :

n° du triangle	1° arête	2° arête	3° arête
1	...	...	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N_{tr}$	...	...	...

De plus, on donne à chaque arête  $n$  une orientation  $v_n$  : considérons les deux triangles partageant cette arête, on notera  $K_n^+$  le triangle tel que la direction arbitraire de l'arête  $n$  coïncide avec le sens direct (défini localement) de ce triangle. Pour l'autre triangle, que l'on notera  $K_n^-$ , la direction de l'arête coïncide avec le sens indirect. On construit donc la

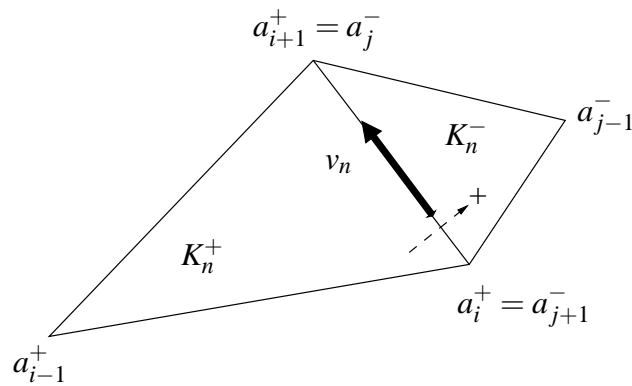


FIG. 2.1 – Arête  $n = (K_n^+)'_i = (K_n^-)'_j$  : Notations

table donnant les deux triangles partageant une arête :

n° de l'arête	$K_n^+ \longrightarrow K_n^-$
1	...
$\vdots$	$\vdots$
$N_{ar}$	...

*Remarque.* On peut regrouper l'information des deux tables en une seule table : il suffit de signer les numéros des arêtes dans la table de connectivité suivant la convention de signe définie ci-dessus.

### 2.3.2 Éléments de Raviart-Thomas

Nous cherchons ici à discrétiser les inconnues, dans notre cas les courants  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$ . Une condition qu'il est impératif de vérifier est la conservation du flux de chacun de ces vecteurs. Une manière d'assurer ceci est d'utiliser les fonctions de base de *Raviart-Thomas* (Cf. [3]) dont l'intérêt pour l'électromagnétisme a été découvert par *Rao, Wilton et Glisson* (Cf. [5]). Chaque fonction de base est associée à une arête et assure la conservation

du flux à travers cette arête. Si on note  $|K|$  l'aire d'un triangle  $K$ , la  $n^{\text{eme}}$  fonction de base est définie par :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2|K_n^+|}(x - a_{i-1}^+) & \text{si } x \in K_n^+ \\ \frac{1}{2|K_n^-|}(a_{j-1}^- - x) & \text{si } x \in K_n^- \\ 0 & \text{si } x \notin K_n^+ \cup K_n^- \end{cases} \quad (2.9)$$

La discrétisation des courants s'écrit donc comme la projection sur l'espace des fonc-

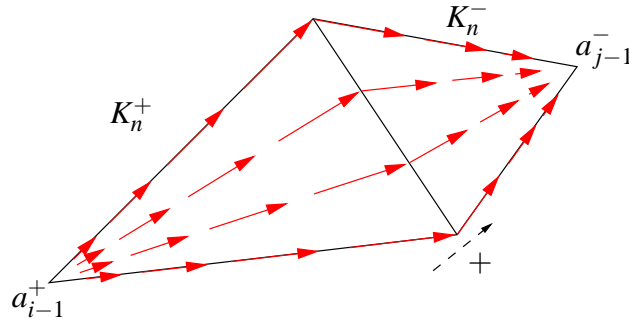


FIG. 2.2 – Fonction de base de Raviart-Thomas associé à la  $n^e$  arête

tions de Raviart-Thomas, qui sont des fonctions linéaires par morceaux. Les coefficients de cette décomposition correspondent alors au flux du courant à travers l'arête correspondante.

$$\mathbf{J}(x) = \sum_{n=1}^{N_{ar}} J_n \varphi_n(x) \quad (2.10)$$

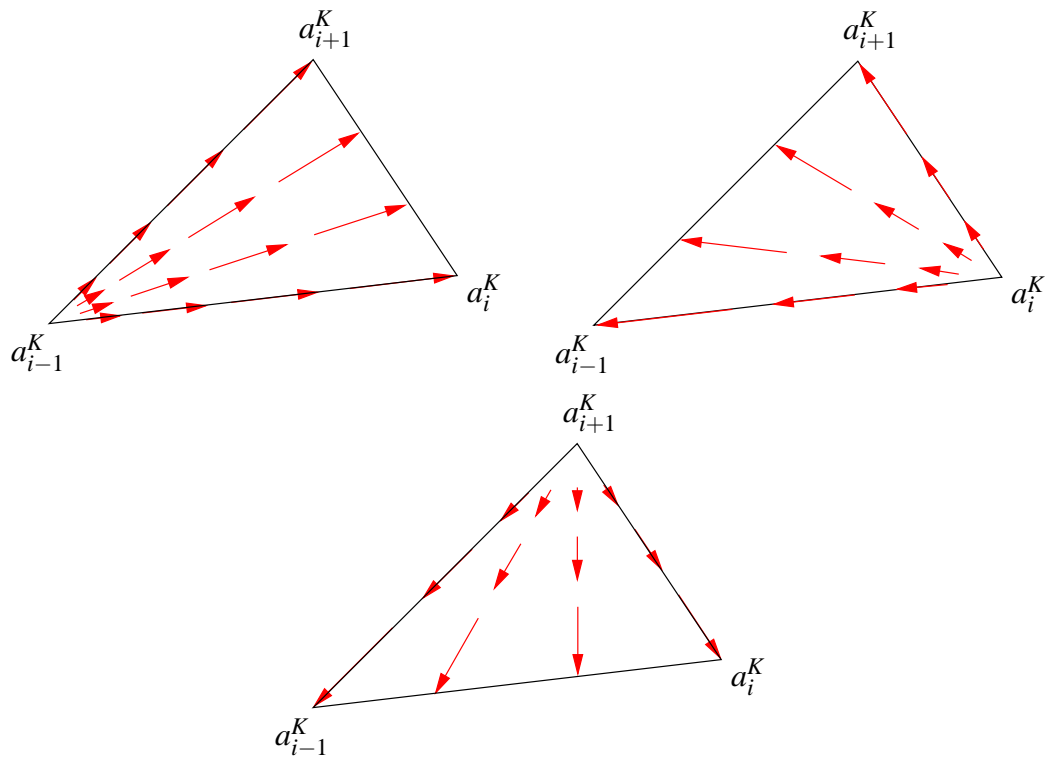
avec  $J_n$  flux de  $\mathbf{J}$  à travers l'arête  $n$

Sur chaque triangle, le courant s'écrit comme une combinaison linéaire des 3 fonctions de base représentées figure 2.3.

*Remarque.* On a considéré sur la figure 2.3 que l'orientation des différentes arêtes était comptée positive pour le triangle  $K$ .

Il est intéressant de regarder quelle est la densité de charge surfacique associée à chaque fonction de base. Cette densité est proportionnelle, en régime harmonique, à  $\nabla_{\Gamma} \cdot \varphi_n$ .

$$\nabla_{\Gamma} \cdot \varphi_n(x) = \begin{cases} +\frac{1}{|K_n^+|} & \text{sur } K_n^+ \\ -\frac{1}{|K_n^-|} & \text{sur } K_n^- \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.11)$$

FIG. 2.3 – Fonctions de base du triangle  $K$ 

On voit alors que la charge est uniforme sur chaque élément : il n'y a pas d'accumulation sur une arête ou sur un sommet. De plus la charge totale introduite est nulle : la charge positive sur  $K_n^+$  s'équilibre avec la charge négative de  $K_n^-$ .

### 2.3.3 Principe variationnel et méthode de Galerkin

Les équations que nous obtenons par manipulation des formules de saut et de la condition d'impédance sont des équations fonctionnelles à vérifier sur toute la surface  $\Gamma$  de l'obstacle. Or la résolution de notre problème est réalisée numériquement, ce qui n'est possible qu'avec des équations scalaires. Il est donc nécessaire de mettre le problème sous forme matricielle. La méthode ici retenue est d'écrire ces équations sous formulation faible. Pour cela, on introduit des fonctions test. Si l'équation à résoudre est de la forme :

$$\text{On cherche } \mathbf{J} \text{ tel que} \\ \forall x \in \Omega, \quad f(\mathbf{J})(x) = \mathbf{u}(x),$$

alors une manière équivalente d'écrire le problème est

$$\text{On cherche } \mathbf{J} \text{ tel que} \\ \forall \mathbf{v}, \quad \int_{\Omega} f(\mathbf{J})(x) \cdot \mathbf{v}(x) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x) d\Omega.$$

C'est le principe des formulations variationnelles. Il reste alors à déterminer sur quel espace prendre les fonctions test. La méthode que l'on utilise pour notre problème est la méthode de Galerkin. Elle consiste à choisir les fonctions test dans le même espace que les fonctions inconnues. Pour la discrétisation du problème, les fonctions inconnues et les fonctions test sont approchées sur les fonctions de base de Raviart-Thomas décrites dans la section précédente.

# Chapitre 3

## Formulations à un courant

Puisque les courants vérifient la condition d'impédance, la première idée est de ne mener le calcul qu'avec un seul des courants, par exemple le courant électrique  $\mathbf{J}$ .

### 3.1 Formulation directe

#### 3.1.1 Obtention

Pour cette formulation, on part de la condition d'impédance sur les champs totaux, dans laquelle on injecte les formules des sauts (2.8) :

$$\mathbf{E}_t = ikZ_0 \eta (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}),$$

$$\mathbf{E}_t^{\text{inc}} + ikZ_0 \mathcal{T}\mathbf{J}_t + \mathcal{K}\mathbf{M}_t + \frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge \mathbf{M} = ikZ_0 \eta \left( \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{\text{inc}} + ikZ_0^{-1} \mathbf{n} \wedge \mathcal{T}\mathbf{M} - \mathbf{n} \wedge \mathcal{K}\mathbf{J} - \frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}) \right).$$

On note  $F$  le terme source

$$F = - \left( \mathbf{E}_t^{\text{inc}} - ikZ_0 \eta (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{\text{inc}}) \right). \quad (3.1)$$

On a alors

$$ikZ_0 (\mathcal{T}\mathbf{J})_t + (\mathcal{K}\mathbf{M})_t + \frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge \mathbf{M} + k^2 \eta (\mathbf{n} \wedge (\mathcal{T}\mathbf{M})_t) + ikZ_0 \eta (\mathbf{n} \wedge (\mathcal{K}\mathbf{J})_t) - \frac{1}{2} ikZ_0 \eta \mathbf{J} = F.$$

Il nous reste alors à éliminer le courant magnétique avec

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} = ikZ_0 \eta \mathbf{J} \iff \mathbf{M} = ikZ_0 \eta \mathbf{J} \wedge \mathbf{n}.$$

$$\boxed{(\mathcal{T}\mathbf{J})_t + \left( \mathcal{K}(\eta \mathbf{J} \wedge \mathbf{n}) \right)_t + k^2 \eta \left( \mathbf{n} \wedge \mathcal{T}(\eta \mathbf{J} \wedge \mathbf{n}) \right) + \eta \left( \mathbf{n} \wedge \mathcal{K}\mathbf{J} \right) = \frac{1}{ikZ_0} F} \quad (3.2)$$

Dans le cas le plus simple d'opérateur d'impédance  $\eta = \eta I$  (où  $I$  est la matrice identité  $3 \times 3$ ), cette formulation donne :

$$(\mathcal{T}\mathbf{J})_t + \eta \left( \mathcal{K}(\mathbf{J} \wedge \mathbf{n}) \right)_t + k^2 \eta^2 \mathbf{n} \wedge \mathcal{T}(\mathbf{J} \wedge \mathbf{n}) + \eta \mathbf{n} \wedge \mathcal{K}\mathbf{J} = \frac{1}{ikZ_0} F.$$

### 3.1.2 Propriétés

- On remarque tout d'abord que la relation (3.2) peut se mettre sous la forme

$$\int_{\Gamma} K(x,y) \mathbf{J}(y) d\Gamma(y) = f(x)$$

où  $K$  est le noyau,  $f$  le terme source et  $\mathbf{J}$  l'inconnue. C'est donc une équation de Fredholm de 1<sup>o</sup> espèce. Elle possède a-priori de bonnes propriétés de stabilité numérique.

- Cependant elle présente un inconvénient de taille. Elle fait intervenir une intégrale qui ne peut être interprétée qu'au sens des valeurs principales de Cauchy :

$$\int_{\Gamma} \nabla_x G(x,y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) d\Gamma(y).$$

Pour  $x \in \Gamma$ , l'intégrale présente une singularité en  $|x-y|^{-2}$  non intégrable. On verra comment éliminer cette singularité avec les autres formulations.

Les autres intégrales ne posent quant à elles aucune difficulté puisqu'elles sont explicites et à singularité intégrable en  $|x-y|^{-1}$ .

### 3.1.3 Discrétisation

Même si cette formulation ne fait apparaître que le courant électrique  $\mathbf{J}$ , le courant magnétique  $\mathbf{M}$  y est implicitement présent. Il faut donc que les flux à la fois de  $\mathbf{J}$  et de  $\mathbf{M}$  soient conservés à travers chacune des arêtes du maillage.

Plaçons-nous dans le cas le plus simple, à savoir celui où l'opérateur  $\eta$  est uniforme  $\eta = \eta I$ . Il est alors impératif de conserver les flux de  $\mathbf{J}$  et de  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}$ . Or le courant électrique est décomposé sur les éléments triangulaires de Raviart-Thomas : son  $n^{\text{ème}}$  coefficient correspond donc à son flux à travers la  $n^{\text{ème}}$  arête du maillage. En revanche, lorsque l'on écrit la conservation du flux de  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}$ , on obtient une relation entre les 5 coefficients de  $\mathbf{J}$  associés aux arêtes des deux triangles ayant la  $n^{\text{ème}}$  arête en commun. La conservation du flux de  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}$  est équivalente à la conservation de la circulation de  $\mathbf{J}$  : elle nécessiterait donc que le courant électrique soit décomposé sur les éléments de Nédélec. La discrétisation à l'aide des éléments de Raviart-Thomas est donc inadaptée à la conservation des flux des courants électriques et magnétiques liés par la condition d'impédance.

Cette formulation a pu être utilisée sur des obstacles possédant un axe de symétrie à l'aide d'un maillage composée de méridiens et de parallèles. Cependant, pour un obstacle de géométrie quelconque, il n'existe à l'heure actuelle aucune méthode d'éléments-finis basée sur des éléments triangulaires qui soit capable de satisfaire ces exigences.

## 3.2 Formulation EFIE

Le principe de cette formulation est de travailler avec l'équation donnant le champ électrique (2.8a) uniquement, c'est-à-dire sans prendre en compte (2.8b) car c'est cette dernière qui nous impose la conservation du flux de  $\mathbf{M}$ . La discrétisation de  $\mathbf{J}$  sur les éléments de Raviart-Thomas ne pose alors plus de problème.

### 3.2.1 Obtention

Sachant que  $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \wedge \mathbf{M} = ikZ_0 \eta \mathbf{J}$ , la première formule de saut (2.8) est équivalente à

$$\boxed{\text{EFIE} \quad \frac{1}{2} ikZ_0 \eta \mathbf{J} - ikZ_0 (\mathcal{T} \mathbf{J})_t - ikZ_0 \left( \mathcal{K}(\eta \mathbf{J} \wedge \mathbf{n}) \right)_t = \mathbf{E}_t^{\text{int}}.} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Propriétés

• On adopte une formulation variationnelle : l'égalité suivante doit être vérifiée pour tout champ  $\mathbf{J}'$  de vecteurs tangents à  $\Gamma$ .

$$\frac{1}{2} ikZ_0 \int_{\Gamma} \eta \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' d\Gamma - ikZ_0 \int_{\Gamma} \mathcal{T} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' d\Gamma - ikZ_0 \int_{\Gamma} \mathcal{K}(\eta \mathbf{J} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{J}' d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{E}^{\text{int}} \cdot \mathbf{J}' d\Gamma$$

avec :

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} \mathcal{T} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' d\Gamma = \iint_{\Gamma \times \Gamma} G(x, y) \left( \mathbf{J}(y) \cdot \mathbf{J}'(x) - \frac{1}{k^2} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}'(x) \right) d\Gamma(x) d\Gamma(y), \\ \int_{\Gamma} \mathcal{K} \mathbf{M} \cdot \mathbf{J}' d\Gamma = \iint_{\Gamma \times \Gamma} \nabla_y G(x, y) \wedge \mathbf{M}(y) \cdot \mathbf{J}'(x) d\Gamma(x) d\Gamma(y). \end{cases} \quad (3.4)$$

Cette formulation nous permet d'éliminer la singularité dans l'intégrale  $(\mathcal{T} \mathbf{J})_t$ . En effet la formule de Green nous donne :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \nabla_x \left( \int_{\Gamma} G(x, y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) d\Gamma(y) \right) \cdot \mathbf{J}'(x) d\Gamma(x) \\ &= - \iint_{\Gamma \times \Gamma} G(x, y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}'(x) d\Gamma(x) d\Gamma(y). \end{aligned}$$

• Malgré les propriétés de symétrie de l'opérateur  $\mathcal{Z}$ , le système variationnel obtenu n'est pas symétrique en  $(\mathbf{J}, \mathbf{J}')$  à cause de la dernière intégrale  $\int_{\Gamma} \mathcal{K}(\eta \mathbf{J} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{J}' d\Gamma$ . Lors de l'assemblage de la matrice, il faudra donc calculer tous les coefficients et non plus la moitié uniquement comme c'est le cas pour les systèmes symétriques. Cette propriété est pénalisante du point de vue du coût de la résolution numérique.

### 3.2.3 Unicité de la solution

Pour que le problème soit bien posé au sens d'Hadamard [1], il faut que le problème admette une unique solution. Dans le cas de l'EFIE, V. LANGE montre dans sa thèse [8] que la formulation variationnelle obtenue n'est pas coercive et qu'elle fait apparaître des fréquences irrégulières.

Pour certaines fréquences (*ie.* certaines valeurs du nombre d'ondes  $k$ ), il peut exister des courants parasites  $\mathbf{J}_{par}$  tels que

$$ikZ_0 (\mathcal{T} \mathbf{J}_{par})_t + ikZ_0 \left( \mathcal{K}(\eta \mathbf{J}_{par} \wedge \mathbf{n}) \right) - \frac{1}{2} ikZ_0 \eta \mathbf{J}_{par} = 0.$$

### Une méthode pour obtenir l'unicité de la solution

Le lecteur attentif aura constaté que la première formulation (3.2) n'aboutit pas à une résonance. En effet, elle tient compte des deux équations (2.8) à la fois. Au contraire, on est ici parti de l'équation (2.8a), et les courants parasites qui viennent perturber la résolution appartiennent au noyau de l'opérateur associé à l'EFIE. On peut donc imaginer que si l'on partait de l'équation (2.8b), on obtiendrait un opérateur différent, associé lui à ce qui est couramment appelé la MFIE. Dans le cas où ces deux opérateurs ont des noyaux disjoints, l'équation obtenue par combinaison linéaire de la MFIE et de l'EFIE nous assurerait l'unicité de la solution.

$$\mathbf{CFIE} = \alpha \mathbf{EFIE} + (1 - \alpha) \mathbf{MFIE}.$$

Cependant cette technique présente au moins un inconvénient : il faut déterminer le paramètre  $\alpha$  de la combinaison linéaire qui donne de bons résultats.

Une idée qui est apparue au cours de mon stage est d'imposer que le champ soit nul en un certain nombre de points intérieurs. Ce qui revient à augmenter le système d'un nombre égal de contraintes.

Soient  $x_1, \dots, x_I$  des points intérieurs. On veut que le champ rayonné par les courants induits  $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$  soit nul en chacun des  $x_i$  :

$$\forall i \in [1..I], ikZ_0 \mathcal{T}\mathbf{J}(x_i) + \mathcal{K}\mathbf{M}(x_i) = 0,$$

ce qui nous donne  $I$  contraintes avec lesquelles on pénalise le système :

$$\mathbf{EFIE} + \sum_{i=1}^I L_i \left( ikZ_0 \mathcal{T}\mathbf{J}(x_i) + \mathcal{K}\mathbf{M}(x_i) \right) = 0.$$

Les  $(L_i)_{i \in [1..I]}$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux  $I$  contraintes. Pour mettre au point cette méthode, il reste encore plusieurs questions en suspens : comment choisir les points  $x_i$  ? comment choisir les multiplicateurs de Lagrange ?

# Chapitre 4

## Formulations à deux courants

Nous allons maintenant passer en revue les diverses formulations à deux courants déjà proposées pour résoudre le problème de la diffraction d'ondes électromagnétiques dans le cas de la condition d'impédance.

### 4.1 Formulation de Bachelot, Gay et Lange

Le principe de cette formulation est le suivant : on suppose dès le départ que les deux courants  $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$  vérifient la condition d'impédance, mais on continue de travailler avec les deux courants.

On peut ainsi considérer la conservation des flux de manière indépendante puisque chacun des deux courants est discrétisé sur les éléments de Raviart-Thomas.

#### 4.1.1 Obtention

On part des formules de saut (2.8) :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t^{\text{inc}} &= \frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge \mathbf{M} - (\mathcal{K}\mathbf{M})_t - ikZ_0(\mathcal{T}\mathbf{J})_t, \\ \mathbf{H}_t^{\text{inc}} &= -\frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge \mathbf{J} + (\mathcal{K}\mathbf{J})_t - ikZ_0^{-1}(\mathcal{T}\mathbf{M})_t \end{cases}$$

On utilise ensuite le principe des réactions de Rumsey, qui consiste à former la quantité  $\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}' d\Gamma$  où  $(\mathbf{J}', \mathbf{M}')$  sont les courants de test, tangents à  $\Gamma$ , de la formulation variationnelle. Pour les champs incidents, on note

$$V(\mathbf{J}', \mathbf{M}') = - \int_{\Gamma} \mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{H}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{M}' d\Gamma.$$

On a alors

$$\begin{aligned} V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) &= - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge \mathbf{M} - \mathcal{K}\mathbf{M} - ikZ_0 \mathcal{T}\mathbf{J} \right\} \cdot \mathbf{J}' \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge \mathbf{J} + \mathcal{K}\mathbf{J} - ikZ_0^{-1} \mathcal{T}\mathbf{M} \right\} \cdot \mathbf{M}' d\Gamma \\ &= a(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}' + (\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}) \cdot \mathbf{M}' d\Gamma, \end{aligned}$$

où  $a$  est la forme bilinéaire définie par :

$$a(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) = \int_{\Gamma} ikZ_0 \mathcal{T} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' - ikZ_0^{-1} \mathcal{T} \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}' + \mathcal{K} \mathbf{J} \cdot \mathbf{M}' + \mathcal{K} \mathbf{M} \cdot \mathbf{J}' d\Gamma \quad (4.1)$$

On fait maintenant intervenir la condition d'impédance :

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} = ikZ_0 \eta \mathbf{J} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{J} = \frac{1}{ikZ_0} \mathbf{n} \wedge \eta^{-1} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M})$$

où  $\frac{1}{ik} \eta^{-1}$  est l'opérateur admittance relative, inverse de l'impédance relative  $ik\eta$ . On obtient donc la formulation variationnelle, dite *formulation BGL* :

$$\boxed{V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) = a(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ ikZ_0 \eta \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' - \frac{1}{ikZ_0} \eta^{-1} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') \right\} d\Gamma} \quad (4.2)$$

### 4.1.2 Propriétés

L'existence et l'unicité de la solution de cette formulation a été démontrée par V. Lange [8] de manière formelle dans le cas continu, et par O. Cellarier [16] dans le cas discret : elle repose en particulier sur la condition

$$\Im \eta < 0.$$

Il est à noter que cette formulation impose que la condition d'impédance soit vérifiée en chaque point de la surface de l'obstacle.

Dans le cas où l'obstacle n'est pas entièrement recouvert par le diélectrique, l'intégrale ne porte plus sur  $\Gamma$  en entier mais uniquement sur la partie où s'applique la condition d'impédance. Sur la partie parfaitement métallique, la condition à la frontière est que le champ électrique soit nul, c'est-à-dire  $\mathbf{M} = 0$  et, puisqu'on utilise la méthode de Galerkin,  $\mathbf{M}' = 0$ .

### 4.1.3 Discrétisation

Afin d'assurer la conservation des flux de  $\mathbf{J}$  et de  $\mathbf{M}$ , on décompose ces champs de vecteurs sur les éléments de Raviart-Thomas

$$\mathbf{J}(y) = \sum_{l=1}^N J_l \varphi_l(y) \quad \mathbf{M}(y) = \sum_{l=1}^N M_l \varphi_l(y),$$

$$\mathbf{J}'(x) = \sum_{l=1}^N J'_l \varphi_l(x) \quad \mathbf{M}'(x) = \sum_{l=1}^N M'_l \varphi_l(x).$$

où  $\varphi_l$  est la fonction de base associée à la  $l^{\text{eme}}$  arête.

*Remarque.* On reprend les notations définies dans la partie 2.3.

Le système matriciel que l'on obtient est donc le suivant. On cherche  $J = (J_l)_{l=1..N}$  et  $M = (M_l)_{l=1..N}$  tels que

$$\begin{aligned} SM_1 \cdot J' + SM_2 \cdot M' &= ikZ_0 J^T \cdot T^T \cdot J' + M^T \cdot K^T \cdot J' + J^T \cdot K^T \cdot M' \\ &+ ikZ_0^{-1} M^T \cdot T^T \cdot M' + J^T \cdot C \cdot J' + M^T \cdot D^T \cdot M', \end{aligned}$$

avec les définitions suivantes des matrices

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \iint_{\Gamma \times \Gamma} G(x,y) \left( \varphi_i(y) \cdot \varphi_j(x) - \frac{1}{k^2} \nabla_{\Gamma} \cdot \varphi_i(y) \nabla_{\Gamma} \cdot \varphi_j(x) \right) d\Gamma(x) d\Gamma(y), \\ K_{ij} &= \iint_{\Gamma \times \Gamma} \nabla_y G(x,y) \wedge \varphi_i(y) \cdot \varphi_j(x) d\Gamma(x) d\Gamma(y), \\ C_{ij} &= -\frac{ikZ_0}{2} \int_{\Gamma} \eta \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) d\Gamma(x), \\ D_{ij} &= +\frac{1}{2ikZ_0} \int_{\Gamma} \eta^{-1} (\mathbf{n} \wedge \varphi_j(x)) \cdot (\mathbf{n} \wedge \varphi_i(x)) d\Gamma(x), \\ SM_{1i} &= -\int_{\Gamma} \mathbf{E}^{\text{inc}}(x) \cdot \varphi_i(x) d\Gamma, \\ SM_{2i} &= \int_{\Gamma} \mathbf{H}^{\text{inc}}(x) \cdot \varphi_i(x) d\Gamma. \end{aligned}$$

Le système doit être vérifié pour tout vecteur  $J'$  et  $M'$ . Il est donc équivalent au système matriciel à deux inconnues

$$\begin{pmatrix} ikZ_0 T + C & K \\ K & ikZ_0^{-1} T + D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SM_1 \\ SM_2 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

L'opérateur d'impédance  $\eta$  est supposé symétrique, il est donc autoadjoint, il en va de même pour son inverse  $\eta^{-1}$ . Il en résulte que les matrices  $C$  et  $D$  sont symétriques. De plus, il est évident que les matrices  $T$  et  $K$  sont symétriques. Le système que l'on obtient est donc symétrique. Il suffira donc de calculer et de stocker la moitié des coefficients uniquement.

Bien que la formulation BGL fasse intervenir les deux courants, et par conséquent deux degrés de liberté par arête du maillage, soit deux fois plus que pour le cas du conducteur parfait, elle aboutit à une matrice symétrique, ce qui est intéressant du point de vue du temps de calcul et du stockage.

## 4.2 Formulation de Bendali

La formulation précédente aboutit à un système à deux inconnues, où la condition d'impédance n'est pas explicite, alors qu'elle est supposée vraie en tout point de la surface dès le départ. L'idée de la formulation qui suit est de rendre cette condition d'impédance de Leontovich apparente et de s'en servir lors de la discrétisation pour éliminer une inconnue. Nous allons voir alors que la formulation forte de la condition d'impédance n'est pas nécessaire : une formulation faible suffit. Nous verrons également comment il est possible de se ramener à un problème à une seule inconnue, tout en conservant les flux des deux courants, grâce à cette formulation faible.

### 4.2.1 Obtention

Comme dans la formulation de Bachelot, Gay et Lange, nous allons utiliser le principe des réactions de Rumsey. Mais nous partons cette fois des formules de saut (2.8), sans faire l'hypothèse de la condition d'impédance sur  $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$ .

Considérons le champ diffracté :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{E}^{\text{diff}} \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{H}^{\text{diff}} \cdot \mathbf{M}' d\Gamma &= \int_{\Gamma} ikZ_0 \mathcal{T} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' + \mathcal{K} \mathbf{M} \cdot \mathbf{J}' + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}' d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma} \mathcal{K} \mathbf{J} \cdot \mathbf{M}' - ikZ_0^{-1} \mathcal{T} \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}' + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}) \cdot \mathbf{M}' d\Gamma \\ &= a(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}' + (\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}) \cdot \mathbf{M}' d\Gamma, \end{aligned}$$

où la forme bilinéaire  $a$  est celle définie (4.1). Avec les mêmes notations que pour la formulation BLG, on a

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{H}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{M}' d\Gamma = -V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}),$$

D'un autre côté, on a, pour le champ total, l'expression

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{E}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{H}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{M}' d\Gamma &= \int_{\Gamma} \mathbf{E}_t^{\text{ext}} \cdot \mathbf{J}' - (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{\text{ext}}) \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{J} \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') d\Gamma. \end{aligned}$$

Sachant que  $\mathbf{E}^{\text{ext}} = \mathbf{E}^{\text{inc}} + \mathbf{E}^{\text{diff}}$  et  $\mathbf{H}^{\text{ext}} = \mathbf{H}^{\text{inc}} + \mathbf{H}^{\text{diff}}$ , on a

$$V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) = a(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{J} \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') d\Gamma.$$

Nous n'avons pour le moment pas utilisé la condition d'impédance. Nous allons la faire apparaître sous sa formulation faible. Si l'on suppose que

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} - ikZ_0 \eta \mathbf{J}) \cdot \mathbf{J}' d\Gamma = 0,$$

alors, en utilisant la symétrie de l'opérateur  $\eta$

$$V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) = a(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot (ikZ_0 \eta \mathbf{J}' - \mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') d\Gamma.$$

Si l'on introduit une nouvelle variable  $\mathbf{L} = \frac{1}{2} \mathbf{J}$  (de même pour les courants de test), on aboutit finalement à la formulation suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) &= a(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) - \int_{\Gamma} \mathbf{L} \cdot (ikZ_0 \eta \mathbf{J}' - \mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') d\Gamma \\ &\text{sous la contrainte de } \int_{\Gamma} \mathbf{L}' \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} - ikZ_0 \eta \mathbf{J}) d\Gamma = 0 \end{aligned}} \quad (4.4)$$

Les courants  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{L}'$  apparaissent alors comme des multiplicateurs de Lagrange pour les conditions d'impédance sur les courants  $(\mathbf{J}', \mathbf{M}')$  et  $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$ .

### 4.2.2 Propriétés

L'existence et l'unicité de la solution de cette formulation ont été démontrées par L. Vernhet [10]. La formulation pouvant s'exprimer comme un problème de point-selle (l'opérateur  $\eta$  étant symétrique), le théorème de Brezzi nous assure la caractère bien-posé de la formulation de Bendali.

En revanche, comme pour la formulation BLG, l'unicité est basée sur le caractère absorbant de l'obstacle

$$\Im \eta < 0.$$

Cette formulation semble faire intervenir 3 inconnues :  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{L}$ , ce qui apparait comme un inconvénient de taille lorsque le nombre d'arêtes augmente. L'astuce utilisée a été d'utiliser la contrainte pour exprimer les coefficients de  $\mathbf{M}$  en fonction de ceux de  $\mathbf{J}$ , c'est-à-dire éliminer le courant magnétique.

De même, supposons que l'on choisisse des courants de test vérifiant la condition d'impédance, alors l'intégrale  $\int_{\Gamma} \mathbf{L} \cdot (ikZ_0 \eta \mathbf{J}' - \mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') d\Gamma$  est également nulle. Le multiplicateur de Lagrange  $\mathbf{L}$  disparaît alors de la formulation.

Contrairement à la formulation BGL, on ne cherche pas à ce que la condition d'impédance soit vérifiée en chaque point de la surface. Elle est vue ici comme une contrainte globale, qui doit être vérifiée pour tout champ  $\mathbf{L}'$  de l'espace d'approximation.

### 4.2.3 Discrétisation

Conformément à ce qui a été écrit précédemment, nous allons décomposer les courants électriques et magnétiques sur les fonctions de base de Raviart-Thomas :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(y) &= \sum_{l=1}^N J_l \phi_l(y), & \mathbf{M}(y) &= \sum_{l=1}^N M_l \phi_l(y), \\ \mathbf{J}'(x) &= \sum_{l=1}^N J'_l \phi_l(x), & \mathbf{M}'(x) &= \sum_{l=1}^N M'_l \phi_l(x). \end{aligned}$$

Vient alors la question de savoir comment discrétiser les multiplicateurs  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{L}'$ . On a *a-priori* pas de contrainte de conservation de flux à satisfaire, et par conséquent aucune raison de privilégier une décomposition sur les mêmes éléments que les courants. Nous allons donc choisir une discrétisation qui simplifie l'élimination des courants  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{J}$ .

#### Approximation des multiplicateurs de Lagrange

On impose  $\int_{\Gamma} \mathbf{L}' \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} - ikZ_0 \eta \mathbf{J}) d\Gamma = 0$ . Calculons donc  $\int_{\Gamma} \mathbf{L}' \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) d\Gamma$ .

Pour faire simple, nous allons prendre des fonctions de base de degré 1 pour la décomposition des multiplicateurs. Ainsi le terme à intégrer est au plus de degré 2 et l'intégration sur un triangle peut en conséquence être réalisée de manière exacte par une somme sur les points milieux des arêtes.

$$\int_K \mathbf{L}' \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) dK = \sum_{i=1}^3 \frac{|K|}{3} \mathbf{L}'(a_{i+1/2}^K) \cdot (\mathbf{n}^K \wedge \mathbf{M}(a_{i+1/2}^K)),$$

où  $a_{i+1/2}^K$  désigne le point milieu de la  $i^{\text{eme}}$  arête locale du triangle  $K$ .

Il est alors intéressant de choisir une décomposition de  $\mathbf{L}'$  sur des fonctions de base s'annulant sur deux de ces trois points et ayant la direction de l'arête sur le troisième. C'est donc naturellement que l'on parvient aux fonctions de base proposées par Bendali, Fares et Gay [11]. La fonction associée à l'arête  $n$  commune aux triangles  $K_n^+$  et  $K_n^-$  (notations en accord avec l'orientation de l'arête) est définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in K_n^+ & \psi_n(x) = (1 - 2\lambda_{i+2}^+(x))v_n, \\ \forall x \in K_n^- & \psi_n(x) = (1 - 2\lambda_{j+2}^-(x))v_n, \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $v_n$  est le vecteur directeur de l'arête  $n$  orientée dans le sens direct selon  $K_n^+$  et où  $\lambda$  désigne les coordonnées barycentriques (Cf. [13]).

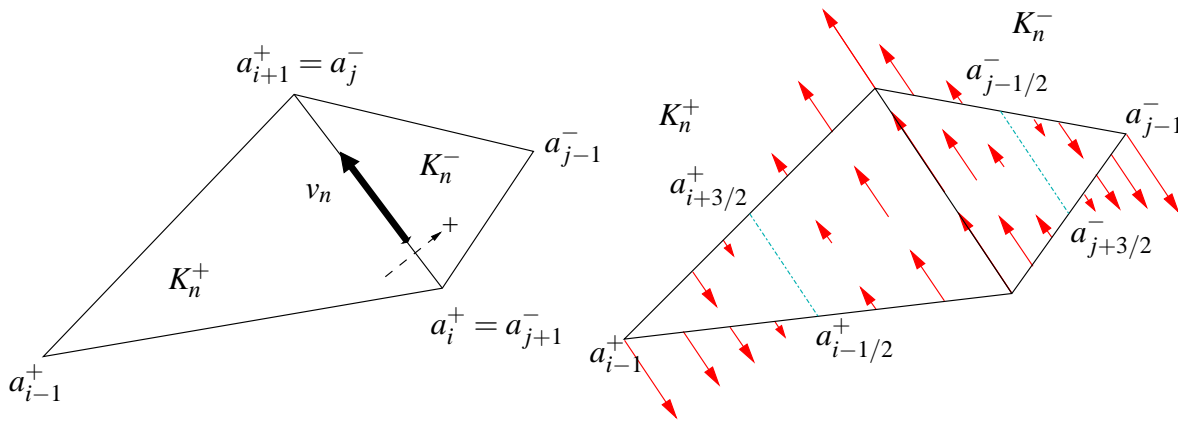


FIG. 4.1 – Notations associées à l'arête  $n$  et fonction de base  $\psi_n$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{L}' \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) d\Gamma &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left( \int_{K_n^+} \mathbf{L}' \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) dK_n^+ + \int_{K_n^-} \mathbf{L}' \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) dK_n^- \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left( \frac{|K_n^+|}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{L}'(a_{i+1/2}^+) \cdot (\mathbf{n}^+ \wedge \mathbf{M}(a_{i+1/2}^+)) + \frac{|K_n^-|}{3} \sum_{j=1}^3 \mathbf{L}'(a_{j+1/2}^-) \cdot (\mathbf{n}^- \wedge \mathbf{M}(a_{j+1/2}^-)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left( \frac{|K_n^+|}{3} \sum_{i=1}^3 L'_{(i, K_n^+)} M_{(i, K_n^+)} + \frac{|K_n^-|}{3} \sum_{j=1}^3 L'_{(j, K_n^-)} M_{(j, K_n^-)} \right), \end{aligned}$$

où l'on a adopté provisoirement la numérotation locale :  $(i, K_n^+)$  désigne la  $i^{\text{eme}}$  arête du triangle  $K_n^+$ .

### Elimination des courants magnétiques

Après cette étape qui nous a permis de choisir la discrétisation de  $\mathbf{L}'$ , nous allons procéder à l'élimination du courant magnétique.

Supposons que  $\mathbf{L}'$  ait tous ses coefficients nuls sauf celui associé à la  $n^{\text{eme}}$  arête qui vaut 1. La formulation étant vraie pour tout triplet  $(\mathbf{J}', \mathbf{M}', \mathbf{L}')$ , elle l'est également pour ce  $\mathbf{L}'$ . Alors l'intégration sur la surface approchée se résume à l'intégrale sur  $K_n^+$  et  $K_n^-$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{L}' \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) d\Gamma = \frac{|K_n^+| + |K_n^-|}{3} M_n.$$

On compare cette quantité à

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{L}' \cdot (ikZ_0 \eta \mathbf{J}) d\Gamma &= \int_{K_n^+ \cup K_n^-} \mathbf{L}' \cdot (ikZ_0 \eta \mathbf{J}) dK_n^+ \cup K_n^- \\ &= ikZ_0 \int_{K_n^+ \cup K_n^-} \psi_n(x) \cdot \eta \sum_{l=1}^N J_l \varphi_l(x) dK_n^+ \cup K_n^- \\ &= ikZ_0 \sum_{l=1}^N J_l \left( \int_{K_n^+} \psi_n(x) \cdot \eta \varphi_l(x) dK_n^+ + \int_{K_n^-} \psi_n(x) \cdot \eta \varphi_l(x) dK_n^- \right). \end{aligned}$$

Les fonctions concernées sont alors les 5 fonctions associées aux deux triangles  $K_n^+$  et  $K_n^-$ . On obtient ainsi une expression reliant le  $n^{\text{eme}}$  ddl de  $\mathbf{M}$  aux cinq ddl voisins de  $\mathbf{J}$ . Si l'on considère maintenant les 3 ddl de  $\mathbf{M}$  d'un triangle  $K$ , on obtient une relation entre ces 3 ddl «magnétiques» et les 9 ddl du courant électrique correspondant aux flux à travers les arêtes de  $K$  et de ses 3 voisins immédiats. La matrice locale  $D_K$  est donc de taille  $3 \times 9$ .

Il résulte de cette élimination des courants magnétiques une méthode d'éléments finis délocalisés puisque que l'on va réaliser l'assemblage local des matrices (c'est-à-dire calculer la contribution d'un élément), celui-ci va faire appel à des éléments extérieurs, en l'occurrence des trois éléments adjacents. On pourra se reporter à [14] pour plus de détails.

### Elimination des multiplicateurs de Lagrange

Imaginons maintenant que la même matrice  $D$  relie les courants test  $\mathbf{J}'$  et  $\mathbf{M}'$ . Alors l'intégrale  $\int_{\Gamma} \mathbf{L} \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} - ikZ_0 \eta \mathbf{J}) d\Gamma = 0$ . Les multiplicateurs de Lagrange disparaissent alors complètement de la formulation. Celle-ci devient alors

$$a(\{J, DJ\}, \{J', DJ'\}) = V(\{J', DJ'\}). \quad (4.6)$$

### Assemblage des matrices élémentaires

Cette étape ne pose pas de problème particulier. En effet on sait, grâce aux travaux de J. Gay, traiter les singularités faibles qui apparaissent lors du calcul des matrices élémentaires. Pour de plus de précisions sur cette étape, on pourra se reporter à [14].

### Quelques remarques sur l'approximation des multiplicateurs

Le choix de l'approximation des multiplicateurs de Lagrange  $\mathbf{L}$  a été fait de manière à ce que l'expression des coefficients de  $\mathbf{M}$  en fonction de ceux de  $\mathbf{J}$  soit aisée, c'est-à-dire que l'on a cherché à rendre l'inversion plus facile.

Cependant les fonctions de base retenues pour la discrétisation de  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{L}'$  ne permettent pas d'approcher une grande quantité de champs : un simple champ uniforme sur

un triangle ne peut se décomposer de manière exacte sur ces fonctions de base. On peut donc imaginer que la précision de l'approximation est faible.

Il est envisageable de choisir les éléments de Raviart-Thomas pour la décomposition des multiplicateurs de Lagrange. La précision de l'approximation est alors meilleure, mais l'élimination des courants magnétiques n'est plus aussi simple. Il serait intéressant de comparer les résultats des deux méthodes.

# Chapitre 5

## Formulation de Després

L'idée initiale de cette formulation était de construire un système dont la matrice soit hermitienne. En effet les formulations précédentes aboutissent à des systèmes symétriques mais non hermitiens, alors que les systèmes hermitiens disposent de toute une panoplie de méthodes de résolution, en particulier les méthodes itératives efficaces.

Si l'on observe la matrice obtenue dans la formulation BGL par exemple, on voit que c'est le noyau de Green qui nous empêche d'obtenir le caractère hermitien. L'idée a donc été de relâcher la condition de radiation, ce qui est fait en considérant les ondes entrantes en plus des ondes sortantes.

L'objectif est de construire une fonctionnelle définie pour des champs entrants et sortants, mais qui soit minimisée pour le champ solution du problème, à savoir un champ sortant.

### 5.1 L'espace des solutions $\mathcal{W}$

#### 5.1.1 Définition

On définit l'espace  $\mathcal{W}$  comme l'espace des champs  $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$  tels que :

- $\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+ \in \mathcal{L}_{loc}^2(\Omega_{\text{ext}})^3$ ,
- $\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+$  satisfont les équations de Maxwell harmoniques ( $e^{-i\omega t}$ )  
 $\text{rot}\mathbf{E}^+ - ikZ_0\mathbf{H}^+ = 0$  et  $\text{rot}\mathbf{H}^+ + ikZ_0^{-1}\mathbf{E}^+ = 0$  sur  $\Omega_{\text{ext}}$ ,
- Les traces tangentielles sur  $\Gamma$  existent et sont de carré intégrable,
- leur comportement asymptotique est décrit par

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{|x| > R} (|\mathbf{E}^+|^2 + Z_0 |\mathbf{H}^+|^2) dx < \infty. \quad (5.1)$$

C'est une condition de «croissance contrôlée».

La dernière condition implique la propriété suivante :

Si  $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+) \in \mathcal{W}$  alors il existe deux champs de vecteurs tangents  $a_\infty^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$  et  $a_\infty^{out}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$  de la sphère unité  $S^2$  tels que

$$\begin{cases} \mathbf{E}^\infty(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} a_\infty^{out}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+, \hat{x}) + \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} a_\infty^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+, \hat{x}), \\ Z_0 \mathbf{H}^\infty(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} (\hat{x} \wedge a_\infty^{out}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+, \hat{x})) - \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} (\hat{x} \wedge a_\infty^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+, \hat{x})), \end{cases}$$

alors on a :

$$\begin{cases} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{R < |x| < 2R} (|\mathbf{E}^+(x) - \mathbf{E}^\infty(x)|^2) dx = 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{R < |x| < 2R} (|\mathbf{H}^+(x) - \mathbf{H}^\infty(x)|^2) dx = 0. \end{cases}$$

Ce résultat traduit clairement le comportement asymptotique de  $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+) \in \mathcal{W}$ . Loin de l'obstacle, le champ se décompose en la somme d'une onde sphérique entrante et d'une onde sphérique sortante. Nous verrons plus tard comment exprimer les champs de  $S^2$ ,  $a_\infty^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$  et  $a_\infty^{out}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$ .

### 5.1.2 Paramétrisation

Considérons un champ électromagnétique  $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$  de l'espace  $\mathcal{W}$ . On note  $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}})$  son prolongement par zéro sur  $\Omega_{int}$ .

On reprend la démarche effectuée page 13. Au sens des distributions,

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}} &= \frac{Z_0}{ik} \operatorname{div}(\mathbf{J} \delta_\Gamma), & \operatorname{div} \tilde{\mathbf{H}} &= \frac{1}{ikZ_0} \operatorname{div}(\mathbf{M} \delta_\Gamma), \\ \Delta \tilde{\mathbf{E}} + k^2 \tilde{\mathbf{E}} &= -ikZ_0 \left( \mathbf{J} \delta_\Gamma + \frac{1}{k^2} \operatorname{grad} \operatorname{div}(\mathbf{J} \delta_\Gamma) \right) + \operatorname{rot}(\mathbf{M} \delta_\Gamma), \\ \Delta \tilde{\mathbf{H}} + k^2 \tilde{\mathbf{H}} &= -ikZ_0^{-1} \left( \mathbf{M} \delta_\Gamma + \frac{1}{k^2} \operatorname{grad} \operatorname{div}(\mathbf{M} \delta_\Gamma) \right) + \operatorname{rot}(\mathbf{J} \delta_\Gamma). \end{cases}$$

Les solutions du système formé des quatre équations précédentes sont de la forme

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}} &= ikZ_0 \mathcal{T}_r \mathbf{J} + \mathcal{K}_r \mathbf{M} + \mathbf{E}^{Her}, \\ \tilde{\mathbf{H}} &= -ikZ_0^{-1} \mathcal{T}_r \mathbf{M} + \mathcal{K}_r \mathbf{J} + \mathbf{H}^{Her}, \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \mathbf{J} &= \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_\Gamma^+, \\ \mathbf{M} &= -\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_\Gamma^+, \end{cases} \quad (5.2)$$

somme d'une solution particulière de l'équation non homogène et d'une solution entière des équations de Maxwell.  $\mathcal{T}_r$  et  $\mathcal{K}_r$  sont définis comme les parties réelles des opérateurs  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{K}$ . Leur noyau est  $\frac{\cos(k|x-y|)}{4\pi|x-y|}$ , partie réelle du noyau de Green. Ce dernier correspond à la représentation intégrale des ondes sortantes vérifiant la condition de radiation. Ici l'espace  $\mathcal{W}$  prend également en compte des ondes entrantes. On peut donc considérer un noyau tel que celui mentionné ci-dessus.

A toute solution particulière des équations de Maxwell, on peut ajouter une solution des équations homogènes. C'est ce qui est fait avec les champs  $(\mathbf{E}^{Her}, \mathbf{H}^{Her})$  qui sont des solutions des équations de Maxwell homogènes sur  $\mathbb{R}^3$ . D'après [7], toute solution entière

des équations de Maxwell ayant un comportement asymptotique décrit par (5.1) est une onde de Herglotz, c'est-à-dire qu'il existe un noyau  $\gamma$ , champ de vecteurs tangents de la sphère unité  $S^2$ , tel que

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{Her}}(x) = \frac{ik\sqrt{iZ_0}}{4\pi} \int_{S^2} \gamma(\hat{d}) e^{ik\hat{d}\cdot x} d\sigma(\hat{d}), \\ \mathbf{H}^{\text{Her}}(x) = \frac{ik}{4\pi\sqrt{iZ_0}} \int_{S^2} i(\hat{d} \wedge \gamma(\hat{d})) e^{ik\hat{d}\cdot x} d\sigma(\hat{d}). \end{cases} \quad (5.3)$$

On peut interpréter cette représentation comme un paquet d'ondes planes : on considère l'ensemble des directions de propagation possible et l'on pondère chacune d'entre elles par un coefficient et une orientation du champ, c'est-à-dire par un noyau  $\gamma(\hat{d})$ , champ de vecteurs tangents défini sur  $S^2$ .

On voit par conséquent que tout élément  $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$  de  $\mathcal{W}$  est caractérisé par :

– **ses courants équivalents** : ils sont définis par  $\mathbf{J} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_{|\Gamma}^+$  et  $\mathbf{M} = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_{|\Gamma}^+$ . Par la suite on considérera ces courants normalisés

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{M}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{iZ_0} \mathbf{J} \\ \frac{1}{\sqrt{iZ_0}} \mathbf{M} \end{pmatrix}.$$

– **le noyau**  $\gamma$  de son champ de Herglotz.

Avec des notations pseudo-matricielles, on a donc

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{E}} \\ \widetilde{\mathbf{H}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{T}}_r & \widetilde{\mathcal{K}}_r \\ \widetilde{\mathcal{K}}_r & \widetilde{\mathcal{T}}_r \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{\text{Her}} \\ \mathbf{H}^{\text{Her}} \end{pmatrix}.$$

On définit alors les opérateurs

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_r & \mathcal{K}_r - \frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge \\ \mathcal{K}_r - \frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge & \mathcal{T}_r \end{pmatrix} \quad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_i & \mathcal{K}_i \\ \mathcal{K}_i & \mathcal{T}_i \end{pmatrix}$$

qui font appel aux parties réelle et imaginaire du noyau de Green  $\frac{\cos(k|x-y|)}{4\pi|x-y|}$  pour  $\mathbb{T}$ , et  $\frac{\sin(k|x-y|)}{4\pi|x-y|}$  pour  $\mathbb{R}$ . Le second opérateur peut se factoriser en  $\mathbb{R} = (\mathbb{A}^\infty)^* \mathbb{A}^\infty$  où  $\mathbb{A}^\infty$  est défini par :

$$\mathbb{A}^\infty : \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in T\mathcal{L}^2(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{A}^\infty \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in T\mathcal{L}^2(S^2)$$

avec

$$\mathbb{A}^\infty \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}(\hat{d}) = \frac{k}{4\pi} \left( \int_{\Gamma} \hat{d} \wedge (v(x) \wedge \hat{d}) e^{ik\hat{d}\cdot x} d\Gamma(x) - i\hat{d} \wedge \int_{\Gamma} \hat{d} \wedge (w(x) \wedge \hat{d}) e^{ik\hat{d}\cdot x} d\Gamma(x) \right).$$

Pour plus de précisions, on pourra se reporter à [15].

Pour obtenir que tout champ défini par (5.2) et (5.3) appartienne à l'espace  $\mathcal{W}$ , il faut s'assurer que le champ s'annule dans le domaine intérieur  $\Omega_{\text{int}}$ . Ceci est assuré par la condition

$$\mathbb{T}\mathbf{u} + i(\mathbb{A}^\infty)^* \gamma = 0.$$

On obtient alors la paramétrisation suivante

Tout champ  $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$  de  $\mathcal{W}$  est entièrement caractérisé par les courants  $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$  et par son noyau  $\gamma$  à travers les relations 5.2 et 5.3, vérifiant de plus :

$$\mathbb{T}\mathbf{u} + i(\mathbb{A}^\infty)^* \gamma = 0$$

## 5.2 La fonctionnelle à minimiser

### 5.2.1 Construction de $I(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$

On suppose dans un premier temps une condition d'impédance simplifiée de la forme

$$\mathbf{E}_t^+ - Z_0(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^+) = -\left(\mathbf{E}_t^{\text{inc}} - Z_0(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{\text{inc}})\right).$$

Nous allons voir dans la partie 5.3 comment travailler avec une impédance relative quelconque.

Nous recherchons le champ diffracté  $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$  dans l'espace  $\mathcal{W}$ , c'est-à-dire dans le vaste ensemble des champs qui sont la somme d'une contribution rentrante et d'une contribution sortante. Pour tout champ  $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$  de  $\mathcal{W}$ , on définit les grandeurs :

$$G^{\text{in}}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+) = \mathbf{E}_t^+ + Z_0 \mathbf{H}^+ \wedge \mathbf{n}$$

relative à une onde entrante ( $\mathbf{n}$  est la normale orientée vers le domaine extérieur), et pour l'onde sortante :

$$G^{\text{out}}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+) = -\mathbf{E}_t^+ + Z_0 \mathbf{H}^+ \wedge \mathbf{n}.$$

Au champ incident est associé de même la quantité

$$G^{\text{in}} = -\left(\mathbf{E}_t^{\text{inc}} + Z_0 \mathbf{H}^{\text{inc}} \wedge \mathbf{n}\right)$$

qui n'est fonction que du champ incident : c'est une donnée du problème.

Nous disposons maintenant des outils nécessaires à la construction de la fonctionnelle. Nous voulons que celle-ci

- contrôle le champ lointain :

$$\|a_\infty^{\text{in}}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 + \|a_\infty^{\text{out}}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2,$$

- contrôle le champ sur la surface de l'obstacle

$$\|\mathbf{E}^+\|^2 + Z_0^2 \|\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^+\|^2 \propto \|G^{\text{in}}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 + \|G^{\text{out}}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2,$$

- assure la condition d'impédance

$$(G^{\text{in}}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+) | G^{\text{in}}).$$

On considère ainsi la fonctionnelle suivante à minimiser

$$\begin{aligned} I(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+) = & \frac{1}{4} \left( \|G^{\text{in}}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 + \|G^{\text{out}}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 \right) \\ & + \|a_\infty^{\text{in}}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 + \|a_\infty^{\text{out}}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 \\ & - 2\Re \epsilon (G^{\text{in}}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+) | G^{\text{in}}). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme d'isométrie (proposé par B. Després)

$$\frac{1}{4}\|G^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 + \|a_\infty^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 = \frac{1}{4}\|G^{out}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 + \|a_\infty^{out}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 \quad (5.4)$$

qui traduit la conservation de l'énergie pour une onde  $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$ , la fonctionnelle s'écrit sous la forme

$$I(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+) = \frac{1}{2}\|G^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+) - G^{in}\|^2 + 2\|a_\infty^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 - \frac{1}{2}\|G^{in}\|^2. \quad (5.5)$$

On voit immédiatement que cette fonctionnelle a pour minimum  $-\frac{1}{2}\|G^{in}\|^2$ , valeur prise pour le champ solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E}^+ - ikZ_0 \mathbf{H}^+ = 0 \\ \text{rot } \mathbf{H}^+ + ikZ_0^{-1} \mathbf{E}^+ = 0 \end{array} & \text{sur } \Omega_{\text{ext}}, \\ \mathbf{E}_t^+ + Z_0 \mathbf{H}_t^+ \wedge \mathbf{n} = G^{in} & \text{sur } \Gamma, \\ a_\infty^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+) = 0 & \text{Condition de radiation.} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Ce qui est équivalent à dire que le champ qui minimise la fonctionnelle est un champ vérifiant les équations de Maxwell homogènes sur le domaine extérieur, la condition d'impédance sur la frontière de l'obstacle et la condition de radiation à l'infini. Par unicité de la solution de notre problème, c'est le champ que l'on recherche.

*Remarque.* Les coefficients des divers termes de la fonctionnelle ont bien sûr été choisis de manière à pouvoir appliquer le lemme d'isométrie et donc de sorte que la minimisation de la fonctionnelle soit équivalente à la résolution du problème initial.

### 5.2.2 Reformulation à l'aide des paramètres de $\mathcal{W}$

La fonctionnelle a été exprimée à l'aide des champs  $\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+$ . Il est préférable d'utiliser les courants et le noyau de Herglotz

$$\begin{aligned} \|G^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 + \|G^{out}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 &= 2\|\mathbf{E}^+ \wedge \mathbf{n}\|^2 + 2Z_0^2\|\mathbf{H}^+ \wedge \mathbf{n}\|^2 \\ &= 2(\|\mathbf{M}\|^2 + Z_0^2\|\mathbf{J}\|^2) \\ &= 2Z_0(\|\mathbf{M}_1\|^2 + \|\mathbf{J}_1\|^2) = 2Z_0\|\mathbf{u}\|^2. \end{aligned}$$

L'étude du comportement asymptotique de  $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$  montre (Cf. [15]) que les champs lointains s'expriment à l'aide de l'opérateur  $\mathbb{A}^\infty$  sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} a_\infty^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+; \hat{x}) = \frac{\sqrt{iZ_0}}{2}(\mathbb{A}^\infty(\mathbf{u}, \hat{x}) + \gamma(\hat{x})), \\ a_\infty^{out}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+; \hat{x}) = \frac{\sqrt{iZ_0}}{2}(\mathbb{A}^\infty(\mathbf{u}, -\hat{x}) - \gamma(-\hat{x})). \end{array} \right.$$

Il vient alors

$$\|a_\infty^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 + \|a_\infty^{out}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)\|^2 = \frac{Z_0}{2}(\|\gamma\|^2 + \|\mathbb{A}^\infty \mathbf{u}\|^2).$$

De plus, si on définit  $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{iZ_0}} G^{in} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{iZ_0}} \mathbf{n} \wedge G^{in} \end{pmatrix}$  qui caractérise le champ incident, nous avons

$$(G^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+) | G^{in}) = Z_0(\mathbf{u} | \mathbf{g}).$$

On obtient donc l'expression suivante de la fonctionnelle

$$I(\mathbf{u}, \gamma) = Z_0 \left( \frac{1}{2} \|\gamma\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbb{A}^\infty \mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - \Re \epsilon(\mathbf{u} | \mathbf{g}) \right). \quad (5.7)$$

La solution du problème doit minimiser la fonctionnelle  $I(\mathbf{u}, \gamma)$  mais également vérifier la contrainte  $\mathbb{T}\mathbf{u} = -i(\mathbb{A}^\infty)^* \gamma$ . Ceci nous amène à construire le Lagrangien

$$L(\mathbf{u}, \gamma; \mathbf{v}) = Z_0^{-1} I(\mathbf{u}, \gamma) - \Re \epsilon(\mathbb{T}\mathbf{u} + i(\mathbb{A}^\infty)^* \gamma | \mathbf{v})$$

$$L(\mathbf{u}, \gamma; \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \|\gamma\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbb{A}^\infty \mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - \Re \epsilon \left( (\mathbf{u} | \mathbf{g}) + (\mathbf{u} | \mathbb{T}^* \mathbf{v}) + i(\gamma | \mathbb{A}^\infty \mathbf{v}) \right)$$

où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  appartiennent à  $U = \mathcal{L}^2(\Gamma) \times \mathcal{L}^2(\Gamma)$  et  $\gamma \in Z = \mathcal{L}^2(S^2) \times \mathcal{L}^2(S^2)$ .

### 5.2.3 Minimisation de $L(\mathbf{u}, \gamma; \mathbf{v})$

La valeur minimale du Lagrangien est obtenue pour

$$\begin{cases} \mathbf{u} + (\mathbb{A}^\infty)^* \mathbb{A}^\infty \mathbf{u} - \mathbb{T}^* \mathbf{v} = \mathbf{g} \\ \gamma + i\mathbb{A}^\infty \mathbf{v} = 0 \\ -\mathbb{T}\mathbf{u} - i(\mathbb{A}^\infty)^* \gamma = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

La formulation n'assure pas l'unicité du problème. En effet il se trouve que les opérateurs  $\mathbb{A}^\infty$  et  $\mathbb{T}^*$  ont le même noyau. Il en résulte que le multiplicateur de Lagrange  $\mathbf{v}$  est déterminé à un élément du noyau de  $\mathbb{A}^\infty$  près. La solution à ce problème proposée par B. Després et F. Collino a été de pénaliser le système en tenant compte du fait que le champ diffracté est une onde sortante. Pour les champs  $(\mathbf{u}, \gamma)$  solutions du problème, la composante entrante  $a_\infty^{in}(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$  doit être nulle ce qui impose

$$\forall \hat{x} \in S^2, \quad \mathbb{A}^\infty(\mathbf{u}, \hat{x}) = \gamma(\hat{x}) \implies \mathbb{A}^\infty \mathbf{u} = \gamma.$$

Puis en utilisant la seconde équation de (5.8), on voit que l'on peut pénaliser le système par le terme  $\beta(\mathbf{u} + i\mathbf{v})$  avec  $\beta > 0$ . La minimisation de  $L(\mathbf{u}, \gamma; \mathbf{v}) + \beta \|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2$  donne

$$\boxed{\begin{cases} (1 + \beta)\mathbf{u} + (\mathbb{A}^\infty)^* \mathbb{A}^\infty \mathbf{u} - \mathbb{T}^* \mathbf{v} + i\beta \mathbf{v} = \mathbf{g} \\ \gamma + i\mathbb{A}^\infty \mathbf{v} = 0 \\ \mathbb{T}\mathbf{u} + i\beta \mathbf{u} - \beta \mathbf{v} + i(\mathbb{A}^\infty)^* \gamma = 0 \end{cases}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{u} \in U = \mathcal{L}^2(\Gamma) \times \mathcal{L}^2(\Gamma) \\ \mathbf{v} \in V = \{\mathbf{v} \in U / \mathbb{T}^* \mathbf{v} \in U\} \\ \gamma \in \mathcal{L}^2(S^2) \times \mathcal{L}^2(S^2) \end{cases} \quad (5.9)$$

qui est un problème bien posé au sens de Hadamard. L'unicité de la solution est assurée sur  $U \times V$ .

### 5.3 Généralisation à une impédance quelconque

On considère la forme générale de la condition d'impédance avec un opérateur symétrique

$$\mathbf{E}_t^+ - Z_0 \mathcal{Z}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^+) = -F = -\mathbf{E}_t^{\text{inc}} - Z_0 \mathcal{Z}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{\text{inc}}).$$

Nous allons chercher à nous ramener au cas simple précédent. À l'opérateur d'impédance  $\mathcal{Z}$  est associé l'opérateur de réflexion  $\mathcal{R} = (I - \mathcal{Z})(I + \mathcal{Z})^{-1}$ . Avec les quantités  $G^{\text{in}}$  et  $G^{\text{out}}$  définies précédemment, on a la relation

$$(I + \mathcal{R})F = \mathcal{R}G^{\text{out}} + G^{\text{in}}.$$

On peut réécrire  $G^{\text{out}}$  en fonction des inconnues  $(\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1)$  sous la forme

$$G^{\text{out}} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{M} + Z_0 \mathbf{J},$$

ce qui nous permet de relier le second membre  $g$  du système aux inconnues du problème (5.8) et à la donnée  $F$  :

$$\begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{iZ_0}} G^{\text{in}} \\ \frac{-i}{\sqrt{iZ_0}} \mathbf{n} \wedge G^{\text{in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{iZ_0}} (I + \mathcal{R})F \\ \frac{-i}{\sqrt{iZ_0}} \mathbf{n} \wedge (I + \mathcal{R})F \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i\mathcal{R}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}_1 - \mathbf{J}_1) \\ \mathbf{n} \wedge \mathcal{R}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}_1 - \mathbf{J}_1) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} - N_{\mathcal{R}} \mathbf{u}.$$

On obtient alors le système suivant

$$\boxed{\begin{cases} (1 + \beta)\mathbf{u} + (\mathbb{A}^\infty)^* \mathbb{A}^\infty \mathbf{u} - \mathbb{T}^* \mathbf{v} + i\beta \mathbf{v} = \mathbf{f} - N_{\mathcal{R}} \mathbf{u} \\ \gamma + i\mathbb{A}^\infty \mathbf{v} = 0 \\ \mathbb{T} \mathbf{u} + i\beta \mathbf{u} - \beta \mathbf{v} + (\mathbb{A}^\infty)^* \mathbb{A}^\infty \mathbf{v} = 0. \end{cases}} \quad (5.10)$$

Le problème reste bien posé si l'opérateur de réflexion est borné  $\|\mathcal{R}\| \leq 1$  ce qui est assuré par la condition d'absorption  $\Re Z > 0 \iff \Im \eta < 0$ .

### 5.4 Résolution du système

La résolution du système précédent peut se ramener à la recherche des champs

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{M}_1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}.$$

Elle peut être réalisée par des méthodes itératives. En effet la convergence dans le cas de la méthode de Jacobi relaxée a été prouvée dans [15]. Cependant elle présente l'inconvénient de travailler avec une matrice de taille  $4N \times 4N$ , ce qui est gênant lorsque le pas du maillage diminue. On va donc chercher à réduire la taille des matrices sur lesquelles on travaille.

Si on considère comme inconnues  $X_{1\pm} = \mathbf{J}_1 \pm \mathbf{M}_1$ ,  $X_{2\pm} = \mathbf{J}_2 \pm \mathbf{M}_2$ , on obtient un système dont la matrice est de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_+ & -A_+ & 0 \\ -A_- & 0 & \mathcal{A}_- \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1+} \\ X_{2+} \\ X_{1-} \\ X_{2-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_+ \\ 0 \\ g_- \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce que l'on peut voir comme deux systèmes couplés

$$\begin{cases} \mathcal{A}_+ \begin{pmatrix} X_{1+} \\ X_{2+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_+ + A_+ X_{1-} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}_- \begin{pmatrix} X_{1-} \\ X_{2-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_- + A_- X_{1+} \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

La résolution peut être réalisée de manière itérative avec par exemple la méthode de Jacobi relaxée :

---

Initialisation :

$$\begin{pmatrix} X_{1+}^0 \\ X_{2+}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{1-}^0 \\ X_{2-}^0 \end{pmatrix} = 0$$

Boucle sur  $p$  :

Inversion

$$\begin{cases} \mathcal{A}_+ \begin{pmatrix} \widetilde{X}_{1+}^p \\ \widetilde{X}_{2+}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_+ + A_+ X_{1-}^{p-1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}_- \begin{pmatrix} \widetilde{X}_{1-}^p \\ \widetilde{X}_{2-}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_- + A_- X_{1+}^{p-1} \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Relaxation

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X_{1+}^p \\ X_{2+}^p \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \widetilde{X}_{1+}^p \\ \widetilde{X}_{2+}^p \end{pmatrix} + (1-r) \begin{pmatrix} X_{1+}^{p-1} \\ X_{2+}^{p-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X_{1-}^p \\ X_{2-}^p \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \widetilde{X}_{1-}^p \\ \widetilde{X}_{2-}^p \end{pmatrix} + (1-r) \begin{pmatrix} X_{1-}^{p-1} \\ X_{2-}^{p-1} \end{pmatrix} \end{cases}$$


---

Les matrices à inverser ne sont alors plus que de taille  $2N_{ar} \times 2N_{ar}$ . Mais il est également possible d'aller plus loin : on peut éliminer une des deux inconnues dans chacun des systèmes par une méthode du type complément de Schur. On travaille alors sur des blocs de taille  $N_{ar} \times N_{ar}$ .

# Conclusion

*L'objectif premier de ce stage était de réaliser un travail de synthèse sur les différentes formulations variationnelles existantes pour la résolution des problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques avec condition d'impédance. Nous avons mis en évidence les avantages et les inconvénients de chacune d'entre elles, en les comparant du point de vue de leur robustesse (unicité de la solution), de leur coût d'implantation, ie. sur des caractéristiques telles que le nombre d'inconnues et la possibilité d'utiliser des méthodes de résolution efficaces (par exemple des méthodes itératives). Les principaux résultats sont rappelés dans le tableau récapitulatif (Cf. page suivante). Ce travail porte sur l'aspect théorique de ces formulations. Pour compléter cette étude, il serait intéressant de comparer les résultats numériques obtenus sur certains cas test, comme par exemple une sphère, un cube ou une amande...*

*Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe EMC pour m'avoir accueilli pendant ces 2 mois. Grâce à eux, j'ai pu me rendre compte du travail effectué dans un centre de recherche tel que le Cerfacs, en particulier la collaboration entre les différents acteurs, à savoir permanents, thésards et stagiaires. Ce stage m'a également permis d'accroître mes connaissances en ce qui concerne dans le domaine de l'électromagnétisme, et surtout dans le domaine des méthodes de résolution numérique.*

Formulation	Triviale	EFIE	Bendali	BGL	Després
Unicité de la solution pour $\Im m \eta \leq 0$	Oui	Problèmes de courants parasites dus aux fréquences propres de la cavité intérieure	Oui	Oui	Oui
Condition d'impédance	Vérifiée en chaque point	Vérifiée en chaque point	elle est vue comme une contrainte globale	Vérifiée localement	Vérifiée localement
Conservation du flux et discrétisation	On doit conserver les flux de $\mathbf{J}$ et de $\mathbf{n} \wedge \mathbf{J} \Rightarrow$ formulation inutilisable pour une géométrie quelconque	Conservation du flux de $\mathbf{J}$ uniquement $\Rightarrow$ éléments de Raviart-Thomas	$\mathbf{J}$ et $\mathbf{M}$ ne vérifient pas la condition d'impédance localement $\Rightarrow$ conservation des flux assurée de manière indépendante puis élimination de $\mathbf{M}$ par un procédé de condensation	$\mathbf{J}$ et $\mathbf{M}$ décomposés de manière indépendantes sur les fonctions de base de Raviart-Thomas	Pareil que pour la formulation BGL
Inconnues	$\mathbf{J}$	$\mathbf{J}$	$\mathbf{J}$ après élimination de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{L}$	$(\mathbf{J}, \mathbf{M})$	$(\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1)$ et $(\mathbf{J}_2, \mathbf{M}_2)$
Système final pour un maillage de $N_{ar}$ arêtes	$\times$	Matrice de taille $N_{ar} \times N_{ar}$ non inversible pour certaines fréquences	Matrice symétrique de taille $N_{ar} \times N_{ar}$	Matrice symétrique de taille $2N_{ar} \times 2N_{ar}$	Système hermitien de taille $4N_{ar} \times 4N_{ar}$ que l'on peut ramener à deux systèmes couplés de taille $N_{ar} \times N_{ar}$



# Bibliographie

- [1] J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equation*. Yale University Press, New Haven , 1923.
- [2] V.H. RUMSEY, *Reaction Concept in Electromagnetic Theory*. The Physical Review, vol.94 n°6 pp 1483-1491, 1954.
- [3] P.A. RAVIART & J.M. THOMAS, *A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems*. Mathematical Aspects of Finite Element Methods, Rome 1975 ; Galligani & Magenes Eds, Springer-Verlag, Berlin 1975.
- [4] M.A. LEONTOVICH, *Approximate Boundary Condition for electromagnetic field on the surface of good conductor*. Investigations on Radiowave Propagation part II, Moscow, Academy of Sciences 1978.
- [5] S.M. RAO, D.R. WILTON & A.W. GLISSON, *Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 30, No 3, Mai 1982.
- [6] A. BENDALI, *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*. Thèse de Doctorat d'État, Université de Paris VI , 1984.
- [7] D. COLTON & R. KRESS, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Applied Mathematical Science 93, Springer-Verlag, Berlin 1992.
- [8] V. LANGE, *Équations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un obstacle dissipatif*. Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, 1995.
- [9] J.C. NÉDÉLEC, *Ondes acoustiques et électromagnétiques. Équations intégrales*. Cours de DEA, École Polytechnique, Palaiseau, 1996.
- [10] L. VERNHET, *Approximation par éléments finis de frontière de problèmes de diffraction d'ondes avec condition d'impédance*. Thèse de Doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 1997.
- [11] A. BENDALI, M'B. FARES & J. GAY, *A Boundary-Element Solution of the Leontovich Problem*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 47, No 10, Octobre 1999.
- [12] M. SAILLARD & G. SORIANO, *Scattering of electromagnetic waves from two-dimensional rough surfaces with impedance approximation*. J. Opt. Soc. Amer. A, Vol. 18, p. 124-133, Jan. 2001.
- [13] J. JIN, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. IEEE Press, Wiley-Interscience, New York 2002.

- [14] E. GARCIA, *Mise en œuvre de la condition d'impédance pour les équations de Maxwell*. Rapport de stage de DEA d'Analyse Numérique, Université Paris VI.
- [15] F. COLLINO & B. DESPRÉS, *Integral equations via saddle point problems for the time-harmonic Maxwell's equations*. J. of Computational and Applied Mathematics, 150 p.157-192 2003.
- [16] O. CELLARIER, *Introduction d'une condition d'impédance dans un code d'électromagnétisme*. Rapport de stage de DEA, Cerfacs Toulouse 2003.



# **Annexes**



# Présentation du Cerfacs

## Généralités

Société civile, le CERFACS a été fondé en 1987 par Aérospatiale, le CNES, EDF et Météo-France, et est devenu un institut de renom international pour son expertise dans le domaine du calcul scientifique à hautes performances. Il a pour objectifs de s'occuper de la résolution par modélisations et simulations numériques des problèmes scientifiques nécessitant le recours aux moyens de calculs les plus puissants. Il conçoit, optimise et évalue les outils et algorithmes qui tirent le meilleur parti des ordinateurs à hautes performances dont il dispose. Ceux-ci représentent une capacité de calcul non négligeable : citons notamment une SGI Origin à 32 processeurs, une MEIKO CS2 32 processeurs, une SGI PowerChallenge 8 processeurs, ainsi que des accès sur la plupart des supercalculateurs (CRAY C90 et J90, IBM SP2, FUJITSU VPP700,...)

Le CERFACS a établi des conventions de collaboration avec de nombreux organismes scientifiques, parmi lesquels le CNRS, l'université Paul Sabatier, l'INRIA, l'INP Toulouse et le CEA.

Il réunit de manière interdisciplinaire des physiciens, des mathématiciens appliqués, de numériciens et des ingénieurs autour de cinq équipes. Les deux premières constituent le «pôle théorie»

**Parallel Algorithms** a pour but d'étudier et de développer des méthodes numériques et des logiciels pour l'utilisation optimale (performance et fiabilité) des calculateurs haute-performance (scalaire, vectoriel, parallèle) dans le domaine scientifique. Les principaux thèmes abordés sont les noyaux de calcul (algèbre linéaire), les calculs de matrices creuses de grandes dimensions (méthodes directes, itératives, solveurs de valeurs propres...) ainsi que la décomposition de domaines.

**Image and Signal Processing** travaille en partenariat avec l'Observatoire Midi-Pyrénées. Elle s'intéresse essentiellement aux problèmes inverses : déconvolution, synthèse de Fourier... Les applications sont l'imagerie satellitaires (CNES), la télédétection par synthèse d'ouverture (ESA) et l'astronomie observationnelle (ESO, IRAM, NRAO).

Autour de ces deux services, trois équipes s'attachent à l'aspect applications :

**Computational Fluid Dynamics** : la simulation numérique est le complément indispensable des études expérimentales (essais en soufflerie, etc...) dans la conception des avions, des voitures ou des engins spatiaux. Une vaste gamme d'outils numériques (simulation directe, simulation des grandes échelles, modèles de turbulences, maillage adaptatifs, etc...) sont développés au Cerfacs afin de traiter des problèmes

tels que l'écoulement autour d'un avion, la combustion interne d'un moteur, la pollution atmosphérique à l'échelle d'une ville ou la réduction du bruit généré par la turbulence autour d'une voiture.

**Climate Modelling and Global Change** développe des modèles numériques pour l'étude du climat terrestre et son évolution. Cette modélisation se fait à l'échelle globale, en couplant des modèles d'atmosphère, d'océan et de glace de mer développés dans la communauté scientifique. L'expérience acquise permet d'aborder les problèmes de scénario climatique pour le futur.

**Electromagnetism and Control** est l'équipe que j'ai intégré durant son stage. Nous allons décrire son activité plus en détail dans la section qui suit.

## L'équipe EMC

Fondée en 1992, elle compte actuellement cinq membres permanents et deux doctorants :

- Abderrhamane BENDALI, chef de projet et enseignant à l'INSA,
- Florence MILLOT, chercheur senior,
- M'Barek FARES, chercheur senior,
- Nathalie BARTOLI, chercheur senior,
- Francis COLLINO, consultant externe.
- Nicolas ZERBIB, doctorant,
- Nolwenn BALIN, doctorant.

L'équipe EMC a pour objectifs de développer des nouvelles méthodes numériques performantes pour la résolution des équations de Maxwell dans les domaines fréquentiels et temporels. Elle propose ainsi des algorithmes efficaces destinés principalement à des applications industrielles telles que la caractérisation d'antennes, la compatibilité électromagnétique ou le calcul de signature radar (RCS : *Radar Cross Section*).

Actuellement ses thèmes de recherche sont :

- les méthodes intégrales pour le calcul de la diffraction d'ondes électromagnétique en régime harmonique,
- la FMM (*Fast Multipole Method*) pour la résolution des problèmes électromagnétiques de grandes dimensions,
- la méthode de Décomposition de Domaine,
- les équations intégrales de Després couplées aux méthodes itératives,
- l'effet des couches minces,
- et les problèmes des cavités de grandes dimensions.

L'équipe EMC travaille en partenariat industriel avec des organismes comme le CNES, le CEA-CESTA, Alcatel Space, Dassault ou EADS, et avec des laboratoires de recherche comme celui de l'ENAC ou de l'INSA, le MIP.

L'intérêt de la simulation et de la modélisation électromagnétique est multiple. Tout d'abord, d'un point de vue physique, elle permet de mieux comprendre les différents modèles utilisés pour représenter les phénomènes électromagnétiques. Du point de vue de l'industriel, elle permet d'appréhender le comportement d'objets sans avoir à les construire. Cela permet par exemple l'expérimentation dans les domaines spatial et aéronautique. On

trouve donc diverses applications de la simulation et de la modélisation électromagnétiques :

**Industries de la défense, de l'aéronautique et de l'espace** : radar, transmission, sécurité des équipements électriques,...

**Industries grand public** : téléphones mobiles, antennes,...