

**INTRODUCTION D'UNE CONDITION  
D'IMPEDANCE DANS UN  
CODE D'ELECTROMAGNETISME**

**Olivier Cellarier**  
mars-août 2003

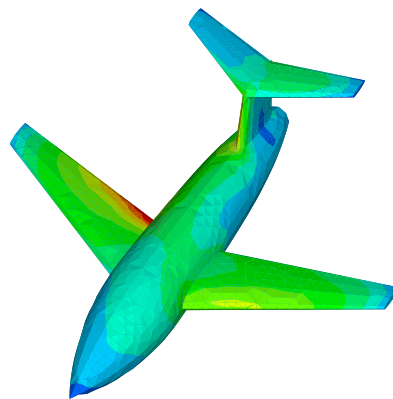
**MATMECA-CERFACS  
CERFACS REPORT WN/EMC/03/54**



---

**INTRODUCTION D'UNE CONDITION  
D'IMPEDANCE DANS  
UN CODE D'ELECTROMAGNETISME**

---



**Olivier CELLARIER**

Promotion : **2003**

Directeurs de stage : **F. MILLOT** et **A. BACHELOT**

CERFACS/MATMECA

29 août 2003

# Remerciements

Je remercie sincèrement Florence Millot pour m'avoir proposé ce sujet de stage. Sa gentillesse, sa patience, sa disponibilité et son soutien constant m'ont permis de mener à bien ce travail dans des conditions idéales.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Abderrahmane Bendali et à Francis Collino pour m'avoir fait profiter sans compter de leurs compétences scientifiques.

Mes remerciements s'adressent également à M'Barek Fares qui a toujours su trouver du temps pour m'aider dans les problèmes numériques que j'ai rencontrés.

J'exprime ma reconnaissance à Alain Bachelot, qui est à la base de mes connaissances en électromagnétisme.

Je remercie tout particulièrement Nicolas Zerbib pour ses conseils judicieux qui m'ont permis d'avancer rapidement.

Un grand merci à Nathalie Bartoli qui m'a toujours aidé dans les moments difficiles et notamment pour la relecture de ce rapport.

Et enfin, je souhaite remercier Fabrice Silva pour son sens physique et critique.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation mathématique du problème physique</b>	<b>2</b>
1.1 Description physique . . . . .	2
1.2 Les équations de Maxwell . . . . .	3
1.3 Hypothèses initiales . . . . .	3
1.3.1 Les équations de Maxwell en régime harmonique . . . . .	3
1.3.2 Impédance équivalente . . . . .	3
1.3.3 La condition de radiation de Sommerfeld . . . . .	4
1.4 Conclusion . . . . .	5
<b>2 Résolution du problème de diffraction</b>	<b>6</b>
2.1 Résolution par équations intégrales . . . . .	6
2.2 Quelques formulations possibles . . . . .	7
2.2.1 Une formulation “normale” . . . . .	7
2.2.2 Formulations E.F.I.E., M.F.I.E., C.F.I.E. . . . .	7
2.2.3 La formulation de Bachelot, Gay et Lange ( <b>BGL</b> ) . . . . .	8
2.2.4 La formulation de <b>Bendali</b> . . . . .	8
2.3 Conclusion . . . . .	8
<b>3 Le problème discret : résolution numérique</b>	<b>9</b>
3.1 Démonstration de l’existence et de l’unicité de la solution dans le cas discret . . . . .	9
3.2 Discrétisation . . . . .	10
3.2.1 Les éléments de Raviart-Thomas . . . . .	10
3.2.2 Obtention matricielle . . . . .	11
3.3 Implémentation dans le code multipôle . . . . .	12
3.4 Conclusion . . . . .	15
<b>4 Précision des formulations</b>	<b>16</b>
4.1 La méthode de convergence par raffinement . . . . .	16
4.1.1 Construction du maillage . . . . .	16
4.1.2 Mise en évidence de la meilleure solution . . . . .	17
4.2 L’idée du dipôle . . . . .	17
4.2.1 La formulation <b>BGL</b> . . . . .	18
4.2.2 La formulation de <b>Bendali</b> . . . . .	19
4.2.3 Mise en évidence de la meilleure solution . . . . .	19
<b>5 Les résultats numériques</b>	<b>20</b>
5.1 Remarques sur la parallélisation . . . . .	20
5.1.1 Principe . . . . .	20
5.1.2 Performances . . . . .	20
5.2 Validation du code . . . . .	21

5.2.1	Comparaison avec une solution analytique . . . . .	21
5.2.2	Mise en évidence de la consistance de notre solution . . . . .	21
5.2.3	Comparaison avec la formulation de <b>Bendali</b> . . . . .	22
5.3	Performances de la formulation <b>BGL</b> . . . . .	23
5.3.1	Méthode de raffinement de maillage . . . . .	24
5.3.2	Idée du dipôle . . . . .	25
5.4	Un cas semi-industriel : l'avion . . . . .	26
5.5	Conclusion . . . . .	27
<b>Conclusion</b>		<b>28</b>
<b>ANNEXES</b>		<b>30</b>
<b>A Les sources</b>		<b>a</b>
A.1	L'onde plane . . . . .	a
A.2	Le dipôle . . . . .	a
<b>B L'impédance équivalente</b>		<b>b</b>
B.1	Impédance pour une onde plane à incidence normale diffractée par un plan infini . . . . .	b
B.2	Passage à des géométries quelconques . . . . .	d
<b>C Obtention des différentes formulations</b>		<b>e</b>
C.1	Le principe des réactions de Rumsey . . . . .	e
C.2	Cas impédant . . . . .	f
C.2.1	La formulation de Bachelot, Gay et Lange ( <b>BGL</b> ) . . . . .	f
C.2.2	La formulation de <b>Bendali</b> . . . . .	g
C.3	Cas du dipôle . . . . .	g
C.3.1	La formulation <b>BGL</b> . . . . .	h
C.3.2	La formulation de <b>Bendali</b> . . . . .	h
<b>D Traitement des intégrales singulières</b>		<b>j</b>
<b>E La S.E.R.</b>		<b>l</b>
<b>F La méthode multipôle (modèle mono-niveau)</b>		<b>n</b>
F.1	Principe du modèle . . . . .	n
F.2	Simplification des termes matriciels . . . . .	n
F.3	Décomposition du noyau . . . . .	o
F.4	Découpage en domaine . . . . .	p
F.5	Le modèle hiérarchique . . . . .	p
<b>G Le maillage de l'avion</b>		<b>q</b>

# Table des figures

1.1	Schématisation du problème initial . . . . .	2
1.2	Impédance équivalente . . . . .	4
3.1	Fonctions de Raviart-Thomas . . . . .	11
3.2	Comparaison des méthodes de traitement des interactions . . . . .	13
4.1	Modèle de raffinement de maillage . . . . .	16
4.2	Schéma du problème test du dipôle . . . . .	17
5.1	Comparaison des S.E.R. dans le cas de la sphère . . . . .	21
5.2	Calcul de l'ordre de consistance . . . . .	22
5.3	Comparaison des S.E.R. dans le cas du cube . . . . .	23
5.4	Comparaison des S.E.R. à haute fréquence dans le cas de la gellule . . . . .	24
5.5	Comparaison des S.E.R. . . . .	26
B.1	Plan infini recouvert de diélectrique . . . . .	c
C.1	Schéma du problème test du dipôle . . . . .	h
D.1	Modèle de raffinement de maillage . . . . .	j
F.1	Traitement sans la méthode multipôle . . . . .	o
F.2	Traitement avec la méthode multipôle . . . . .	p
G.1	Maillage d'un avion . . . . .	q

# Liste des tableaux

- 5.1 Temps de résolution . . . . . 20
- 5.2 Erreur relative par rapport à une solution raffinée . . . . . 21
- 5.3 Erreur relative en fonction du pas de discrétisation . . . . . 23
- 5.4 Erreur relative entre les deux formulations dans le cas de la sphère . . . . . 24
- 5.5 Erreur relative par rapport à une solution de référence dans le cas de la sphère . . . . . 25
- 5.6 Erreur relative par rapport à une solution de référence dans le cas de géométries moins régulières . . . . . 25
- 5.7 Erreur relative en fonction du pas de discrétisation . . . . . 26
- 5.8 Répartition du courant électrique en surface de l'avion . . . . . 27

# Introduction

Ce stage a été effectué au **CERFACS**, (Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique), dans le service **EMC** (ElectroMagnetism Computation), sous la direction de Florence Millot.

Ce projet de recherche se positionne dans le cadre des problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques en régime harmonique. Ils sont par exemple rencontrés dans les applications de furtivité radar ou de rayonnement d'antenne.

Actuellement, le CERFACS possède un code multipôle capable de résoudre le problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par un objet parfaitement conducteur.

Dans cette étude, nous proposons de résoudre le problème de diffraction d'un champ électromagnétique en régime harmonique par un obstacle métallique tridimensionnel recouvert d'une fine couche de diélectrique pour pouvoir étendre le domaine d'application de ce code. Pour modéliser la couche mince, nous avons choisi la condition d'impédance de Leontovitch qui relie les traces du champ électrique et du champ magnétique sur la surface de l'obstacle.

Plusieurs méthodes permettent de résoudre ce problème et nous avons choisi la méthode des équations intégrales. Elle consiste à exprimer le champ électromagnétique en fonction des courants électrique et magnétique.

Dans un premier chapitre, nous modéliserons le problème physique considéré en rappelant les hypothèses nécessaires à sa résolution.

Nous résoudrons dans un second chapitre le problème de diffraction et nous choisirons une formulation adaptée.

Le cadre discret sera décrit au chapitre III. Une démonstration d'existence et d'unicité sera étudiée et nous proposerons une manière astucieuse d'implémenter la nouvelle formulation dans le code multipôle.

Dans le chapitre suivant, nous mettrons en place deux méthodes nous permettant de tester la précision de la formulation variationnelle que nous avons choisi pour résoudre le problème physique qui nous intéresse. La première sera basée sur l'idée que les différentes formulations convergent lorsque le pas du maillage diminue à longueur d'onde constante et la seconde nous permettra de calculer une solution analytique susceptible de nous donner l'erreur relative par rapport aux solutions des formulations choisies.

Les résultats numériques seront présentés dans le dernier chapitre. Une validation de ce code sera réalisée par comparaison avec différentes solutions. Une mise en évidence de la consistance de notre formulation et une étude comparative entre les deux formulations présentes au CERFACS seront développées. Notre étude se clôturera par le cas semi-industriel de l'avion.

# Chapitre 1

## Modélisation mathématique du problème physique

### 1.1 Description physique

On considère le cas particulier d'un obstacle constitué de métal recouvert d'une fine couche de diélectrique d'épaisseur  $\delta$ . A l'intérieur du métal, les champs sont considérés comme nuls. Le diélectrique est caractérisé par une permittivité  $\epsilon_r$  et une perméabilité  $\mu_r$ .

Cet objet est placé dans un milieu diélectrique (milieu de propagation) que l'on suppose parfait (i.e. de conductivité  $\sigma = 0$ , homogène, isotrope). Ce milieu peut éventuellement être le vide et il est caractérisé par une permittivité  $\epsilon$  et une perméabilité  $\mu$ .

On éclaire ce système par une onde incidente (cf annexe(A)). Lorsque cette onde rencontre l'obstacle, elle génère une onde diffractée par ce dernier.

Dans le cas de problème de furtivité radar, l'objectif est donc de connaître la nature de l'onde diffractée par ce type de structure.

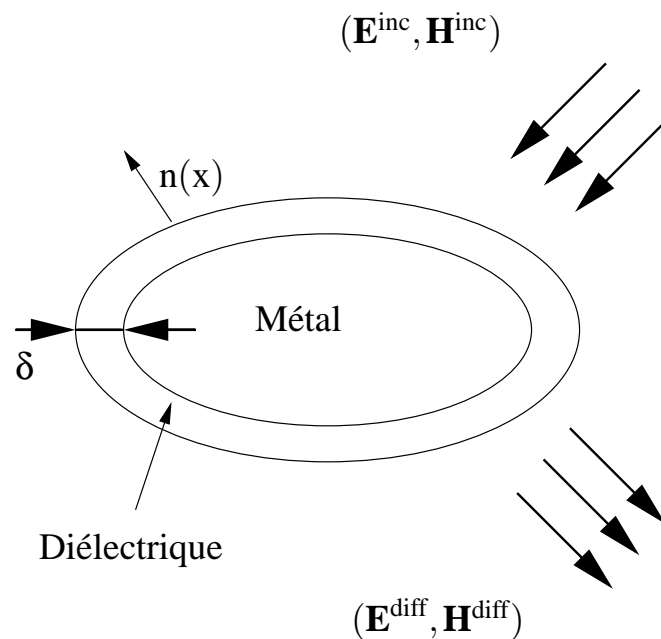


FIG. 1.1 – Schématisation du problème initial

## 1.2 Les équations de Maxwell

Une onde électromagnétique est décrite par un champ électrique  $\mathbf{E}$  et un champ magnétique  $\mathbf{H}$  en tout point de l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

Le milieu dans lequel se propage l'onde est décrit par deux constantes positives  $\varepsilon$  (permittivité électrique) et  $\mu$  (perméabilité magnétique).

Les équations régissant la propagation de telles ondes en l'absence de charges et de courants électrique ou magnétique sont les équations de Maxwell.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathbf{H} = 0 \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0 \end{array} \right. \text{ dans } \mathbb{R}^3 \quad (1.2.1)$$

## 1.3 Hypothèses initiales

### 1.3.1 Les équations de Maxwell en régime harmonique

On s'intéresse aux solutions harmoniques du système (1.2.1). Elles sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}(t, x) = \operatorname{Re}(\mathbf{E}(x)e^{-i\omega t}) \\ \mathbf{H}(t, x) = \operatorname{Re}(\mathbf{H}(x)e^{-i\omega t}) \end{array} \right.$$

où  $\omega$  désigne la pulsation.

Remarque :  $\operatorname{Re}$  désigne la partie réelle d'un complexe.

Les solutions harmoniques vérifient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{rot} \mathbf{H} = 0 \\ -i\omega\mu\mathbf{H} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0 \end{array} \right. \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

Afin de simplifier ce système, on introduit les grandeurs ci-dessous :

–  $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$  (nombre d'onde le milieu de propagation)

–  $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$  (impédance du diélectrique)

Avec ces notations, les équations de Maxwell en régime harmonique s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} ikZ^{-1}\mathbf{E} + \mathbf{rot} \mathbf{H} = 0 \\ -ikZ\mathbf{H} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0 \end{array} \right. \text{ dans } \mathbb{R}^3 \quad (1.3.2)$$

### 1.3.2 Impédance équivalente

On considère ici le cas particulier d'un obstacle métallique recouvert d'une fine couche de diélectrique. Du fait de la fine épaisseur  $\delta$  de cette couche, des instabilités numériques apparaissent. Pour plus de détails, on renverra le lecteur à la thèse de Nathalie Bartoli ([1]). De plus, le traitement de cette couche imposerait un maillage tridimensionnel en tétraèdre qui démultiplierait le nombre d'inconnues.

Pour ces deux raisons, on substitue cette fine couche de diélectrique par une condition d'impédance sur  $\Gamma$ .

On peut montrer que le problème initial modélisé par le schéma (1.1) est équivalent à un problème avec une condition imposée uniquement sur la frontière de l'obstacle (cf. schéma (1.2)). Les détails de cette démonstration sont présentés en annexe (B).

Les conditions à la limite dites d'impédance sont liées à la nature du modèle physique considéré. La condition de Leontovitch peut modéliser la diffraction d'une onde par un obstacle parfaitement conducteur recouvert d'une mince couche diélectrique. Elle lie le champ électrique au champ magnétique par la relation suivante :

$$\mathbf{E}_t - ikZ_0 \eta \mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{H} = 0 \quad (1.3.3)$$

L'indice t représente la composante tangentielle des différents champs sur la surface  $\Gamma$  :

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \wedge (\mathbf{E} \wedge \mathbf{n})$$

$\eta$  est la donnée caractérisant l'impédance en tout point de la surface  $\Gamma$ . C'est un opérateur sur les champs vecteurs de  $\Gamma$ .  $\eta$  peut être une fonction constante, constante par morceau si l'obstacle est constitué de matériaux différents ou encore variable. Dans notre cas, nous considérons  $\eta$  comme une constante.

En outre, si l'obstacle est un milieu absorbant de l'énergie par effet joule, il faut vérifier la condition sur  $\eta$  :

$$\text{Im}(\eta) < 0 \quad (1.3.4)$$

La relation (1.3.3) est le cas particulier de la condition plus générale d'Engquist-Nédélec ([10]). Actuellement, elle est très utilisée pour les applications industrielles.

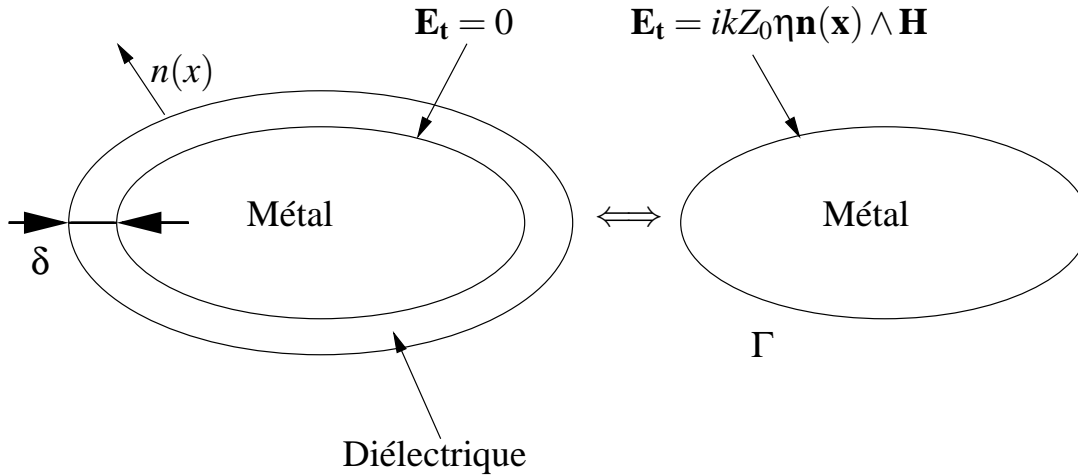


FIG. 1.2 – Impédance équivalente

### 1.3.3 La condition de radiation de Sommerfeld

Afin d'assurer que le problème soit bien posé, il est nécessaire d'introduire une condition supplémentaire concernant le comportement de  $(\mathbf{E}^{\text{diff}}, \mathbf{H}^{\text{diff}})$  à l'infini.

Cette condition traduit le fait que l'énergie totale de l'onde diffractée est finie et que son flux à travers toute surface fermée entourant strictement l'obstacle est sortant.

Elle s'exprime de la manière suivante :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r(\partial_r \mathbf{E}^{\text{diff}} - ik\mathbf{E}^{\text{diff}}) = 0 \quad (1.3.5)$$

## 1.4 Conclusion

Le système à résoudre est donc le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{E} - ikZ_0 \mathbf{H} = 0 \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + ikZ_0^{-1} \mathbf{E} = 0 \text{ dans } \Omega_{\text{ext}} \\ \mathbf{E}_t - ikZ_0 \eta \mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{H} = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r(\partial_r \mathbf{E}^{\text{diff}} - ik \mathbf{E}^{\text{diff}}) = 0 \\ \text{Im}(\eta) < 0 \end{array} \right. \quad (1.4.6)$$

Dans ce système, le champ électrique  $\mathbf{E}$  représente le champ total, c'est à dire, à la fois le champ incident qui éclaire l'obstacle et le champ diffracté par la structure. Il peut être néanmoins intéressant de travailler uniquement en champ diffracté. Pour obtenir ces équations en champ diffracté, il suffit de remarquer que le champ incident vérifie les équations de Maxwell et de faire la différence entre le système issu du champ total et celui du champ incident.

## Chapitre 2

# Résolution du problème de diffraction

### 2.1 Résolution par équations intégrales

Il existe deux grandes familles de méthodes pour résoudre les équations de Maxwell en régime harmonique :

- Les **méthodes volumiques** (cf [5]). Elles localisent leur calcul dans tout le volume intérieur et extérieur des objets. Elles permettent une bonne prise en compte des caractéristiques matérielles du milieu en particulier les effets d'anisotropie, mais nécessitent un grand nombre d'inconnues et une gestion explicite des conditions aux limites.
- Les **méthodes surfaciques**. Elles placent leurs inconnues sur le bord des objets considérés et prennent en compte de manière implicite les conditions aux limites. Cependant, elles ne s'appliquent qu'aux corps homogènes.

Les différentes hypothèses décrites précédemment permettent l'utilisation de la "méthode de résolution par équations intégrales". Nous ne présenterons pas ici cette méthode. Pour plus de détails, nous renvoyons par exemple le lecteur au cours de J. C. Nédélec ([7]).

Disons simplement, qu'il est nécessaire d'introduire les courants électrique et magnétique selon :

$$\begin{cases} \mathbf{J} &= \mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{H} \\ \mathbf{M} &= -\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{E} \end{cases}$$

Le système (1.4.6) est équivalent à :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) + iZ_0 \mathbb{T} \mathbf{J}(x) + \mathbb{K} \mathbf{M}(x) \\ \mathbf{H}(x) &= \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) - \mathbb{K} \mathbf{J}(x) + iZ_0^{-1} \mathbb{T} \mathbf{M}(x) \end{cases} \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}$$

avec  $\mathbb{T}$  et  $\mathbb{K}$  définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{T} \mathbf{J}(x) &= k \int_{\Gamma} (G(x,y) \mathbf{J}(y) + \frac{1}{k^2} \nabla_x G(x,y) \nabla_{\Gamma} \mathbf{J}(y)) d\Gamma(y) \\ \mathbb{K} \mathbf{M}(x) &= \int_{\Gamma} \nabla_y G(x,y) \wedge \mathbf{M}(y) \end{cases}$$

où pour  $x \neq y$  dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$G(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

$G(x,y)$  est la fonction de Green.

Notons aussi que le champ  $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}})$  correspond au champ incident ou champ source décrit en annexe (A).

La trace des champs sur la surface de l'obstacle est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t(x) &= \mathbf{E}_t^{\text{inc}}(x) + iZ_0(\mathbb{T}\mathbf{J}(x))_t + (\mathbb{K}\mathbf{M}(x))_t + \frac{1}{2}\mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{M}(x) \\ \mathbf{H}_t(x) &= \mathbf{H}_t^{\text{inc}}(x) - (\mathbb{K}\mathbf{J}(x))_t + iZ_0^{-1}(\mathbb{T}\mathbf{M}(x))_t - \frac{1}{2}\mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{J}(x) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Dorénavant, et dans un souci de clarté, nous n'écrivons la variable  $x$  que lorsque sa présence améliore la compréhension.

## 2.2 Quelques formulations possibles

A partir du système (2.1.1), plusieurs formulations peuvent être obtenues. Leurs obtentions se trouvent en annexe (C). Elles utilisent une combinaison des équations suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathbf{E}_t &= \mathbf{E}_t^{\text{inc}} + iZ_0(\mathbb{T}\mathbf{J})_t + (\mathbb{K}\mathbf{M})_t + \frac{1}{2}\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} \\ (2) \quad \mathbf{H}_t &= \mathbf{H}_t^{\text{inc}} - (\mathbb{K}\mathbf{J})_t + iZ_0^{-1}(\mathbb{T}\mathbf{M})_t - \frac{1}{2}\mathbf{n} \wedge \mathbf{J} \\ (3) \quad \mathbf{E}_t &= -ikZ_0\eta\mathbf{n} \wedge \mathbf{H} \quad \text{ou} \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{M} = ikZ_0\eta\mathbf{J} \end{aligned}$$

### 2.2.1 Une formulation "normale"

La première formulation à laquelle on pourrait penser est la suivante. On exprime (3) à l'aide de (1) et (2), puis on réintroduit (3) dans l'équation obtenue afin d'éliminer  $\mathbf{M}$  :

$$\begin{aligned} &(\mathbb{T}\mathbf{J})_t - \eta(\mathbb{K}\mathbf{n} \wedge \mathbf{J})_t + \eta\mathbf{n} \wedge (\mathbb{K}\mathbf{J})_t - k^2\eta^2\mathbf{n} \wedge (\mathbb{T}\mathbf{n} \wedge \mathbf{J})_t \\ &= -\frac{1}{ikZ_0}(\mathbf{E}_t^{\text{inc}} - ikZ_0\eta\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_t^{\text{inc}}) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Le système induit par cette formulation ne peut être utilisé. En effet, le terme  $\mathbb{T}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{J})$  n'est pas défini puisque  $\mathbf{J}$  appartient à  $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$  et par conséquent  $(\mathbf{n} \wedge \mathbf{J})$  appartient à  $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma)$ . Cependant  $\mathbb{T}$  est un opérateur défini de  $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma)$  et donc cette opération ne peut être défini.

Remarque : rappelons que :

$$\begin{aligned} H^{-1/2}(\text{div}, \Gamma) &= \{\mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma), \text{div}_{\Gamma}\mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma)\} \\ H^{-1/2}(\text{rot}, \Gamma) &= \{\mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma), \text{rot}_{\Gamma}\mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma)\} \end{aligned}$$

### 2.2.2 Formulations E.F.I.E., M.F.I.E., C.F.I.E.

Pour la E.F.I.E., on considère (1) puis on introduit la condition à la limite (3) pour éliminer  $\mathbf{M}$ . On obtient donc :

$$\mathbf{E}_t^{\text{inc}} = -iZ_0(\mathbb{T}\mathbf{J})_t + ikZ_0\eta(\mathbb{K}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}))_t + \frac{1}{2}ikZ_0\eta\mathbf{J} \quad (2.2.3)$$

Pour la M.F.I.E., on considère (2), on élimine  $\mathbf{J}$  grâce à (3) et on conserve  $\mathbf{M}$ . On obtient donc :

$$\mathbf{H}_t^{\text{inc}}(x) = -\frac{1}{ikZ_0\eta}(\mathbb{K}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}))_t - iZ_0^{-1}(\mathbb{T}\mathbf{M})_t - \frac{1}{2ikZ_0\eta}\mathbf{M} \quad (2.2.4)$$

En ce qui concerne la E.F.I.E. et la M.F.I.E., des solutions non physiques (résonances) apparaissent à certaines fréquences.

Pour palier à ce problème, on crée la C.F.I.E. selon :

$$C.F.I.E. = \alpha E.F.I.E. + (1 - \alpha) M.F.I.E. \quad (2.2.5)$$

Néanmoins cette formulation fait intervenir un paramètre arbitraire. Pour ces raisons, nous ne retiendrons aucune de ces formulations.

### 2.2.3 La formulation de Bachelot, Gay et Lange (BGL)

En considérant les équations (1) et (2), on utilise le principe des réactions de Rumsey, qui consiste à former la quantité  $\int_{\Gamma} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}')$  où  $(\mathbf{J}', \mathbf{M}')$  sont les courants tests tangents à  $\Gamma$ . Ensuite, on fait intervenir la condition d'impédance (3) pour obtenir :

$$\boxed{V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) = A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ ikZ_0 \eta \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' - \frac{1}{ikZ_0} \eta^{-1} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') \right\} d\Gamma} \quad (2.2.6)$$

où  $\frac{1}{ik} \eta^{-1}$  est l'opérateur d'admittance relative, inverse de l'impédance relative  $ik\eta$ , avec :

$$\begin{cases} A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) &= \int_{\Gamma} iZ_0 \mathbf{T} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' - iZ_0^{-1} \mathbf{T} \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}' + \mathbb{K} \mathbf{J} \cdot \mathbf{M}' + \mathbb{K} \mathbf{M} \cdot \mathbf{J}' d\Gamma \\ V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) &= - \int_{\Gamma} \mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{H}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{M}' d\Gamma \end{cases}$$

Remarquons cependant que ces équations se simplifient dans le cas où  $\eta$  est une constante non nulle :

$$\boxed{V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) = A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ ikZ_0 \eta \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' - \frac{1}{ikZ_0 \eta} \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}' \right\} d\Gamma} \quad (2.2.7)$$

Rappelons que l'obtention de cette formulation a été développée en annexe (C).

### 2.2.4 La formulation de Bendali

Une autre formulation a été proposée par A. Bendali et al (cf [2]). Son obtention s'appuie aussi sur le principe des réactions de Rumsey (cf annexe C).

$$\boxed{\begin{cases} A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{L} \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}' - ikZ_0 \eta \mathbf{J}') d\Gamma = V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) \\ \text{sous la contrainte} \quad \int_{\Gamma} \mathbf{L}' \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} - ikZ_0 \eta \mathbf{J}) = 0 \end{cases}} \quad (2.2.8)$$

avec  $A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\})$  et  $V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\})$  défini précédemment et

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}$$

## 2.3 Conclusion

A cause des inconvénients constatés sur les quatre premières formulations, il peut s'avérer intéressant de conserver les deux inconnues  $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$ . Pour cette raison, nous avons choisi d'implémenter la formulation **BGL**. Néanmoins, le dédoublement des degrés de liberté (d.d.l.) est un inconvénient majeur. Pour cela, nous donnerons dans le chapitre suivant une méthode pour résoudre ce problème par la méthode multipôle. Quant à la formulation de **Bendali**, elle est implémentée au CERFACS. Elle nous servira de référence pour la validation de nos résultats. De plus, une étude comparative entre ces deux formulations pourra être faite. Passons à la discrétisation du problème.

## Chapitre 3

# Le problème discret : résolution numérique

### 3.1 Démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution dans le cas discret

Pour simplifier l'étude, reprenons la formulation **BGL** dans le cas où  $\eta$  est une fonction constante :

$$\boxed{V(\{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) = A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ ikZ_0\eta \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^t - \frac{1}{ikZ_0\eta} \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^t \right\} d\Gamma} \quad (3.1.1)$$

On se place dans l'espace de discrétisation des éléments de Raviart-Thomas noté  $RT_h$  et décrit dans le paragraphe suivant.

Remarque : sachant que  $\overline{RT_h} \subset RT_h$  (l'espace d'approximation est stable par conjugaison) on peut en particulier prendre  $\mathbf{J}_h^t = \overline{\mathbf{J}_h}$  et  $\mathbf{M}_h^t = \overline{\mathbf{M}_h}$ .

On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \mathbb{T} & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} & \mathbb{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_h \\ M_h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{J_h} \\ \overline{M_h} \end{bmatrix} - \int_{\Gamma} \frac{k\eta}{2} |\mathbf{J}_h|^2 + \int_{\Gamma} \frac{1}{2k\eta} |\mathbf{M}_h|^2 \\ &= - \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{E}^{\text{inc}}}{iZ_0} \cdot \mathbf{J}_h^t - \mathbf{H}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{M}_h^t d\Gamma \end{aligned}$$

Nous décomposons le noyau de Green en sa partie réelle et en sa partie imaginaire selon :

$$G(x, y) = G_r(x, y) + i G_i(x, y)$$

d'où :

$$\begin{cases} \mathbb{T} &= \mathbb{T}_r + i \mathbb{T}_i \\ \mathbb{K} &= \mathbb{K}_r + i \mathbb{K}_i \end{cases}$$

Ensuite, nous considérons la partie imaginaire de la formulation variationnelle. D'après la symétrie du noyau, on déduit :

$$\text{Im} \left( \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \mathbb{T}_r & \mathbb{K}_r \\ \mathbb{K}_r & \mathbb{T}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_h \\ M_h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{J_h} \\ \overline{M_h} \end{bmatrix} \right) = 0$$

et en utilisant le résultat de l'article intitulé "Integral equations via saddle point problems for time-harmonic Maxwell's equations" écrit par F. Collino et B. Després ([3]).

$$\operatorname{Im}\left(\int_{\Gamma}\begin{bmatrix}\mathbb{T}_i & \mathbb{K}_i \\ \mathbb{K}_i & \mathbb{T}_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_h \\ M_h\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\bar{J}_h \\ \bar{M}_h\end{bmatrix}\right)=\int_{S^2}|A^\infty\begin{bmatrix}J_h \\ M_h\end{bmatrix}|^2(s)d\tau(s)$$

où  $S^2$  est la sphère unité et :

$$\begin{cases} A^\infty\begin{bmatrix}J_h \\ M_h\end{bmatrix}(s) &= a^\infty\mathbf{J}_h(s)-is\wedge a^\infty\mathbf{M}_h(s) \\ a^\infty\mathbf{J}_h(s) &= \frac{ik}{4\pi}\int_{S^2}\mathbf{s}\wedge(\mathbf{J}_h\wedge\mathbf{s})e^{-ikx\cdot\mathbf{s}}d\tau(s) \end{cases}$$

On déduit que :

$$\begin{aligned} &\int_{S^2}|A^\infty\begin{bmatrix}J_h \\ M_h\end{bmatrix}|^2d\tau(s)-\frac{k}{2}\int_{\Gamma}\operatorname{Im}(\eta)|\mathbf{J}_h|^2+\frac{1}{2k}\int_{\Gamma}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\eta}\right)|\mathbf{M}_h|^2 \\ &= \operatorname{Re}\left(\int_{\Gamma}\mathbf{H}^{\text{inc}}\cdot\bar{\mathbf{M}}_h-\int_{\Gamma}\frac{\mathbf{E}^{\text{inc}}}{iZ_0}\cdot\bar{\mathbf{J}}_h\right) \end{aligned}$$

Déterminons dans quel cas ce problème est injectif. Considérons alors une source nulle. Nous avons alors :

$$\int_{S^2}|A^\infty\begin{bmatrix}J_h \\ M_h\end{bmatrix}|^2d\tau(s)-\frac{k}{2}\int_{\Gamma}\operatorname{Im}(\eta)|\mathbf{J}_h|^2+\frac{1}{2k}\int_{\Gamma}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\eta}\right)|\mathbf{M}_h|^2=0$$

En particulier, dans le cas où  $\operatorname{Im}(\eta) < 0$ , les trois quantités sont positives et donc forcément le couple  $(\mathbf{J}_h, \mathbf{M}_h)$  est nul ce qui assure l'injectivité.

Sachant que nous sommes en dimension finie (espace d'approximation des éléments de Raviart-Thomas), nous avons donc la bijectivité.

Nous avons donc démontré l'existence et l'unicité de notre solution dans le cas discret sous la condition  $\operatorname{Im}(\eta) < 0$ .

## 3.2 Discrétisation

### 3.2.1 Les éléments de Raviart-Thomas

On utilise la discrétisation standard pour ce type de problème, à savoir celle de Raviart-Thomas (cf [8]).

On remplace tout d'abord la surface réelle par une surface polyédrique composée de triangles. A chaque arête  $A_i$  sont associés un degré de liberté  $\lambda_i$  et une fonction de base  $\varphi_i$ . On note  $n_{\text{ddl}}$  le nombre de degrés de liberté. Le support de  $\varphi_i$  se restreint aux deux triangles  $T$  et  $T'$  partageant l'arête  $A_i$ .

Chaque arête est (arbitrairement) orientée par un «sens» de passage, noté par exemple  $T \rightarrow T'$ , qui détermine la normale unitaire à l'arête  $\mathbf{n}_i$ . Le degré de liberté  $J_i$  est égal au flux de la fonction de courant électrique à travers l'arête  $A_i$  ainsi orientée :

$$\begin{aligned} J_i &= \int_{A_i}\mathbf{J}(x)\cdot\mathbf{n}_i(x)dx \\ M_i &= \int_{A_i}\mathbf{M}(x)\cdot\mathbf{n}_i(x)dx \end{aligned}$$

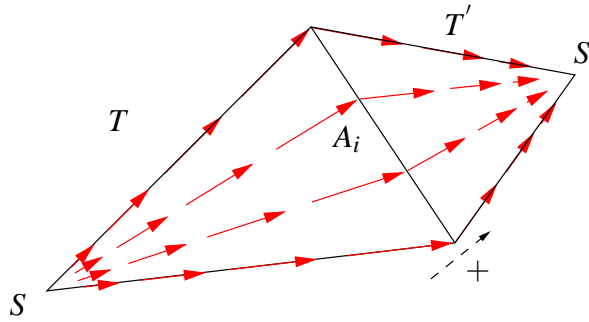


FIG. 3.1 – Fonctions de Raviart-Thomas

Sur le triangle  $T$ , d'aire  $|T|$ , on note  $S$  le sommet opposé à  $A_i$  et  $M$  le point courant du triangle. On a :

$$\varphi_i(M) = \frac{\mathbf{SM}}{2|T|}$$

La fonction  $\varphi_i$  est donc vectorielle, dans le plan du triangle, affine, de flux nul à travers les deux arêtes issues de chaque sommet  $S$  et  $S'$  ( $\varphi_i$  y est tangente) et de flux 1 à travers l'arête  $A_i$  (grâce à la normalisation par  $2|T|$ ). La figure (3.1) illustre ces propriétés.

Symétriquement sur  $T'$ , on note  $S'$  le sommet opposé à  $A_i$ . On a :

$$\varphi_i(M) = -\frac{\mathbf{S'M}}{2|T'|}$$

Comme la traversée de l'arête reste orientée par  $\mathbf{n}_i$ , le flux de  $\varphi_i$  à travers l'arête  $A_i$  vaut toujours +1. Les courants électrique  $\mathbf{J}$  et magnétique  $\mathbf{M}$  seront recherchés dans l'espace d'éléments finis induit par ces fonctions sous la forme approchée :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_h &= \sum_{i=1}^{n_{ddl}} \mathbf{J}_i \varphi_i \\ \mathbf{M}_h &= \sum_{i=1}^{n_{ddl}} \mathbf{M}_i \varphi_i \end{cases} \quad (3.2.2)$$

On remarque donc que dans le cadre de la formulation **BGL**, chaque arête possède à la fois un d.d.l. électrique et un d.d.l. magnétique.

### 3.2.2 Obtention matricielle

#### Principe

Afin d'obtenir la matrice dans sa globalité, nous calculons les matrices élémentaires. Ces matrices représentent l'interaction des d.d.l. des triangles entre eux. Numériquement, on itère sur les triangles et on considère l'interaction des d.d.l. du premier triangle sur ceux du second.

Après avoir calculé toutes les matrices élémentaires, il ne reste plus qu'à assembler la matrice globale. Cet assemblage se déroule de la manière suivante :

$$\Lambda_{ij}^{KL} \longrightarrow \Lambda_{n(i,K),n(j,L)}$$

avec  $n(j,L)$  le numéro global du  $j^{\text{ème}}$  d.d.l. local du triangle  $L$ . Ce coefficient nous est donné par la table de connectivité.

Remarque : L'obtention du coefficient  $(i,j)$  de la matrice correspond aux interactions entre le d.d.l.  $i$  et le d.d.l.  $j$ . Ce terme est donc la somme de quatre termes émanant des matrices élémentaires puisque

chaque d.d.l. est rattaché à deux triangles différents.

On reprend le système (3.1.1) afin de déterminer le couple  $(\mathbf{J}_h, \mathbf{M}_h)$  tel que, pour tout couple de fonctions tests  $(\mathbf{J}'_h, \mathbf{M}'_h)$  la formulation variationnelle soit vérifiée. On peut donc mettre le système matriciel sous la forme suivante :

$$(\mathbf{J}'_h, \mathbf{M}'_h) \cdot [\Lambda] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{J}_h \\ \mathbf{M}_h \end{pmatrix} = (\mathbf{J}'_h, \mathbf{M}'_h) \cdot [\beta] \quad (3.2.3)$$

avec :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbb{T} - \frac{k\eta}{2}\mathbb{M} & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} & \mathbb{T} + \frac{1}{2k\eta}\mathbb{M} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} -\mathbf{E}^{\text{inc}} \\ \mathbf{H}^{\text{inc}} \end{pmatrix}$$

où  $\mathbb{T}$  et  $\mathbb{K}$  sont les matrices associées aux opérateurs définis précédemment et  $\mathbb{M}$  la matrice masse correspondant à  $\int_{\Gamma} \varphi_i \varphi_j$ .

Les coefficients de la matrice  $\Lambda$  font apparaître des calculs d'intégrales singulières développés en annexe (D).

### 3.3 Implémentation dans le code multipôle

La résolution du système (3.2.3) peut se faire de manière directe par exemple par une inversion LU. Cependant il s'avère que lorsque la fréquence augmente ou lorsque la taille de l'obstacle devient importante, l'inversion du système par méthode directe devient vite coûteuse. De plus, le stockage de la matrice est trop importante. On est donc obligé d'utiliser des méthodes itératives couplées à un produit matrice-vecteur rapide par exemple un produit multipôle. Nous allons maintenant présenter une manière astucieuse de faire ce calcul multipôle.

Considérons le système matriciel précédent (3.2.3). En conservant la notation précédente, notons :

$$\mathbf{Z} = (\Lambda) - (\Lambda_{\text{masse}}) = \begin{bmatrix} \mathbb{T} & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} & \mathbb{T} \end{bmatrix}$$

avec :

$$(\Lambda_{\text{masse}}) = \begin{bmatrix} -\frac{k\eta}{2}\mathbb{M} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2k\eta}\mathbb{M} \end{bmatrix}$$

La matrice diagonale par bloc  $\Lambda_{\text{masse}}$  sera traitée en interaction proche. Considérons dorénavant la matrice  $\mathbf{Z}$  :

$$(\mathbf{J}' \quad \mathbf{M}' ) \cdot (\mathbf{Z}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = z \left( \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{J}' \\ \mathbf{M}' \end{pmatrix} \right)$$

Tout d'abord, remarquons que si l'on utilisait directement la méthode multipôle, un produit matrice-vecteur nécessiterait d'appliquer 7 fois l'algorithme multipôle (4 pour  $\mathbb{T}\mathbf{J}$  et 3 pour  $\mathbb{K}\mathbf{M}$ ).

Regardons maintenant une méthode permettant de faire ce calcul à moindre coût.

$$\begin{aligned} z \left( \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{J}' \\ \mathbf{M}' \end{pmatrix} \right) &= \langle \mathbb{T}\mathbf{J}, \mathbf{J}' \rangle + \langle \mathbb{T}\mathbf{M}, \mathbf{M}' \rangle + \langle \mathbb{K}\mathbf{J}, \mathbf{M}' \rangle + \langle \mathbb{K}\mathbf{M}, \mathbf{J}' \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle (\mathbb{T} + \mathbb{K})(\mathbf{J} + \mathbf{M}), (\mathbf{J}' + \mathbf{M}') \rangle + \frac{1}{2} \langle (\mathbb{T} - \mathbb{K})(\mathbf{J} - \mathbf{M}), (\mathbf{J}' - \mathbf{M}') \rangle \end{aligned}$$

Cette opération a pour but de diagonaliser par blocs la matrice  $\mathbf{Z}$  et de substituer les inconnues  $(\mathbf{J}-\mathbf{M})$  et  $(\mathbf{J}+\mathbf{M})$  par  $\mathbf{J}$ . On est alors amené à regarder le cas où  $\varepsilon = 1$  ou  $-1$  pour :

$$z_{\varepsilon}(\mathbf{J}, \mathbf{J}') = \frac{1}{2} \langle (\mathbb{T} + \varepsilon\mathbb{K})\mathbf{J}, \mathbf{J}' \rangle$$

Soit plus explicitement :

$$z_{\varepsilon}(\mathbf{J}, \mathbf{J}') = \left\langle \frac{k}{2} \int_{\Gamma} (G(x, y) \mathbf{J}(y) + \frac{1}{k^2} \nabla_x G(x, y) \nabla_{\Gamma} \mathbf{J}(y)) d\Gamma(y) + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma} \nabla_y G(x, y) \wedge \mathbf{J}(y), \mathbf{J}' \right\rangle$$

Si

$$\begin{aligned} \mathbf{xy} &= \mathbf{M}_1 \mathbf{x} + \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \mathbf{y} \\ &= \delta \mathbf{x} + \mathbf{u} + \delta \mathbf{y} \end{aligned}$$

On utilise la formule multipolaire suivante dans le cas où  $|\delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{y}| \ll 1$  :

$$\begin{cases} G(|x - y|) = \frac{ik}{16\pi^2} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} e^{iks \cdot \delta \mathbf{x}} T_{\mathbf{u}}^L(\mathbf{s}) e^{iks \cdot \delta \mathbf{y}} d\mathbf{s} \\ T_{\mathbf{u}}^L(\mathbf{s}) = \sum_{0 \leq l \leq L} (2l + 1) i^l h_l^1(k \cdot |\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2|) P_l(\cos(\mathbf{s}, \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2)) \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Tâchons d'interpréter la formule (3.3.4). Elle comporte trois termes :

- le terme  $e^{iks \cdot \mathbf{x} \mathbf{M}_1}$  transporte l'information du point source  $x$  au point  $M_1$ .
- le terme  $T_{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2}^L(\mathbf{s})$  assure le transfert de l'information entre  $M_1$  et  $M_2$ .
- le terme  $e^{iks \cdot \mathbf{M}_2 \mathbf{y}}$  transporte l'information jusqu'au point  $y$ .

Afin de mieux comprendre l'intérêt de la décomposition du noyau de Green, nous allons l'illustrer sur la figure (3.2).

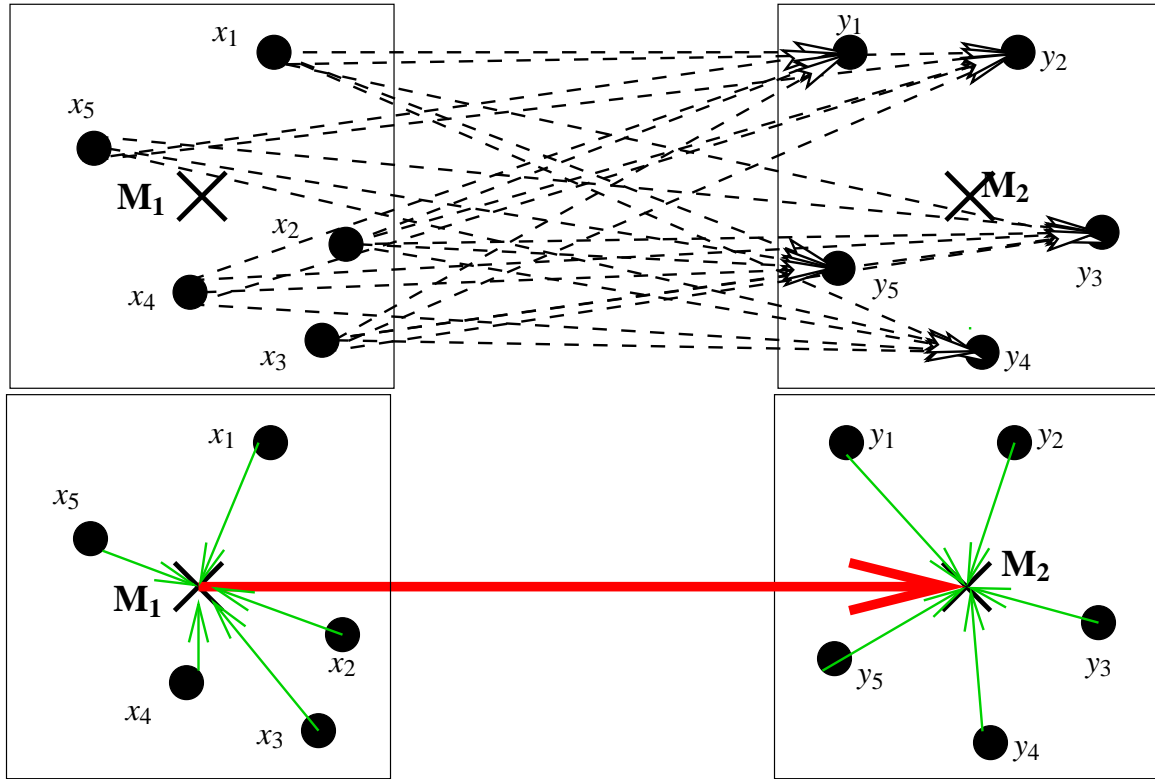


FIG. 3.2 – Comparaison des méthodes de traitement des interactions

Sur cet exemple, en utilisant la méthode multipôle, seulement 11 calculs sont nécessaires alors que sans cette méthode, nous aurions dû en faire 25.

Nous pouvons alors dériver l'expression  $z_\varepsilon(\mathbf{J}, \mathbf{J}^t)$  et on obtient :

$$\begin{aligned} z_\varepsilon(\mathbf{J}, \mathbf{J}^t) &= \frac{ik^2}{16\pi^2} \int_{S^2} T^L(\mathbf{u}, s) \int_\Gamma \frac{1}{2} [(\mathbf{s} \wedge (\mathbf{J}(y) \wedge \mathbf{s} e^{-ik\delta y s} d\Gamma(y))] \int_\Gamma [\mathbf{J}^t e^{ik\delta x.s} d\Gamma(x)] d\sigma(s) \\ &+ \frac{ik^2}{16\pi^2} \int_{S^2} T^L(\mathbf{u}, s) \int_\Gamma \frac{-i\varepsilon}{2} [(\mathbf{s} \wedge (\mathbf{J}(y) e^{-ik\delta y s} d\Gamma(y))] \cdot \int_\Gamma [\mathbf{J}^t e^{ik\delta x.s} d\Gamma(x)] d\sigma(s) \end{aligned}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$z_\varepsilon(\mathbf{J}, \mathbf{J}^t) = \frac{ik^2}{16\pi^2} \int_{S^2} T^L(\mathbf{u}, s) w_\varepsilon(\mathbf{J}, \mathbf{J}^t, \mathbf{s}) d\Sigma(s)$$

Avec :

$$w_\varepsilon(\mathbf{J}, \mathbf{J}^t, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} (\mathbf{s} \wedge (a_\infty \mathbf{J} \wedge \mathbf{s}) - i\varepsilon \mathbf{s} \wedge a_\infty \mathbf{J}) \tilde{a}_\infty \mathbf{J}^t$$

$$\begin{cases} a_\infty \mathbf{J} &= \int_\Gamma \mathbf{J}(y) e^{-ik\delta \mathbf{x}.s} d\Gamma(y) \\ \tilde{a}_\infty \mathbf{J}^t &= \int_\Gamma \mathbf{J}^t(x) e^{-ik\delta \mathbf{x}.s} d\Gamma(x) \end{cases}$$

A priori, pour  $s$  fixé,  $w_\varepsilon(\mathbf{J}, \mathbf{J}^t, s)$  possède trois composantes. On va montrer qu'en fait, indépendamment de  $a_\infty$ , il n'a qu'une seule composante sur un vecteur fixe. Ensuite, en utilisant  $(\mathbf{s}, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$  les vecteurs sphériques habituels, on effectue un changement de repère :

$$\mathbf{u}^\tau = \frac{\mathbf{e}_\theta + i\tau \mathbf{e}_\phi}{\sqrt{2}}$$

avec  $\tau = 1$  ou  $-1$

$(\mathbf{s}, \mathbf{u}^-, \mathbf{u}^+)$  est une base orthonormale ( $|\mathbf{u}^-| = |\mathbf{u}^+| = 1, \mathbf{u}^- \cdot \mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{u}^- = 0$ ).

On pose :

$$A_\varepsilon a = \frac{1}{2} (\mathbf{s} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{s}) - i\varepsilon \mathbf{s} \wedge \mathbf{a})$$

de telle sorte que  $z_\varepsilon(\mathbf{J}, \mathbf{J}^t, \mathbf{s}) = A_\varepsilon a^\infty(\mathbf{J}) \cdot \tilde{a}^\infty(\mathbf{J}^t)$

On a bien sûr  $A_\varepsilon a \cdot \mathbf{s} = 0$  et

$$\begin{aligned} A_\varepsilon \mathbf{u}^\tau &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{e}_\theta + i\tau \mathbf{e}_\phi}{\sqrt{2}} \quad - \quad i\varepsilon \frac{\mathbf{s} \wedge \mathbf{e}_\theta + i\tau \mathbf{s} \wedge \mathbf{e}_\phi}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{e}_\theta + i\tau \mathbf{e}_\phi}{\sqrt{2}} \quad - \quad i\varepsilon \frac{\mathbf{e}_\phi - i\tau \mathbf{e}_\theta}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{e}_\theta + i\tau \mathbf{e}_\phi}{\sqrt{2}} \quad - \quad \varepsilon \tau \frac{\mathbf{e}_\theta + i\tau \mathbf{e}_\phi}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \varepsilon \tau) \left( \frac{\mathbf{e}_\theta + i\tau \mathbf{e}_\phi}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

On en déduit que  $A_+ \mathbf{u}^+ = A_- \mathbf{u}^- = 0$  et donc que  $A_\varepsilon a$  est colinéaire à  $\mathbf{u}^{-\varepsilon}$ .

De plus,  $A_+ \mathbf{u}^- = \mathbf{u}^-$  et  $A_- \mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^+$

Finalement :

$$w_\varepsilon(\mathbf{J}, \mathbf{J}^t, \mathbf{s}) = (a_\infty \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}^{-\varepsilon}) (\tilde{a}_\infty \mathbf{J}^t \cdot \overline{\mathbf{u}^{-\varepsilon}})$$

et :

$$\boxed{z_\varepsilon(\mathbf{J}, \mathbf{J}^t) = \frac{ik^2}{16\pi^2} \int_{S^2} T^L((a_\infty \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}^{-\varepsilon}) (\tilde{a}_\infty \mathbf{J}^t \cdot \overline{\mathbf{u}^{-\varepsilon}}) d\sigma(s)} \quad (3.3.5)$$

C'est un calcul à deux composantes ce qui permettra d'économiser du temps CPU. Néanmoins, pour plus de détails sur la méthode multipôle, nous renverrons le lecteur à l'annexe (F) et au rapport de F. Millot et de F. Collino ([4]).

### 3.4 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de mettre en place tous les outils nécessaires à une implémentation numérique. L'existence et l'unicité de la solution discrète ont été démontrées. Une méthode astucieuse de faire un produit matrice vecteur multipôle a été proposée. Avant d'implémenter cette méthode au sein du code multipôle, nous devons nous assurer de la précision de la formulation **BGL**. Pour cela, nous mettrons en place deux tests numériques : un reposant sur un raffinement du maillage et un autre sur un positionnement adéquat d'un dipôle.

# Chapitre 4

## Précision des formulations

Aucune raison théorique ne permet de privilégier la formulation de **Bendali** par rapport à la formulation **BGL**. Afin de pouvoir quantifier la précision des solutions obtenues avec ces deux formulations, nous avons réalisé deux tests numériques. La méthode de raffinement s'appuie sur le fait que les solutions doivent converger lorsque le pas du maillage décroît et celle du dipôle permet d'exhiber une solution analytique qui est notre référence.

### 4.1 La méthode de convergence par raffinement

Cette méthode consiste à considérer comme exact un courant calculé sur un maillage extrêmement raffiné et à remonter ensuite à un maillage plus grossier.

#### 4.1.1 Construction du maillage

Cette méthode exige la construction d'un maillage "à la main" pour pouvoir remonter à un maillage industriel. On démultiplie le nombre de d.d.l. par la méthode décrite sur la figure suivante :

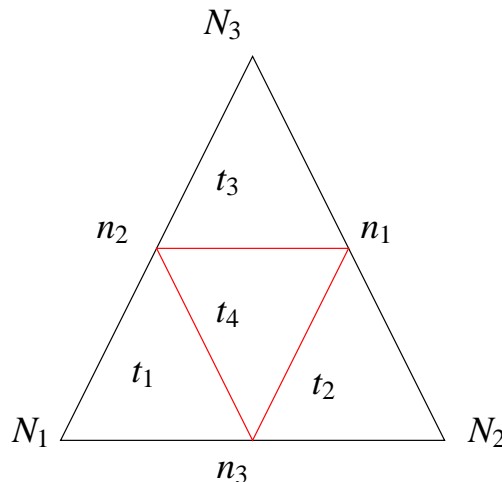


FIG. 4.1 – Modèle de raffinement de maillage

Pour plus de clarté, nous noterons :

- le nombre de triangles NTg
- le nombre de d.d.l. Nddl

De plus, on marquera par une étoile les grandeurs relatives au nouveau maillage. Nous avons donc

les relations suivantes si la surface est fermée :

$$\begin{cases} \text{NTg}^* &= 4 \times \text{NTg} \\ \text{Nddl}^* &= 2 \times \text{Nddl} + 3 \times \text{NTg} \end{cases}$$

Il est important de noter qu'une nouvelle connectique a dû être mise en place et que l'orientation de toutes les normales a dû être conservée.

#### 4.1.2 Mise en évidence de la meilleure solution

Nous devons maintenant remonter à une solution sur maillage plus grossier. Supposons que l'on connaisse une solution sur le maillage décrit sur la figure (D). Prenons l'exemple du courant  $\mathbf{J}$ .

Nous avons discrétisé ce courant dans l'espace des fonctions de Raviart-Thomas suivant :

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{n_{dl}} \mathbf{J}_i \phi_i$$

Vu que l'on calcule un flux, on fait la somme des courants calculés sur les arêtes correspondant d'une arête sur maillage industriel. Il ne reste plus qu'à calculer l'erreur relative entre les solutions provenant des deux formulations.

En raffinant le maillage, nous espérons que les solutions obtenues par les deux formulations soient assez proches pour que l'on puisse affirmer qu'en prenant la moyenne de ces deux solutions, on ait obtenu une solution exacte.

## 4.2 L'idée du dipôle

Le schéma suivant permet de rappeler brièvement les notations utilisées dans la suite.

$$\begin{cases} \Gamma &= \text{surface fermée} \\ \Omega_{\text{int}} &= \text{domaine interne } \Gamma \\ \Omega_{\text{ext}} &= \text{domaine externe } \Gamma \\ x_0 &= \text{point de } \Omega_{\text{int}} \end{cases}$$

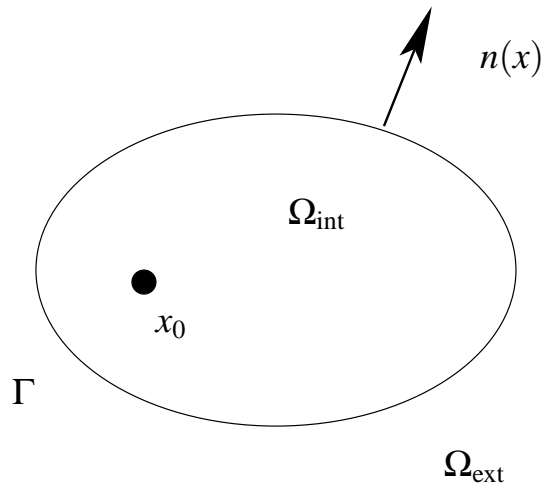


FIG. 4.2 – Schéma du problème test du dipôle

On utilise le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$  du dipole décrit dans l'annexe (A).

On se propose de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) &= (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) & \text{dans } \Omega_{\text{ext}} \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) &= (0, 0) & \text{dans } \Omega_{\text{int}} \end{cases}$$

Les courants sont donc définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_0 &= \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_0 & \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{M}_0 &= -\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_0 \end{cases}$$

Nous pouvons appliquer la méthode de résolution par la méthode des équations intégrales car le champ électromagnétique du dipôle  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$  vérifie les équations de Maxwell dans  $\mathbb{R}^3 - \{x_0\}$  et la condition de Sommerfeld à l'infini. Le champ nul vérifie quant à lui le système de Maxwell.

Remarque : Nous voyons donc l'intérêt de positionner le dipôle à l'intérieur de l'obstacle car la représentation intégrale du champ extérieur sera toujours vérifié.

Nous avons donc la représentation en potentiel suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0(x) &= iZ_0 \mathbb{T} \mathbf{J}(x) + \mathbb{K} \mathbf{M}(x) \\ \mathbf{H}_0(x) &= -\mathbb{K} \mathbf{J}(x) + iZ_0^{-1} \mathbb{T} \mathbf{M}(x) \end{cases} \text{ dans } \Omega_{\text{ext}}$$

et

$$\begin{cases} 0 &= iZ_0 \mathbb{T} \mathbf{J}(x) + \mathbb{K} \mathbf{M}(x) \\ 0 &= -\mathbb{K} \mathbf{J}(x) + iZ_0^{-1} \mathbb{T} \mathbf{M}(x) \end{cases} \text{ dans } \Omega_{\text{int}} - \{x_0\}$$

Les opérateurs  $\mathbb{T}$  et  $\mathbb{K}$  ont été définis précédemment tout comme  $G$  la fonction de Green.

La trace des champs sur la surface de l'obstacle est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{0t}(x) &= iZ_0 (\mathbb{T} \mathbf{J}(x))_t + (\mathbb{K} \mathbf{M}(x))_t + \frac{1}{2} \mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{M}(x) \\ \mathbf{H}_{0t}(x) &= -(\mathbb{K} \mathbf{J}(x))_t + iZ_0^{-1} (\mathbb{T} \mathbf{M}(x))_t - \frac{1}{2} \mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{J}(x) \end{cases}$$

Pour retrouver la formulation **BGL** et celle de **Bendali**, nous choisissons une impédance et nous posons  $\mathbf{F}_0$  de façon à relier les champs  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{H}_0$  par la relation suivante :

$$\boxed{\mathbf{E}_{0t} - ikZ_0 \eta \mathbf{H}_{0t} = \mathbf{F}_0} \quad (4.2.1)$$

L'obtention des deux formulations suivantes est détaillée en annexe (C).

#### 4.2.1 La formulation BGL

D'après l'équation 4.2.1, nous avons :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \wedge \mathbf{M} &= \mathbf{F}_0 + ikZ_0 \eta \mathbf{J} \\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{J} &= -\frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{F}_0}{ikZ_0 \eta} - \frac{\mathbf{M}}{ikZ_0 \eta} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{F}_0 &= iZ_0 (\mathbb{T} \mathbf{J})_t + (\mathbb{K} \mathbf{M})_t + \frac{1}{2} ikZ_0 \eta \mathbf{J} \\ \frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{F}_0}{ikZ_0 \eta} &= -(\mathbb{K} \mathbf{J})_t + iZ_0^{-1} (\mathbb{T} \mathbf{M})_t - \frac{\mathbf{M}}{2ikZ_0 \eta} \end{cases}$$

En appliquant le principe des réactions de Rumsey, on obtient donc la formulation suivante :

$$\boxed{V(\{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) = A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ ikZ_0 \eta \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^t - \frac{1}{ikZ_0} \eta^{-1} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}^t) \right\} d\Gamma} \quad (4.2.2)$$

avec :

$$\begin{cases} A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) &= \int_{\Gamma} iZ_0 \mathbb{T} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^t - iZ_0^{-1} \mathbb{T} \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^t + \mathbb{K} \mathbf{J} \cdot \mathbf{M}^t + \mathbb{K} \mathbf{M} \cdot \mathbf{J}^t d\Gamma \\ V(\{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) &= -\int_{\Gamma} \frac{\mathbf{F}_0}{2} \cdot \mathbf{J}^t - \frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{F}_0}{2ikZ_0 \eta} \cdot \mathbf{M}^t d\Gamma \end{cases}$$

### 4.2.2 La formulation de Bendali

On utilise le principe de Rumsey et on utilise la relation (4.2.1) et on retrouve la formulation de **Bendali** suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) + \int_{\Gamma} L(\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}^t - ikZ_0 \eta \mathbf{J}^t) d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{J}^t d\Gamma \\ \text{sous la contrainte} \quad \int_{\Gamma} \mathbf{L}^t \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} - ikZ_0 \eta \mathbf{J}) = \int_{\Gamma} \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{J}^t d\Gamma \end{array} \right. \quad (4.2.3)$$

avec :

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}$$

L'obtention est cependant développée en annexe (C).

### 4.2.3 Mise en évidence de la meilleure solution

L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode de convergence par raffinement vient du fait que nous pouvons exhiber une solution analytique sans avoir à raffiner de manière exagérée.

On se donne un maillage en triangle et on approche les courants électrique et magnétique  $(\mathbf{J}_0, \mathbf{M}_0)$  par les courants  $(\mathbf{J}^h_0, \mathbf{M}^h_0)$  sur les fonctions de Raviart-Thomas. En résolvant le système linéaire issu de la formulation **BGL** ou de la formulation de **Bendali**, on déduit les inconnues  $(J_j, M_j)$  qui correspondent aux flux à travers l'arête  $A_j$  du maillage :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_j = \int_{A_j} \mathbf{J}^h_0(x) \cdot \mathbf{n}_j \\ M_j = \int_{A_j} \mathbf{M}^h_0(x) \cdot \mathbf{n}_j \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{n}_j$  est la normale extérieure au triangle + de l'arête  $A_j$ .

Or nous pouvons exprimer les courants  $\mathbf{J}_0$  et  $\mathbf{M}_0$  en fonction des champs électrique et magnétique généré par le dipôle selon :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_j = \int_{A_j} \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}_j \\ M_j = - \int_{A_j} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n}_j \end{array} \right.$$

De cette manière, nous obtenons donc une solution dite analytique qui nous permettra d'évaluer la précision de chaque formulation et de connaître la formulation la mieux adaptée à notre problème.

# Chapitre 5

## Les résultats numériques

Nous avons implémenté la formulation **BGL** dans le code existant du CERFACS. Pour l'instant, seul un calcul direct a été réalisé. Notons cependant qu'une version parallèle a été construite. Dans le paragraphe suivant, nous décrirons en quelques mots sa mise en place. Nous comparerons ensuite cette formulation à une autre formulation existante au CERFACS. Il est alors nécessaire de construire une solution de référence. La construction de cette solution de référence est développée au chapitre 4.

### 5.1 Remarques sur la parallélisation

#### 5.1.1 Principe

Nous avons fait le choix d'utiliser **ScaLAPACK**. C'est une librairie mathématique parallèle permettant de résoudre certains problèmes d'algèbre linéaire et en particulier les problèmes de matrices pleines, complexes, symétriques. ScaLAPACK s'appuie principalement sur deux bibliothèques :

- Une de communication du nom de **B.L.A.C.S.**(Basic Linear Algebra Communication Subroutines). Cette dernière permet, sur une grille prédéfinie de processeurs, d'échanger des blocs de matrices entre les processeurs, de les diffuser globalement et de calculer sur eux des réductions.
- Une autre de résolution de problèmes linéaires du nom de **PBLAS**.

ScaLAPACK se comporte comme une boîte noire. Le point intéressant de l'implémentation de cette méthode dans le code est la répartition des inconnues suivant les processeurs. Cette répartition se déroule de manière cyclique en fonction du nombre de processeurs.

Ces calculs ont été fait sur un **Silicon Graphics** composé de 32 processeurs et capable de réaliser 500 MFlops (mega float operation per second) par processeur.

#### 5.1.2 Performances

Le tableau suivant donne les temps de résolution du problème de diffraction dans le cas d'une sphère.

Nombre de d.d.l.	Nombre de processeurs	Temps de calcul
480	1	13.75×4 s
	4	14 s
1920	1	151×9 s
	9	154 s

TAB. 5.1 – Temps de résolution

Comme nous pouvons le voir sur le tableau (5.1), le temps de calcul est divisé par le nombre de processeurs ce. Le temps de communication entre les processeurs est négligeable et donc optimisé.

Nombre de d.d.l.	Pas du maillage (m)	Erreur relative (Norme $L_2$ )
120	0.52	4.79%
480	0.3	1.37%
1920	0.15	0.47%

TAB. 5.2 – Erreur relative par rapport à une solution raffinée

Grâce à la parallélisation, nous pouvons désormais augmenter le nombre d'inconnues. A titre d'exemple, nous sommes passés de 3000 d.d.l. en séquentiel à 20000 d.d.l. en parallèle.

## 5.2 Validation du code

### 5.2.1 Comparaison avec une solution analytique

Il est bien connu que dans le cas de la sphère, il existe une solution analytique (dite "solution de Mie"). En particulier, on peut connaître de manière exacte le champ lointain et donc la S.E.R. (Surface Equivalente Radar). L'obtention de cette S.E.R. est développée en annexe (E). Nous allons donc pouvoir comparer nos résultats avec cette solution analytique.

Nous avons considéré le cas d'une sphère de rayon 1 m éclairée par une onde plane dont le nombre d'onde est égal à  $1 \text{ m}^{-1}$

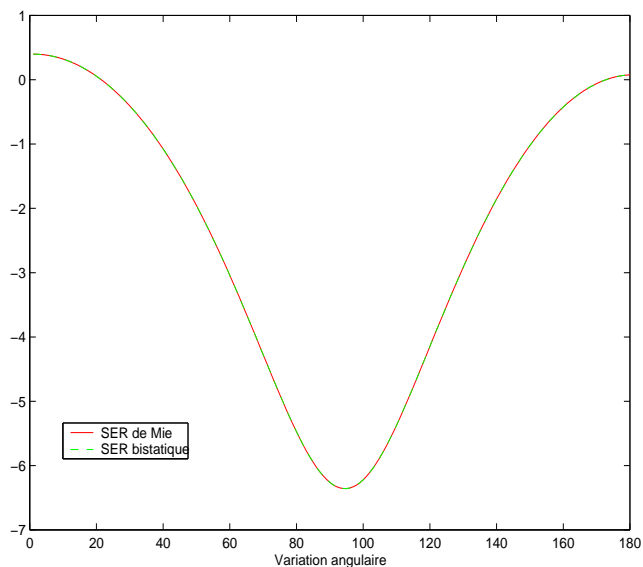


FIG. 5.1 – Comparaison des S.E.R. dans le cas de la sphère

La figure (5.1) donne les deux courbes de S.E.R.. Ces deux courbes se superposent. De plus, l'erreur relative est de 0.1% ce qui assure une bonne cohérence des résultats.

### 5.2.2 Mise en évidence de la consistance de notre solution

La méthode utilisée va nous permettre de montrer que notre solution converge lorsque le pas de discrétisation diminue. Grâce à la méthode de raffinement du maillage développée au chapitre 4, les solutions obtenues pour différents pas de maillage vont être comparées avec une solution sur un maillage raffiné en  $\frac{\lambda}{80}$  et comportant 7680 ddl.

Nous allons mettre en évidence ce résultat au travers de la sphère .

Le tableau précédent montre que l'erreur relative diminue lorsque le pas de maillage diminue. Néanmoins, pour une étude plus approfondie, on pourrait calculer l'ordre de consistance de notre formulation. Remarquons tout d'abord qu'une solution est dite consistante lorsque l'erreur relative est en  $O(h^\alpha)$ . D'après les résultats du tableau (5.2), nous pouvons effectuer une régression linéaire et passer en logarithme pour connaître le coefficient  $\alpha$ . Cette méthode donne le résultat décrit sur la figure suivante :

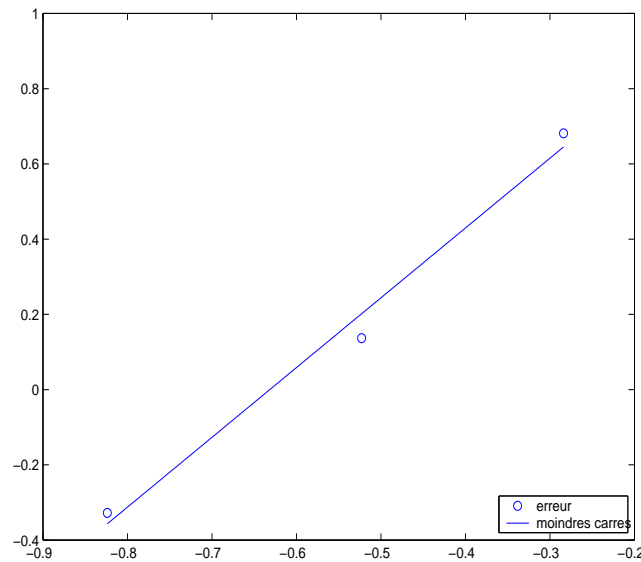


FIG. 5.2 – Calcul de l'ordre de consistance

On remarque que les points sont relativement proches de la droite. On peut approcher le coefficient  $\alpha$  par le coefficient directeur de cette droite.

Numériquement, nous avons calculé l'ordre de consistance de notre solution

$$\alpha = 1.8$$

### 5.2.3 Comparaison avec la formulation de Bendali

D'après ce qui précède, notre formulation converge. Assurons-nous qu'elle converge vers la bonne solution. Nous allons maintenant considérer que la solution de référence est donnée par le code du CER-FACS avec la formulation de **Bendali**.

#### Comparaison sur les courants

Nous espérons montrer une convergence lorsque le pas du maillage décroît avec un nombre d'onde constant.

Pour cet essai, on choisit le nombre d'onde  $k$  égal à  $0.5 \text{ m}^{-1}$  ce qui, lorsque l'on a 480 degrés de liberté, correspond à un type de maillage en  $\frac{\lambda}{10}$ . L'onde incidente est une onde plane (cf Annexe (A)).

Dans le cas de la sphère, nous voyons clairement que la solution obtenue converge vers la solution de référence.

#### Comparaison sur les SER

Nous nous proposons de comparer la surface équivalente radar dans le cas du cube d'arête 1 m.

Sachant que les courbes de la figure (5.3) se superposent, nous constatons que les deux formulations conduisent à la même S.E.R. y compris sur des géométries plus complexes que celle de la sphère.

Nombre de d.d.l.	Taille du maillage	Erreur relative (Norme $L_2$ )
480	$\lambda/10$	4.6%
1080	$\lambda/15$	1.9%
1920	$\lambda/20$	1.1%
3000	$\lambda/25$	0.8%
4320	$\lambda/30$	0.56%
5880	$\lambda/35$	0.29%

TAB. 5.3 – Erreur relative en fonction du pas de discrétisation

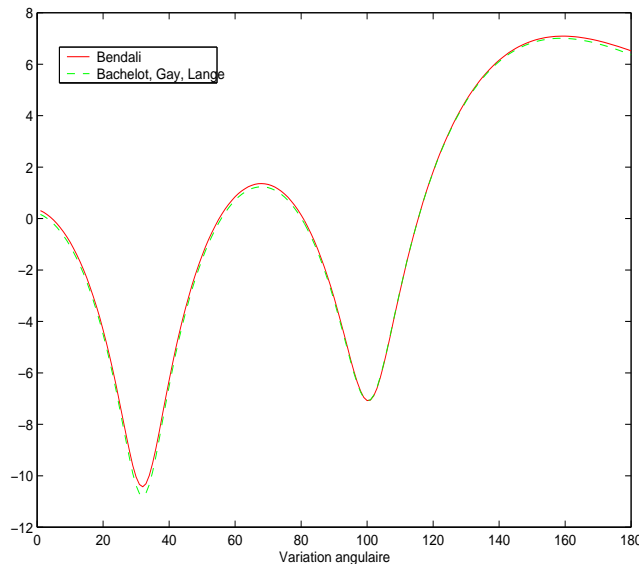


FIG. 5.3 – Comparaison des S.E.R. dans le cas du cube

### Montée en fréquence

Afin de s'approcher des fréquences radars, nous avons augmenté le nombre d'onde ( $k$ ). En effet, ces deux grandeurs sont liées par la relation suivante :

$$f = \frac{c}{2\pi}k$$

avec  $c$  la célérité.

Nous avons choisi comme géométrie une gellule. De plus, en choisissant  $k = 20$ , nous obtenons approximativement une fréquence de 1 GHz. Il est important de noter que cet essai a été réalisé avec un maillage en  $\frac{\lambda}{15}$  pour être conforme avec les maillages industriels.

Nous avons obtenu les S.E.R. suivantes :

Comme nous pouvons le voir, les deux courbes se superposent à nouveau.

### 5.3 Performances de la formulation BGL

Au vu des résultats précédents, nous pouvons considérer que notre formulation donne des résultats cohérents. En effet, ces derniers ont été à la fois comparés avec une solution analytique et avec une solution de référence. Il est toutefois intéressant de juger de la performance de cette formulation par rapport à la formulation de **Bendali** en terme de précision.

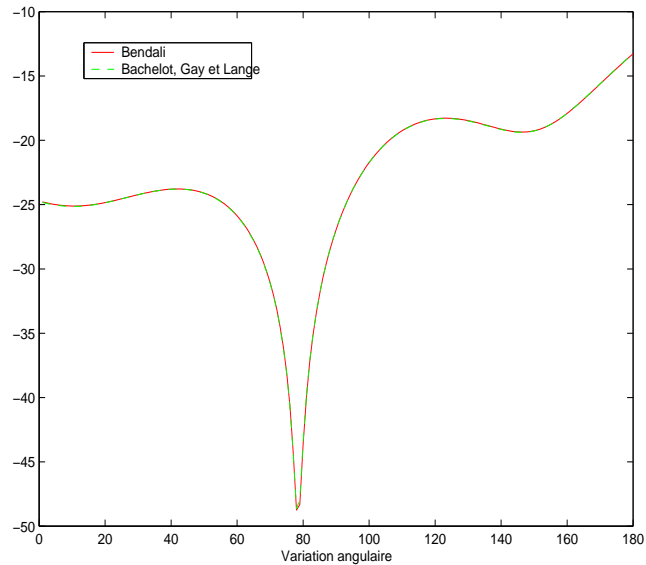


FIG. 5.4 – Comparaison des S.E.R. à haute fréquence dans le cas de la gellule

	Sans raffinement $\lambda / 15$	Avec raffinement $\lambda/100$
Erreur relative	1.8%	0.6%

TAB. 5.4 – Erreur relative entre les deux formulations dans le cas de la sphère

### 5.3.1 Méthode de raffinement de maillage

#### Explication de la méthode utilisée

On extrait pour chaque géométrie une solution de référence par la méthode de raffinement. Cette solution sera obtenue lorsque l'erreur relative d'une formulation à l'autre sera de l'ordre de quelques dixièmes de pourcent. Ensuite, on remontera à un maillage industriel en  $\frac{\lambda}{15}$  et on mettra en évidence la formulation donnant le meilleur résultat pour chaque géométrie (cf chapitre 4).

#### Cas de la sphère

Nous avons tout d'abord testé notre formulation sur la sphère. Le maillage raffiné correspond à un maillage en  $\frac{\lambda}{100}$  alors que le maillage initial n'était qu'en  $\frac{\lambda}{15}$ .

Le tableau suivant met en évidence l'existence d'une solution dite de référence :

Voici, le tableau des écarts par rapport à la solution dite de référence :

Il apparaît que la formulation plus précise pour ce cas-ci est la formulation **BGL**. Néanmoins, afin de ne pas conclure trop rapidement, nous allons recommencer cette opération dans le cas de géométries plus complexes.

#### Cas de géométries plus complexes

Nous obtenons le tableau suivant :

	Formulation de Bendali	Formulation (BGL)
<b>Erreur relative</b>	2.1%	0.9%

TAB. 5.5 – Erreur relative par rapport à une solution de référence dans le cas de la sphère

	Géométrie	Formulation de Bendali	Formulation BGL
<b>Erreur relative</b>	<b>cube</b>	5.0%	5.0%
	<b>cylindre</b>	5.9%	5.8%
	<b>gellule</b>	2.1%	2.0%

TAB. 5.6 – Erreur relative par rapport à une solution de référence dans le cas de géométries moins régulières

## Conclusion

Au vu des résultats précédents, nous ne pouvons pas savoir quelle est la formulation la plus précise.

Afin de résoudre ce problème, il est apparu judicieux de procéder à de nouvelles vérifications numériques. En effet, on pourrait placer à l'intérieur de la géométrie un dipôle. De cette façon, on pourrait connaître le champ en surface exactement, déduire les courants et comparer de manière rigoureuse les deux formulations par rapport à une formulation de référence.

### 5.3.2 Idée du dipôle

#### Le cadre du problème

Le champ électromagnétique issu du dipôle est très irrégulier au voisinage de ce dernier. Pour contourner ce problème, nous devons considérer un cylindre dont les dimensions sont de l'ordre de la longueur d'onde.

Parallèlement à ce problème, nous voulons savoir si les courants obtenus au moyen de la formulation **BGL** sont proches des courants analytiques. En vue de résoudre ce problème, nous devons utiliser un maillage en  $\frac{\lambda}{20}$  pour espérer avoir une bonne approximation de la solution exacte.

Du fait de ces deux contraintes, le nombre de degrés de liberté va croître très rapidement ce qui nous a obligé à paralléliser ce code.

#### Précision de la formulation BGL

Nous avons utilisé le maillage d'un cylindre de hauteur 2 m et de rayon 1 m. Le nombre d'onde est de  $2 \text{ m}^{-1}$  ce qui correspond approximativement à une longueur d'onde de 3 m. On remarque donc que les dimensions du cylindre sont de l'ordre de la longueur d'onde.

Nous avons obtenu les résultats suivants :

Le tableau (5.7) indique que, dans le cas test du dipôle, la solution obtenue par la formulation **BGL** converge vers la solution analytique lorsque le pas du maillage diminue à longueur d'onde constante. On considère donc que la formulation **BGL** donne une solution exacte sur ce maillage à cette longueur d'onde.

## Conclusion

Pour conclure cette étude, nous devrions maintenant comparer ces résultats avec les résultats obtenus grâce à la formulation de **Bendali**. Néanmoins comme nous pouvons le voir en annexe (C), la contrainte utilisée n'est plus nulle ce qui pose un réel problème pour la discrétisation. Néanmoins au

Nombre de d.d.l.	Taille du maillage	Erreur relative (Norme $L_2$ )
468	$\lambda/5$	1.6%
1230	$\lambda/7$	0.6%
1824	$\lambda/15$	0.4%
5592	$\lambda/20$	0.1%

TAB. 5.7 – Erreur relative en fonction du pas de discrétisation

vu des résultats obtenus, il semblerait que la formulation **BGL** donnent des résultats convainquant en terme de courant. Ainsi, il semble que les erreurs constatées au cours de cette étude puisse venir de la formulation de **Bendali**. En effet, cette formulation a l'avantage d'être une formulation à un courant ce qui peut avoir une influence négative en terme de précision et de consistance.

## 5.4 Un cas semi-industriel : l'avion

Nous finissons cet exposé par le traitement d'un cas semi-industriel de l'avion.

Maintenant que nous avons parallélisé le code, nous pouvons travailler sur des maillages comportant un nombre beaucoup plus important d'inconnues. Le maillage de l'avion se trouve en annexe (G).

Ce maillage comporte 9000 arêtes. Notre formulation nous oblige à les dédoubler ce qui conduit à inverser une matrice (18000,18000) pleine.

L'objectif des problèmes de furtivité est de connaître le champ électromagnétique diffracté par un objet en zone lointaine. Nous allons éclairer cet avion par une onde plane et regarder la S.E.R. obtenue. Nánmoins le maillage ne permettait pas de passer en haute fréquence.

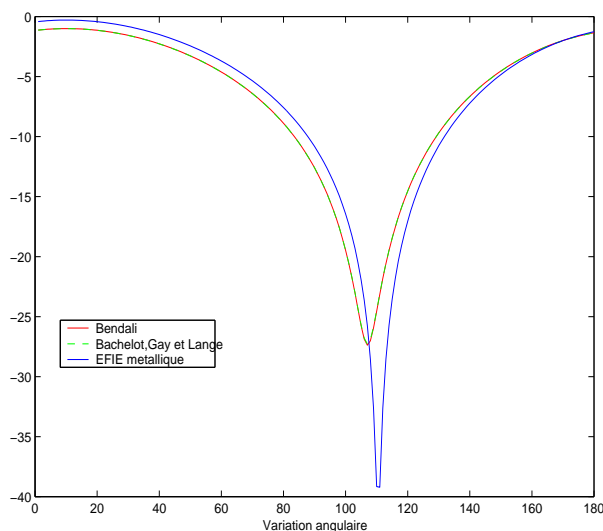
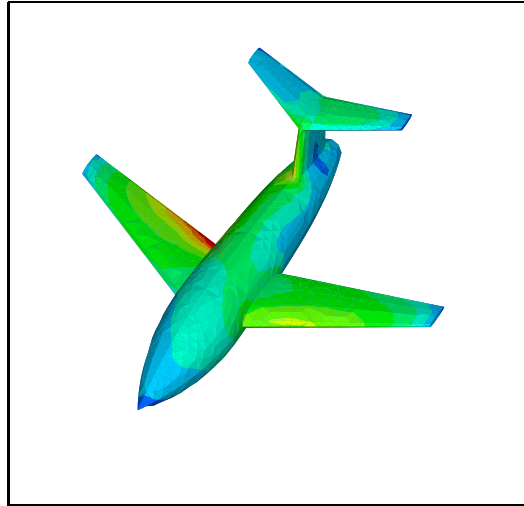


FIG. 5.5 – Comparaison des S.E.R.

La courbe bleue correspond à la S.E.R. obtenue avec la E.F.I.E. dans le cas métallique.

La figure (5.4) montre clairement que l'introduction de cette condition d'impédance dans le code a permis de corriger la S.E.R. lorsque l'obstacle métallique est recouvert d'une fine couche de diélectrique.

Nous obtenons la répartition du courant électrique à la surface de l'avion ci dessous.



TAB. 5.8 – Répartition du courant électrique en surface de l'avion

## 5.5 Conclusion

Les résultats donnés par cette formulation sont satisfaisants en de nombreux points :

- La validation de notre formulation a été réalisée en comparant nos solutions avec des solutions analytiques ou de référence sur maillage raffiné ou industriel (maillage en  $\frac{\lambda}{15}$ ) à haute ou basse fréquence quelque soit la géométrie.
- La méthode par raffinement nous a permis de conclure à la consistance de la formulation **BGL**.
- La méthode par raffinement nous a permis de prouver que, dans le cas de la sphère, la formulation **BGL** donne une meilleure approximation de la solution que la formulation de **Bendali**. Néanmoins sur toutes les autres géométries, aucune conclusion ne peut être tirée. Ainsi, la méthode de convergence par raffinement ne s'avère pas satisfaisante.
- L'idée du dipôle nous permet d'affirmer que la formulations **BGL** donne, dans cette configuration, des résultats tout-à-fait cohérent. Néanmoins, pour réelement achevé cette étude nous aurions du implémenter la formulation de **Bendali** sur le même problème.

Grâce à toutes ces informations, nous avons pu traiter le cas semi-industriel de l'avion.

# Conclusion

Nous avons résolu le problème de diffraction d'une onde électromagnétique en régime harmonique par un obstacle métallique recouvert d'une mince couche de diélectrique. Pour modéliser de tels types de problèmes, nous avons implémenté dans le code du CERFACS la formulation de Bachelot, Gay et Lange. Des validations ont été réalisées. Le comportement à différentes fréquences de cette formulation a été aussi étudié.

Nous avons pu tester les performances de cette formulation en la comparant à la formulation de **Bendali** et al. Les résultats numériques sont satisfaisants. Nous avons obtenu des erreurs relativement faibles entre les deux formulations. Cependant, nous n'avons pas pu déterminer quelle était la formulation la plus précise. En effet, la méthode de raffinement susceptible de nous donner la formulation la plus précise ne s'est pas avérée satisfaisante.

Dans l'optique de comparer au mieux ces deux formulations, un dipôle a été positionné à l'intérieur d'une géométrie. Cela permet de comparer les courants obtenus par la formulation **BGL** avec les courants de surface calculés analytiquement. Cette méthode s'est avérée très satisfaisante et de ce fait on pourrait conclure que cette formulation donne de meilleurs résultats que la formulation de **Bendali**.

Maintenant que nous savons que la formulation **BGL** donne des solutions précises et grâce aux travaux présentés pour faire un calcul multipolaire, la perspective naturelle de ce stage est d'implémentée de manière astucieuse cette formulation dans le code multipôle du CERFACS ce qui devrait permettre de traiter des cas à quelques millions de degrés de liberté.

# Bibliographie

- [1] N. Bartoli. *Modèles pour la diffraction d'ondes par des obstacles revêtus de couches minces . Résolution de problèmes de diffraction d'ondes via une formulation intégrale de type point selle.* PhD thesis, INSA, Toulouse, Décembre 2000.
- [2] A. Bendali and C. Devys. Calcul numérique du rayonnement de cornets électromagnétiques dont l'ouverture est partiellement remplie par un diélectrique. *L'Onde électrique*, 66 :77–81, 1986.
- [3] F. Collino and B. Després. Integral equations via saddle point problems for time-harmonic Maxwell's equations. *SIAM J. Appl. Math.*, submitted in 2000.
- [4] F. Collino and F. Millot. La méthode multipôle pour les problèmes de diffraction. Technical Report TR/EMC/00/95, CERFACS, Toulouse, France, 2000.
- [5] L. C. Kempel J. L. Volakis, A. Chatterjee. *Finite Element Method for Electromagnetics. Antennas, Microwave circuits and Scattering Applications.* IEEE antennas and Propagation Society, 1998.
- [6] V. Lange. *Equations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un obstacle dissipatif.* PhD thesis, Université de Bordeaux I, octobre 1995.
- [7] J. C. Nédélec. Ondes acoustiques et électromagnétiques ; équations intégrales. Technical report, Cours DEA, Ecole Polytechnique, Paris, 1996.
- [8] P.A. Raviart and J.M. Thomas. *A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems in Mathematical aspects of finite element methods.* E.Magenes, 1975.
- [9] G. Sylvand. *La méthode multipôle rapide en électromagnétisme : performances, parallélisation, applications.* PhD thesis, ENPC Paris, 2002.
- [10] L. Vernhet. *Approximation par éléments finis de frontière de problèmes de diffraction d'ondes avec condition d'impédance.* PhD thesis, Université de Pau, décembre 1997.

# **ANNEXES**

# Annexe A

## Les sources

### A.1 L'onde plane

L'onde incidente est une onde plane de formule générale :

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = (E_\theta \mathbf{e}_\theta + E_\phi \mathbf{e}_\phi) e^{-i\omega t + k\mathbf{r} \cdot \mathbf{x}}$$

où le vecteur d'onde est  $(-\mathbf{kr})$  avec

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $\mathbf{H}^{\text{inc}}$  est déduit de la façon suivante :

$$\mathbf{H}^{\text{inc}} = \frac{1}{Z_0} \mathbf{r} \wedge \mathbf{E}^{\text{inc}}$$

### A.2 Le dipôle

Le champ du dipôle nous est donné par les formules suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 - \{x_0\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_0(x) = ikZ_0 \frac{ikR}{4\pi R} \left\{ \left(-1 - \frac{3i}{kR} + \frac{3}{(kR)^2}\right) (\mathbf{I}_a \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}) + \left(1 + \frac{i}{kR} - \frac{1}{(kR)^2}\right) \mathbf{I}_a \right\} \\ \mathbf{H}_0(x) = \mathbf{rot} \left( \mathbf{I}_a \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \right) \end{array} \right.$$

Avec  $\mathbf{R} = x - x_0$  et  $R = |x - x_0|$

# Annexe B

## L'impédance équivalente

### B.1 Impédance pour une onde plane à incidence normale diffractée par un plan infini

Dans beaucoup de problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques, on peut modéliser certains phénomènes complexes par une condition aux limites de type impédance de surface sur  $\Gamma$  :

$$\mathbf{E}_t = ikZ_0\eta\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}$$

que l'on simplifiera par :

$$\mathbf{E}_t = Z_0Z_s\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}$$

On montre qu'en mode TE, la condition d'impédance se traduit par la condition à la limite suivante :

$$\partial_n u + ikZ_s u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{B.1.1})$$

En mode TE,  $\mathbf{E}$  appartient au plan d'onde. Ce plan contient  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{n}$  ici  $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Ainsi on déduit que  $\mathbf{H}$  est orthogonal à ce plan :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\mathbf{E}_t = Z_0Z_s H_z \begin{pmatrix} n_y \\ -n_x \\ 0 \end{pmatrix} = Z_0Z_s H_z \boldsymbol{\tau}$$

Ensuite, on utilise l'équation de Maxwell harmonique suivante :

$$i\omega\epsilon\mathbf{E} + \text{rot}\mathbf{H} = 0 \quad \text{dans } \Omega_0$$

Et donc :

$$i\omega\epsilon\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} + (\text{rot}\mathbf{H}) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

Or :

$$\begin{aligned} (\text{rot}\mathbf{H}) \cdot \boldsymbol{\tau} &= \partial_y H_z \cdot n_y + \partial_x H_z \cdot n_x = \nabla H_z \cdot \mathbf{n} \\ \text{et} \\ \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{E}_t \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{car } \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \end{aligned}$$

En utilisant la condition d'impédance, nous obtenons la relation escomptée :

$$\nabla H_z \cdot \mathbf{n} + ikZ_s H_z = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

Nous allons introduire une méthode utilisée par les physiciens pour décrire, de façon approchée, les effets d'une couche mince diélectrique recouvrant un conducteur parfait par une condition d'impédance dite effective.

On va calculer  $Z_S$ , en supposant qu'on est dans la situation d'un plan parfaitement conducteur  $(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = -\delta$  avec,

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= (x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0 \\ \Omega_1 &= (x, y) \in \mathbb{R}^2; -\delta < y < 0\end{aligned}$$

où  $\delta$  est l'épaisseur de la couche mince. On suppose que l'onde incidente est une onde plane arrivant à incidence normale sur l'obstacle :

$$u^{inc}(x, y) = e^{-iky}$$

Pour tenir compte de la condition de radiation et de l'équation d'Helmholtz, on cherche l'onde totale sous la forme d'une superposition d'ondes planes :

$$\begin{aligned}u_0(x, y) &= u_{/\Omega_0}(x, y) = e^{-iky} + R e^{iky} & y > 0 \\ u_1(x, y) &= u_{/\Omega_1}(x, y) = T(e^{-iky} + R_0 e^{iky}) & -\delta < y < 0\end{aligned}$$

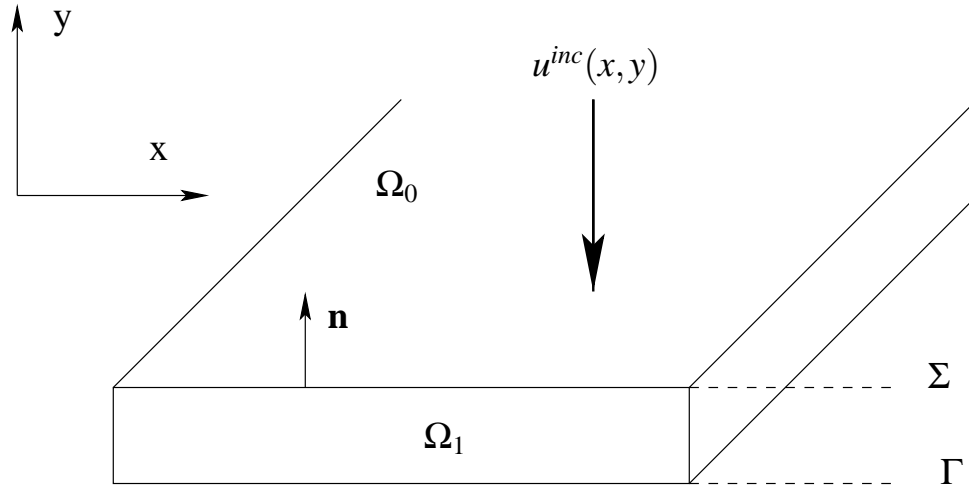


FIG. B.1 – Plan infini recouvert de diélectrique

où  $R, R_0$  sont des coefficients de réflexion et  $T$ , un coefficient de transmission inconnus. On notera par  $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{n}{\varepsilon}$ , l'impédance du diélectrique.

D'après les relations de continuité aux interfaces, nous obtenons les relations entre les différents coefficients :

$$\begin{cases} 1 + R &= T(1 + R_0) \\ 1 - R &= ZT(1 - R_0) \\ e^{ikn\delta} &= R_0 e^{-ikn\delta} \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à exprimer  $Z_S$  en fonction de  $R$ . Par cette méthode nous voulons identifier les deux modélisations à savoir le plan métallique recouvert d'une couche de diélectrique et le métal comportant une condition d'impédance de surface. Pour cela, nous utilisons l'équation (B.1.1)

$$\begin{cases} \partial_y u_0 &= -ikZ_S u_0 & \text{en } y = 0 \\ \partial_y u_0(y = 0) &= ik(R - 1) \\ u_0(y = 0) &= R + 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$Z_s = \frac{1 - R}{1 + R}$$

Il ne reste plus qu'à identifier les termes pour avoir une équivalence des schémas :

$$\boxed{Z_s = -iZ \tan(kn\delta)} \quad (\text{B.1.2})$$

## B.2 Passage à des géométries quelconques

On approche localement cette géométrie par un plan. Le problème vient du fait que l'onde incidente n'est plus à incidence normale. Ce problème n'a pas été résolu mais cela revient à effectuer un développement limité et à négliger les termes d'ordre 2.

Ensuite, on remarque que la réalité des problèmes physiques est en accord avec ce type de condition.

## Annexe C

# Obtention des différentes formulations

L'obtention de la formulation "triviale", de la EFIE, de la MFIE et de la CFIE a été partiellement décrite dans le rapport. La formulation de Bachelot, Gay et Lange (**BGL**) et celle de **Bendali** seront détaillées dans le cas impédant où l'onde incidente est une onde plane et dans le cas du dipôle.

### C.1 Le principe des réactions de Rumsey

Le principe des réactions de Rumsey consiste à former de deux manières différentes la quantité :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^t - \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}^t) d\Gamma$$

Première forme : Elle est obtenue grâce à la méthode des équations intégrales :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{E}^{\text{diff}} \cdot \mathbf{J}^t - \mathbf{H}^{\text{diff}} \cdot \mathbf{M}^t) d\Gamma = A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} ((\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}^t + (\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}) \cdot \mathbf{M}^t) d\Gamma$$

avec :

$$A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) = \int_{\Gamma} (iZ_0(\mathbb{T}\mathbf{J}) \cdot \mathbf{J}^t + (\mathbb{K}\mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}^t - iZ_0^{-1}(\mathbb{T}\mathbf{M}) \cdot \mathbf{M}^t + (\mathbb{K}\mathbf{J}) \cdot \mathbf{M}^t) d\Gamma$$

Or :

$$\begin{cases} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{\text{inc}} + \mathbf{E}^{\text{diff}} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}^{\text{inc}} + \mathbf{H}^{\text{diff}} \end{cases}$$

On fait de même avec les champs incidents :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}^t - \mathbf{H}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{M}^t) d\Gamma = -V(\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t)$$

La réaction totale est donc :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^t - \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}^t) d\Gamma = A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} ((\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}^t + (\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}) \cdot \mathbf{M}^t) d\Gamma - V(\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t)$$

Seconde forme : Nous avons aussi

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^t - \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}^t) d\Gamma = \int_{\Gamma} (\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{J}^t - (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}^t)) d\Gamma$$

Rappelons l'expression du champ électromagnétique en fonction des courants  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{E} &= \mathbf{n} \wedge \mathbf{M} \\ \mathbf{H} &= -\mathbf{n} \wedge \mathbf{J} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}' & = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \wedge \mathbf{M} \cdot \mathbf{J}' \\ \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') & = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') \end{cases}$$

et :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{J}' - (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}')) d\Gamma = \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{J} \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') d\Gamma$$

Finalement, en couplant les deux équations, nous pouvons écrire :

$$V(\mathbf{J}', \mathbf{M}') = A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{J} \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') d\Gamma$$

Soit :

$$\boxed{V(\mathbf{J}', \mathbf{M}') = A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}' + \mathbf{M}' \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}) d\Gamma} \quad (\text{C.1.1})$$

## C.2 Cas impédant

On se place dans le cas général d'une fonction  $\eta$  inversible.

### C.2.1 La formulation de Bachelot, Gay et Lange (BGL)

L'équation C.3.3 est vraie quelque soit la condition sur  $\Gamma$ . Pour obtenir la formulation **BGL**, nous utiliserons la condition d'impédance de Léontovitch :

$$\mathbf{E}_r - ikZ_0\eta\mathbf{n} \wedge \mathbf{H} = 0$$

Soit en terme de courants :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \wedge \mathbf{M} & = ikZ_0\eta\mathbf{J} \\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{J} & = -\frac{1}{ikZ_0}\eta^{-1}\mathbf{M} \end{cases}$$

En remplaçant dans C.3.3, on obtient la formulation de Bachelot :

$$\boxed{V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) = A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ ikZ_0\eta\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' - \frac{1}{ikZ_0}\eta^{-1}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') \right\} d\Gamma} \quad (\text{C.2.2})$$

avec :

$$\begin{cases} A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) & = \int_{\Gamma} iZ_0\mathbb{T}\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' - iZ_0^{-1}\mathbb{T}\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}' + \mathbb{K}\mathbf{J} \cdot \mathbf{M}' + \mathbb{K}\mathbf{M} \cdot \mathbf{J}' d\Gamma \\ V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) & = - \int_{\Gamma} \mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{H}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{M}' d\Gamma \end{cases}$$

où  $\frac{1}{ik}\eta^{-1}$  est l'opérateur d'admittance relative, inverse de l'impédance relative  $ik\eta$ .

Remarquons cependant que ces équations se simplifient dans le cas où  $\eta$  est une constante :

$$\begin{aligned} V(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) & = A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ ikZ_0\eta\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' - \frac{1}{ikZ_0\eta}\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}' \right\} d\Gamma \end{aligned}$$

Afin de simplifier de nouveau ce système, on effectue un changement de variables :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{J}} & = \mathbf{J} \\ \tilde{\mathbf{M}} & = \frac{\mathbf{M}}{iZ_0} \end{cases}$$

Finalemment, on obtient quasiment la même formulation mais avec des expressions de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{V}$  différentes :

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) &= \tilde{A}(\{\tilde{\mathbf{J}}, \tilde{\mathbf{M}}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ ikZ_0 \eta \tilde{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{J}' - \frac{1}{ikZ_0 \eta} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{M}' \right\} d\Gamma \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} \tilde{A}(\{\tilde{\mathbf{J}}, \tilde{\mathbf{M}}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) &= \int_{\Gamma} \mathbb{T} \tilde{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{J}' + \mathbb{T} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{M}' + \mathbb{K} \tilde{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{M}' + \mathbb{K} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{J}' d\Gamma \\ \tilde{V}(\{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) &= - \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{E}^{\text{inc}}}{iZ_0} \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{H}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{M}' d\Gamma \end{cases}$$

### C.2.2 La formulation de Bendali

Comme pour la formulation **BGL**, nous reprenons l'équation C.3.3. Remarquons que pour l'instant, nous n'avons pas utilisé la condition d'impédance. Cette condition liant  $\mathbf{E}_t$  et  $\mathbf{H}$  est vue comme une contrainte : on ne cherche plus à avoir  $\mathbf{E}_t - ikZ_0 \eta (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}) = 0$  en chaque point de  $\Gamma$  mais en moyenne.

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{E}_t - ikZ_0 \eta (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})) \cdot \mathbf{J}' = 0$$

ou :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} - ikZ_0 \eta \mathbf{J}) \cdot \mathbf{J}' = 0$$

Soit :

$$V(\mathbf{J}', \mathbf{M}') = A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}', \mathbf{M}'\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (ikZ_0 \eta \mathbf{J}) \cdot \mathbf{J}' - \mathbf{J} \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}') d\Gamma$$

On introduit un lagrangien :

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{J} = \frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}$$

La formulation de **Bendali** s'exprime donc de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (A(\mathbf{J}, \mathbf{M})(\mathbf{J}', \mathbf{M}')) &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}' - ikZ_0 \eta \mathbf{J}') d\Gamma = V(\mathbf{J}', \mathbf{M}') \\ \text{sous la contrainte} &\int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} - ikZ_0 \eta \mathbf{J}) \cdot \mathbf{L}' = 0 \end{aligned}$$

### C.3 Cas du dipôle

On se propose de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) &= (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) & \text{dans } \Omega_{\text{ext}} \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) &= (\mathbf{0}, \mathbf{0}) & \text{dans } \Omega_{\text{int}} \end{cases}$$

Le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$  est celui du dipole décrit dans l'annexe (A).

La trace des champs sur la surface de l'obstacle est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{0t}(x) &= iZ_0 (\mathbb{T} \mathbf{J}(x))_t + (\mathbb{K} \mathbf{M}(x))_t + \frac{1}{2} \mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{M}(x) \\ \mathbf{H}_{0t}(x) &= -(\mathbb{K} \mathbf{J}(x))_t + iZ_0^{-1} (\mathbb{T} \mathbf{M}(x))_t - \frac{1}{2} \mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{J}(x) \end{cases}$$

On utilise le principe des réactions de Rumsey. Par analogie avec le cas impédant en posant :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_0 &= \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_0 & \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{M}_0 &= -\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_0 \end{cases}$$

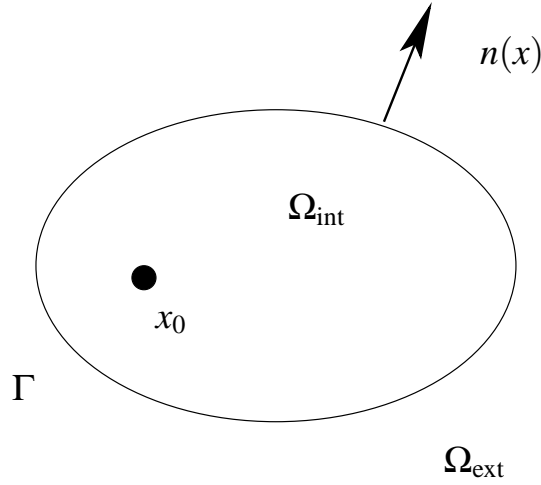


FIG. C.1 – Schéma du problème test du dipôle

on obtient :

$$A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}^t + \mathbf{M}^t \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{J}) d\Gamma \quad (\text{C.3.3})$$

avec :

$$A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) = \int_{\Gamma} (iZ_0(\mathbb{T}\mathbf{J}) \cdot \mathbf{J}^t + (\mathbb{K}\mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}^t - iZ_0^{-1}(\mathbb{T}\mathbf{M}) \cdot \mathbf{M}^t + (\mathbb{K}\mathbf{J}) \cdot \mathbf{M}^t) d\Gamma$$

### C.3.1 La formulation BGL

Pour retrouver la formulation **BGL**, on définit une fonction  $\mathbf{F}_0(x)$  de la manière suivante :

$$\mathbf{F}_0(x) = \mathbf{E}_{0t} - ikZ_0\eta\mathbf{H}_{0t} \quad (\text{C.3.4})$$

Pour simplifier l'étude, on considère  $\eta$  comme une constante différente de 0 et on traduit la relation (C.3.4) en terme de courants :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \wedge \mathbf{M} = \frac{\mathbf{F}_0}{ikZ_0\eta} + \frac{ikZ_0\eta\mathbf{J}}{ikZ_0\eta} \\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{J} = -\frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{F}_0}{ikZ_0\eta} - \frac{\mathbf{M}}{ikZ_0\eta} \end{cases}$$

On réinjecte ces deux relations dans (C.3.3) pour obtenir :

$$V(\{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) = A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ ikZ_0\eta\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^t - \frac{1}{ikZ_0\eta}\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^t \right\} d\Gamma$$

avec :

$$V(\{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) = - \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{F}_0}{2} \cdot \mathbf{J}^t - \frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{F}_0}{2ikZ_0\eta} d\Gamma$$

### C.3.2 La formulation de Bendali

Pour retrouver la formulation de **Bendali**, on impose la relation (C.3.4) sous sa forme faible c'est-à-dire :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{E}_{0t} - ikZ_0\eta\mathbf{H}_{0t}) \cdot \mathbf{J}^t = \int_{\Gamma} \mathbf{F}_0(x) \cdot \mathbf{J}^t \quad (\text{C.3.5})$$

ou en terme de courant :

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} - ikZ_0 \eta \mathbf{J}) \cdot \mathbf{J}^t = \int_{\Gamma} \mathbf{F}_0(x) \cdot \mathbf{J}^t$$

Ensuite on réécrit la relation (C.3.3) selon :

$$A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}) \cdot \mathbf{J}^t - \mathbf{J} \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}^t) d\Gamma$$

et on injecte la relation (C.3.5) et on obtient :

$$A(\{\mathbf{J}, \mathbf{M}\}, \{\mathbf{J}^t, \mathbf{M}^t\}) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})(\mathbf{n} \wedge \mathbf{M}^t - ikZ_0 \eta \mathbf{J}^t) d\Gamma = V(\{\mathbf{J}^t\})$$

sous la contrainte 
$$\int_{\Gamma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{M} - ikZ_0 \eta \mathbf{J}) \cdot \mathbf{L}^t = \int_{\Gamma} \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{L}^t$$

avec :

$$V(\{\mathbf{J}^t\}) = \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{F}_0}{2} \cdot \mathbf{J}^t$$

## Annexe D

# Traitement des intégrales singulières

En se servant de la thèse de V. Lange(cf [6]), nous allons introduire les différents changements de variables trouvés par J. Gay qui ont permis de calculer les intégrales utilisées dans ce code :

$$I_\alpha = \int_K \int_L \frac{F(x,y)}{|x-y|^\alpha} d\Gamma(x) d\Gamma(y) \quad \alpha = 1 \quad \text{ou} \quad 2$$

avec K et L deux triangles du maillage.

Quatre cas sont à considérer :

1. K et L sont disjoints
2. K et L sont confondus
3. K et L ont une arête en commun
4. K et L ont un sommet en commun

Dans le premier cas, il n'y a aucun problème pour calculer ces intégrales puisque le dénominateur ne s'annule jamais et par conséquent les intégrales ne sont pas singulières.

Dans cette annexe, nous traiterons uniquement le cas où K et L sont confondus. Pour les deux autres cas, nous renvoyons le lecteur à la thèse de Virginie Lange.

Considérons tout d'abord le cas de  $I_1$ . On découpe le triangle  $K=L$  en trois zones concourantes en  $x$  :

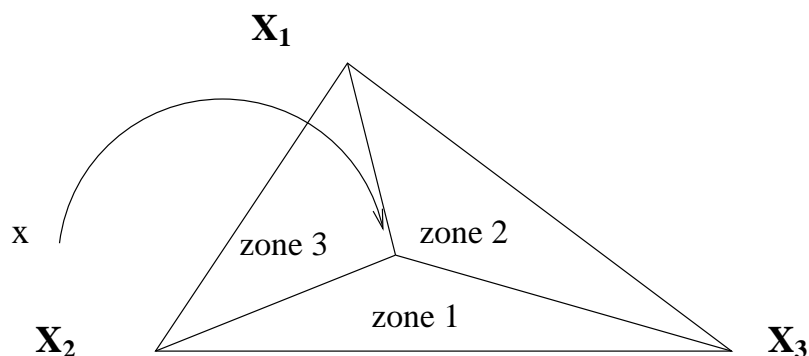


FIG. D.1 – Modèle de raffinement de maillage

où le point  $x$  est repéré par ses coordonnées barycentriques :

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{X}_1 + \lambda_2 \mathbf{E}_2 + \lambda_3 \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{E}_3 &= \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1 \end{aligned}$$

On effectue des changements de variables différents dans chacune des trois zones. L'intégrale sera alors égale à la somme des trois intégrales calculées sur chaque zone.

$$\underline{\text{Zone 1}} : y = (1 - \mu_1)x + \mu_1((1 - \mu_2)\mathbf{X}_2 + \mu_2\mathbf{X}_3)$$

Le jacobien de la transformation s'écrit  $J_{23} = \mu_1\lambda_2|K|$  où  $|K|$  désigne le double de la mesure du triangle  $K$

$$\underline{\text{Zone 2}} : y = (1 - \mu_1)x + \mu_1((1 - \mu_2)\mathbf{X}_3 + \mu_2\mathbf{X}_1)$$

$$\text{Avec } J_{13} = \mu_1\lambda_3|K|$$

$$\underline{\text{Zone 3}} : y = (1 - \mu_1)x + \mu_1((1 - \mu_2)\mathbf{X}_1 + \mu_2\mathbf{X}_2)$$

$$\text{Avec } J_{12} = \mu_1\lambda_2|K|$$

Avec ces changements de variables, les singularités ont disparu. En effet, prenons l'exemple de la zone 1. La singularité a lieu lorsque  $x = y$  c'est à dire lorsque  $\mu_1 = 0$ . Cependant  $\mu_1$ , présent au numérateur et au dénominateur, se simplifie en ôtant du même coup la singularité.

Considérons  $I_2$  : cette intégrale intervient dans le potentiel de double couche. Rappelons sa formule :

$$\int_{\Gamma_j} (\mathbb{K}\varphi_i)(x) \cdot \varphi_j^t(x) = \int_{\Gamma_j} \int_{\Gamma_i} (\nabla_y G(x, y) \wedge \varphi_i(y)) \cdot \varphi_j^t(x)$$

Nous savons que  $\nabla_y G(x, y)$  est dans le plan tangent tout comme  $\varphi_i(y)$ . Ainsi le produit vectoriel de ces deux grandeurs est colinéaire à la normale. Sachant que  $\varphi_j^t(x)$  est aussi dans le plan tangent, l'intégrale est nulle et donc nous ne devons pas nous intéresser à  $I_2$ .

En ce qui concerne le potentiel de simple couche, on enlève le gradient par une simple intégration par partie.

# Annexe E

## La S.E.R.

La S.E.R représente le calcul du champ  $\mathbf{E}$  à l'infini :  
Rappelons l'équation intégrale relative au champ  $\mathbf{E}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \\ \text{avec} \\ \mathbb{T}\mathbf{J} \\ \mathbb{K}\mathbf{J} \\ \text{et} \\ G(x,y) \end{array} \right. = \begin{array}{l} \mathbf{E}^{\text{inc}} + ikZ_0(\mathbb{T}\mathbf{J}) + (\mathbb{K}\mathbf{M}) \\ \int_{\Gamma} (G(x,y)\mathbf{J}(y) + \frac{1}{k^2}\nabla_x G(x,y)\nabla_{\Gamma}\mathbf{J}(y))d\Gamma(y) \\ \int_{\Gamma} \nabla_y G(x,y) \wedge \mathbf{M}(y) \\ \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}; \text{pour } x \neq y \text{ dans } \mathbb{R}^3 \end{array} \quad (\text{E.0.1})$$

En effectuant un développement à l'ordre 1 nous avons :

$$\mathbf{x} = r\mathbf{U} \implies |x-y| = r - \mathbf{U}\cdot\mathbf{r}(\mathbf{y})$$

d'où :

$$\text{grad}_x G = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} ike^{-ik\mathbf{r}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{U}} \frac{\mathbf{x}}{r}$$

et :

$$G(x,y) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-ik\mathbf{r}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{U}}$$

Ce qui en définitif donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \\ \text{avec} \\ \mathbf{P}(\mathbf{U}) \\ \text{et} \\ \mathbf{Q}(\mathbf{U}) \end{array} \right. = \begin{array}{l} \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (\mathbf{P}(\mathbf{U}) - (\mathbf{P}(\mathbf{U})\cdot\mathbf{U})\mathbf{U} + ik\mathbf{Q}(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{U}) \\ \int_{\Gamma} e^{ik\mathbf{r}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{U}} \mathbf{J}(y) d\Gamma(y) \\ \int_{\Gamma} e^{ik\mathbf{r}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{U}} \mathbf{P}(y) d\Gamma(y) \end{array} \quad (\text{E.0.2})$$

$r_0$  est le rayon du point  $x_0$

Si :

$$\mathbf{P}(\mathbf{U}) - (\mathbf{P}(\mathbf{U})\cdot\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{U} \wedge (\mathbf{P}(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{U})$$

Or :

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \mathbf{U} \wedge (\mathbf{P}(\mathbf{U}) \wedge \mathbf{U}) - ik\mathbf{Q}(\mathbf{U})$$

Il vient, aux termes du second ordre près en  $\frac{1}{r}$

$$\mathbf{E}(x) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{A}(\mathbf{U})$$

L'atténuation en décibels par rapport à une direction de référence  $\mathbf{U}_0$  (généralement une direction où l'intensité du rayonnement est maximale).

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_0) = 10 \log_{10} \frac{|\mathbf{A}(\mathbf{U})|^2}{|\mathbf{A}(\mathbf{U}_0)|^2}$$

# Annexe F

## La méthode multipôle (modèle mono-niveau)

### F.1 Principe du modèle

La méthode multipôle permet de réaliser de manière économique et rapide des produits matrice-vecteur.

Soit un vecteur  $\mathbf{t}$  tel que :

$$\mathbf{t} = (t_i)_{1 \leq i \leq n}$$

Ce vecteur représente la fonction  $\mathbf{t}(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} t_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i(x)$ , et on cherche à calculer le produit  $\mathcal{A} \cdot \mathbf{t}$  dont la j-ième coordonnée s'écrit :

$$(\mathcal{A} \cdot \mathbf{t})_j = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(|y-x|) (\mathbf{t}(x) \boldsymbol{\varphi}_j(y) - \frac{1}{k^2} \text{div}_{\Gamma} \mathbf{t}(x) \cdot \text{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}_j(y)) d\Gamma(y) d\Gamma(x) \quad (\text{F.1.1})$$

où  $G(|y-x|)$  est la fonction de Green définie par :

$$G(|x-y|) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

### F.2 Simplification des termes matriciels

Avant toute chose, nous allons simplifier la forme des produits matrice-vecteur à calculer. Dans la formule (F.1.1), le terme central peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(x) \boldsymbol{\varphi}_j(y) - \frac{1}{k^2} \text{div}_{\Gamma} \mathbf{t}(x) \cdot \text{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}_j(y) &= (\mathbf{t})_x(x) (\boldsymbol{\varphi}_j)_x(y) \\ &+ (\mathbf{t})_y(x) (\boldsymbol{\varphi}_j)_y(y) \\ &+ (\mathbf{t})_z(x) (\boldsymbol{\varphi}_j)_z(y) \\ &- \frac{1}{k^2} \text{div}_{\Gamma} \mathbf{t}(x) \cdot \text{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}_j(y) \end{aligned}$$

L'expression (F.2) apparaît donc comme étant la somme de quatre termes de la forme :

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(|x-y|) f(x) g(y) dx dy \quad (\text{F.2.2})$$

où les fonctions scalaires  $f$  et  $g$  sont respectivement les composantes  $x, y, z$  et divergence des fonctions  $\mathbf{t}$  et  $\boldsymbol{\varphi}_j$ . Il est donc équivalent de manipuler des termes de la forme (F.1.1) ou (F.2.2).

### F.3 Décomposition du noyau

On se donne quatre points  $x, y, M_1, M_2$ . On suppose que l'on est dans la configuration :

- $x$  est proche de  $M_1$
- $y$  est proche de  $M_2$
- $M_1$  est éloigné de  $M_2$

Le vecteur  $\mathbf{xy}$  se décompose sous la forme :

$$\mathbf{xy} = \mathbf{xM}_1 + \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2\mathbf{y}$$

On souhaiterait en fait décomposer le noyau de Green  $G(|x - y|)$  de la même manière grâce au théorème d'addition de Gegenbauer. On a la décomposition suivante pour le noyau de Green :

$$G(|x - y|) = \frac{ik}{16\pi^2} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} e^{iks \cdot \mathbf{xM}_1} T_{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}^L(\mathbf{s}) e^{iks \cdot \mathbf{M}_2\mathbf{y}} d\mathbf{s} \quad (\text{F.3.3})$$

où

$$T_{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}^L(\mathbf{s}) = \sum_{0 \leq l \leq L} (2l + 1) i^l h_l^1(k \cdot |\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2|) P_l(\cos(\mathbf{s}, \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)) \quad (\text{F.3.4})$$

Tâchons d'interpréter la formule (F.3.3). Elle comporte trois termes :

- le terme  $e^{iks \cdot \mathbf{xM}_1}$  transporte l'information du point source  $x$  au point  $M_1$ .
- le terme  $T_{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}^L(\mathbf{s})$  assure le transfert de l'information entre  $M_1$  et  $M_2$ .
- le terme  $e^{iks \cdot \mathbf{M}_2\mathbf{y}}$  transporte l'information jusqu'au point  $y$ .

Afin de mieux comprendre l'intérêt de la décomposition du noyau de Green, nous allons l'illustrer sur les figures (F.1) et (F.2)

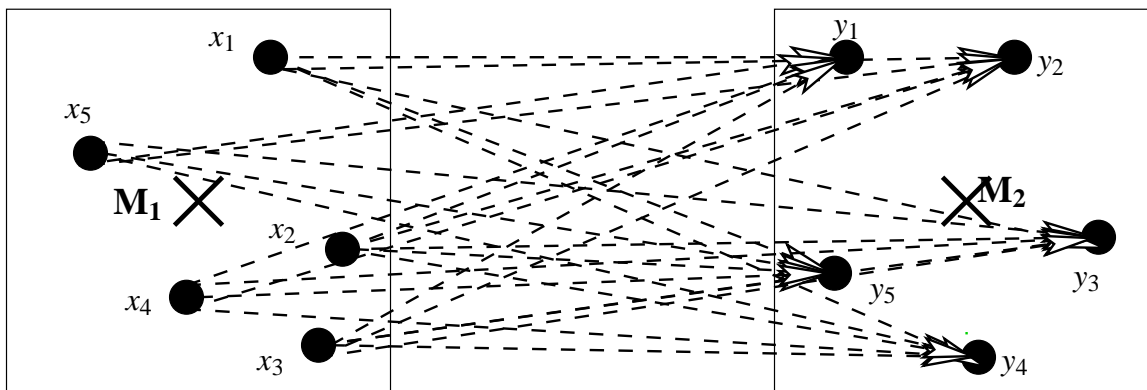


FIG. F.1 – Traitement sans la méthode multipôle

Le nombre d'interactions à considérer dans ce cas est de 25.

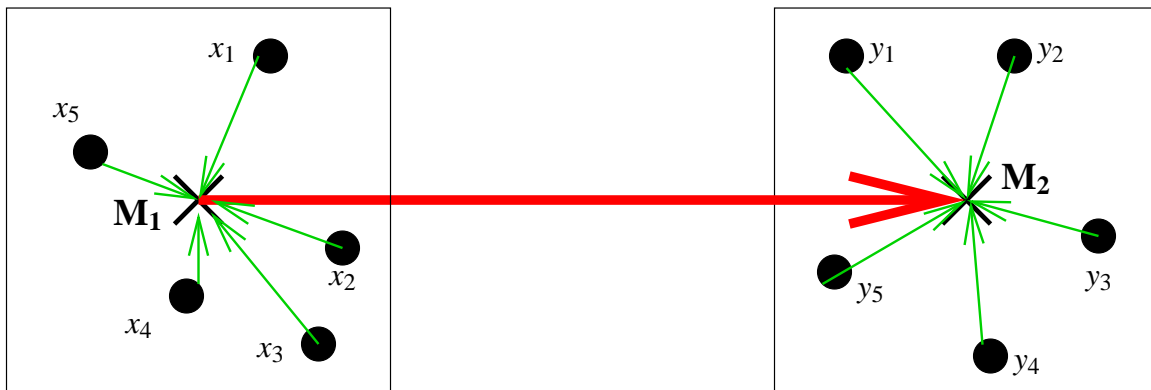


FIG. F.2 – Traitement avec la méthode multipôle

En utilisant la méthode multipôle, seulement 11 calculs doivent être réalisés. Cette méthode est par conséquent beaucoup plus performante.

On voit cependant apparaître deux difficultés :

- d’une part l’intégrale sur  $S^2$  dans (F.3.3) devra être discrétisée,
- d’autre part le nombre de termes de la somme (F.3.4) va devoir être fixé.

Remarque : La décomposition du noyau de Green ne s’applique que pour deux points “éloignés”. Les interactions proches seront alors calculées comme avant. Pour définir de manière opérationnelle cette notion d’éloignement, on va procéder à un découpage du domaine.

## F.4 Découpage en domaine

On va procéder au découpage de la surface  $\Gamma$  de l’objet traité en sous-domaines de taille homogène.

Pour cela, nous allons choisir une méthode à la fois simple et systématique. On conçoit une grille tridimensionnelle cubique de pas “a” englobant  $\Omega_{int}$ . Chaque intersection non-vide d’un cube de la grille et de la surface  $\Gamma$  constitue un sous-domaine de notre découpage.

## F.5 Le modèle hiérarchique

On peut alors construire un modèle hiérarchique. Néanmoins, pour plus de détails, nous renverrons le lecteur à la thèse de Guillaume Sylvand ([9]).

## Annexe G

# Le maillage de l'avion

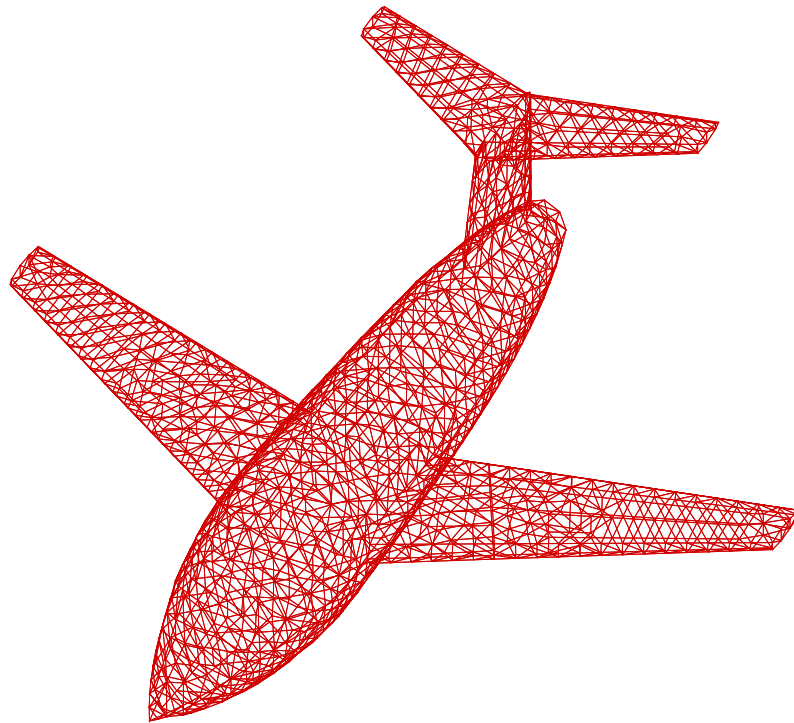


FIG. G.1 – Maillage d'un avion

# Résumé

Ce stage se positionne dans le cadre des problèmes de diffraction d'ondes en régime harmonique. Ces problèmes sont rencontrés dans les applications de furtivité radar ou de rayonnement d'antenne par exemple.

Une des techniques la plus utilisée dans le monde industriel est la technique des équations intégrales. La condition à la limite posée sur l'obstacle intervient de manière explicite dans ces méthodes. Le but de ce stage est de traiter des conditions d'impédance comme la condition de Leontovitch. Cette dernière modélise par exemple un obstacle parfaitement conducteur recouvert d'une fine couche de diélectrique en reliant explicitement le champ électrique tangent au champ magnétique.

Il existe, au CERFACS, depuis déjà de nombreuses années une méthode prenant en compte ces conditions. J'ai entrepris d'introduire une autre formulation dans le code du CERFACS. En m'inspirant des travaux de Bachelot, Gay et Lange, j'ai réalisé une étude théorique de cette formulation. J'ai proposé aussi une méthode originale permettant d'introduire cette formulation dans un code multipôle. Enfin, une implémentation numérique a été réalisée et des résultats numériques satisfaisants ont été obtenus. Pour conclure ce stage, nous avons traité le cas semi-industriel de l'avion.