

**Méthodes numériques pour les problèmes de  
diffraction d'ondes adaptées au couplage  
antenne-satellite**

**Fanny Darbas**

**CERFACS REPORT WN/EMC/04/85**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Méthode des équations intégrales</b>	<b>4</b>
2.1	Représentation intégrale . . . . .	4
2.2	Formulation variationnelle . . . . .	5
2.3	Discrétisation . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Méthode de décomposition de domaine pour le problème de diffraction par un conducteur parfait</b>	<b>7</b>
3.1	Position du problème . . . . .	7
3.2	Couplage Eléments Finis - Equations intégrales . . . . .	8
3.3	Couplage Equations intégrales - Equations intégrales . . . . .	10
3.4	Résolution du système par processus itératif . . . . .	12
3.4.1	Méthode de Jacobi . . . . .	12
3.4.2	Méthode GMRES . . . . .	13
3.4.3	Méthode GMRES réduit . . . . .	13
3.4.4	Validations numériques pour le disque . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Méthodes numériques pour le problème d'obstacle revêtu</b>	<b>17</b>
4.1	Résolution directe par Equations Intégrales . . . . .	17
4.2	Résolution directe par Eléments Finis-Equations Intégrales . . . . .	20
4.3	Résolution par une Méthode Jin-Liu . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Traitement des points de jonction pour la méthode de Jin-Liu</b>	<b>28</b>
5.1	Résolution directe . . . . .	29
5.2	Résolution par une méthode itérative . . . . .	35
5.2.1	Méthode de Gauss-Seidel . . . . .	35
5.2.2	GMRES couplé à Gauss-Seidel . . . . .	36
5.2.3	GMRES appliqué au système direct . . . . .	36
5.2.4	Validations numériques . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>38</b>
<b>7</b>	<b>Annexe : Présentation du Cerfacs</b>	<b>39</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Ce stage de quatrième année d'INSA a été effectué au sein de l'équipe EMC (Electromagnetism and Control) du CERFACS (Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique) sous la direction de Nathalie Bartoli.

Ce stage se place dans le cadre de l'étude des problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques. L'intérêt de l'étude de tels problèmes se trouve dans des applications comme la furtivité radar, ou le rayonnement d'antennes.

Plusieurs méthodes de calcul existent pour la résolution numérique de ce type de problèmes. Les méthodes les plus utilisées sont la méthode des Equations Intégrales (EI) et la méthode des Eléments Finis (EF). La première consiste à exprimer le champ électromagnétique en fonction des courants. La seconde méthode nécessite l'introduction d'une frontière artificielle pour limiter le domaine de calcul initialement infini : on parle de condition absorbante. Nous nous intéressons dans le cadre du stage à des méthodes itératives de décomposition de domaine (DDM) permettant de coupler ces deux méthodes et d'utiliser la condition absorbante adaptative proposée par Jin-Liu [1]. L'objectif est d'obtenir une formulation en deux dimensions d'espace (2D) pour coupler une antenne et un satellite de manière optimale. L'étude 2D permet de tester la faisabilité d'une telle formulation.

Dans une première partie, nous présentons succinctement la méthode des Equations Intégrales dans le cas de la diffraction d'une onde transverse électrique (TE) par un obstacle conducteur parfait.

Dans une seconde partie, nous détaillons la mise en place de la méthode itérative de décomposition de domaine toujours pour l'exemple de la diffraction d'une onde par un conducteur parfait.

Nous élargissons, dans une troisième partie, la méthode DDM au problème d'obstacle revêtu ; nous utilisons alors la méthode de Jin-Liu. Nous effectuons des validations numériques pour l'exemple de la couronne.

Enfin, dans une dernière partie, nous donnons les résultats obtenus par la méthode de Jin-Liu pour le couplage antenne-satellite ; dans ce cas, des problèmes se posent au niveau des points de jonction situés à l'intersection de la surface de Jin et la surface du satellite.

# Chapitre 2

## Méthode des équations intégrales

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la résolution du problème de la diffraction d'une onde TE par un conducteur parfait à l'aide de l'équation intégrale du champ électrique [2].

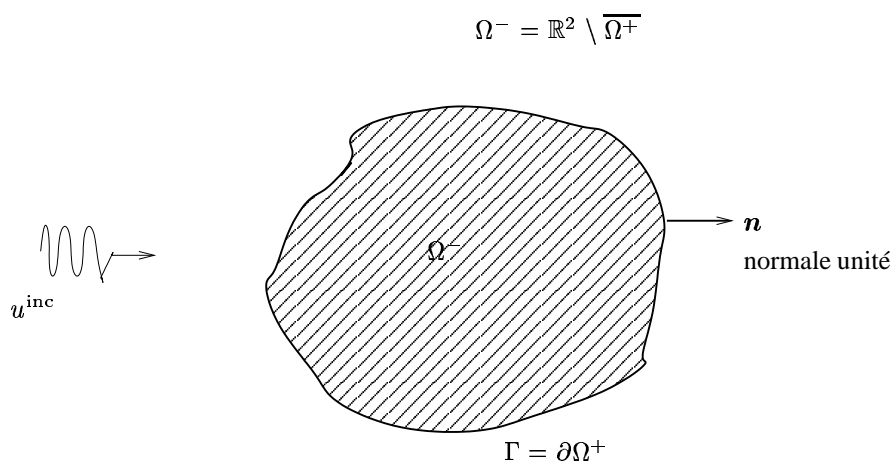


FIG. 2.1 – Objet métallique soumis à un champ incident

### 2.1 Représentation intégrale

Nous considérons un conducteur parfait attaqué par une onde plane en polarisation TE. Nous souhaitons résoudre les équations de Maxwell suivantes

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega^- \\ \partial_n u = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \text{Condition de radiation à l'infini} \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $u$  désigne le champ électrique et  $k$  le nombre d'onde dans le vide. La méthode des équations intégrales consiste à exprimer le champ  $u$  à partir des courants

sur la frontière  $\Gamma$  [2].

Le champ diffracté  $u$  admet la représentation intégrale suivante

$$u(x) = u_{inc}(x) + Vp(x) + N\lambda(x) \text{ pour } x \notin \Gamma \quad (2.2)$$

où  $p$  et  $\lambda$  sont les sauts des données de Cauchy à travers  $\Gamma$

$$p := [\partial_n u] := \partial_n u^+ - \partial_n u^- \quad , \quad \lambda := [u] := u^+ - u^- \quad (2.3)$$

et  $u_{inc}$  représente le champ incident et  $Vp$  est le potentiel de simple-couche créée par la densité  $p$

$$Vp(x) = \int_{\Gamma} G(x, y)p(y)d\Gamma(y) \text{ pour } x \notin \Gamma \quad (2.4)$$

et  $N\lambda$  est le potentiel de double-couche créée par la densité  $\lambda$

$$N\lambda(x) = - \int_{\Gamma} \partial_{\vec{n}_y} G(x, y)\lambda(y)d\Gamma(y) \text{ pour } x \notin \Gamma \quad (2.5)$$

où  $G$  est le noyau de Green donnant les solutions de l'équation d'Helmholtz vérifiant la condition de radiation de Sommerfeld.

Dans notre cas, nous avons

$$\begin{cases} \lambda = -u^- \\ u(x) = u^{inc}(x) + N\lambda(x) \text{ pour } x \notin \Gamma. \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous pouvons calculer à l'aide de cette représentation la trace de  $\partial_{\vec{n}}u$  sur  $\Gamma$ .

La trace seconde du potentiel de double-couche est donnée par

$$(\partial_{\vec{n}}N\lambda)(x) = -\partial_s(V(\partial_s\lambda))(x) - k^2V(\lambda\tau)(x).\tau(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.7)$$

Ainsi, nous pouvons écrire

$$\partial_{\vec{n}}u^-(x) = \partial_{\vec{n}}u^{inc}(x) - \partial_s(V(\partial_s\lambda))(x) - k^2V(\lambda\tau)(x).\tau(x) \text{ pour } x \in \Gamma. \quad (2.8)$$

Etablissons maintenant l'équation intégrale variationnelle du problème.

## 2.2 Formulation variationnelle

Soit  $\lambda'$  une fonction test associée à  $\lambda$ ; nous écrivons  $\int_{\Gamma} \partial_{\vec{n}}u.\lambda' d\Gamma = 0$ . Après une intégration par parties, nous obtenons

$$\int_{\Gamma \times \Gamma} G(x, y)(\partial_s\lambda(y)\partial_s\lambda'(x) - k^2\lambda(y)\tau(y).\lambda'\tau(x))d\Gamma(y)d\Gamma(x) = - \int_{\Gamma} \partial_{\vec{n}}u_{inc}(x)\lambda'(x)d\Gamma(x).$$

## 2.3 Discrétisation

Nous utilisons une résolution par éléments finis de degré 1. La quantité  $[\lambda]$  désigne le vecteur des composantes nodales de la variable  $\lambda$ . Nous obtenons alors le système suivant

$$[\lambda']^T D[\lambda] = -[\lambda']^T [\partial_n u^{inc}]. \quad (2.9)$$

Une des quantités importantes que doit déterminer le calcul est la Surface Equivalente Radar (SER) donnée par le calcul de l'amplitude de diffusion  $a(\theta)$ . La directivité de l'antenne en décibels est alors donnée par

$$\mathcal{D}(\theta) = 10 \log_{10} |2\pi |a(\theta)|^2|.$$

Nous représentons ici la SER obtenue dans le cas d'un obstacle circulaire en prenant un angle d'incidence  $\theta = 0$ .

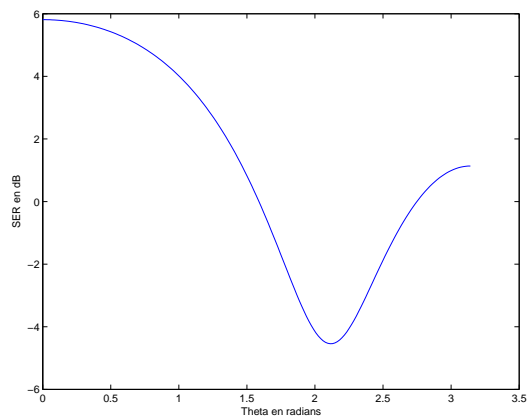


FIG. 2.2 – SER pour la diffraction par un obstacle conducteur parfait circulaire

Le principal inconvénient de la résolution par équations intégrales est de considérer des objets hétérogènes car, dans ce cas, toutes les surfaces de discontinuité doivent être maillées. Les méthodes volumiques sont beaucoup plus aptes à traiter de tels objets. L'antenne que nous souhaitons considérer devra être maillée en volumique, alors que le satellite (conducteur parfait de grande taille) sera maillé en surfacique. C'est dans ce but que nous utilisons une méthode appelée méthode de décomposition de domaine permettant de coupler une méthode Equations Intégrales et une méthode Eléments Finis. Nous présentons une telle méthode dans un second chapitre.

# Chapitre 3

## Méthode de décomposition de domaine pour le problème de diffraction par un conducteur parfait

### 3.1 Position du problème

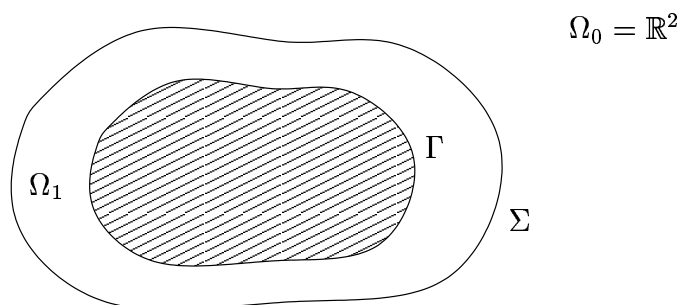


FIG. 3.1 – Diffraction par un conducteur parfait

Nous prenons comme problème modèle le problème précédent de la diffraction d'une onde TE par un obstacle conducteur parfait. Le domaine  $\Omega_1$  représente le domaine entre la courbe  $\Gamma$  et la courbe  $\Sigma$  ; tandis que  $\Omega_0$  représente  $\mathbb{R}^2$  tout entier. Nous désignons par  $u$  la solution du problème dans  $\Omega^-$  (cf Chapitre I).

Nous considérons les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} \Delta u_1 + k^2 u_1 = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \partial_n u_1 = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \Delta u_0 + k^2 u_0 = -T \text{ dans } \mathbb{R}^2 \\ \text{Condition de radiation à l'infini} \end{cases} \quad (3.2)$$

avec T distribution à support compact. Nous pouvons coupler ces deux problèmes par une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement. Nous sommes alors ramenés à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_1 + k^2 u_1 = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \partial_n u_1 = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \partial_n u_1 + \beta u_1 = \partial_n u_0 + \beta u_0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $u_0$  admet la représentation intégrale

$$u_0(x) = u_{inc}(x) + N(-u_{1|\Gamma})(x) \text{ pour } x \notin \Gamma. \quad (3.4)$$

Nous choisissons pour valeur du paramètre  $\beta : \beta = -ik$ . Différents couplages sont alors possibles pour résoudre ce problème de décomposition de domaine. Nous pouvons résoudre le problème (3.3) soit par une Méthode Eléments finis (EF) soit par une Méthode Equations intégrales (EI). Nous présentons les deux méthodes de couplage : le couplage EI-EI et le couplage EI-EF. Nous nous restreignons au cas d'un obstacle circulaire.

## 3.2 Couplage Eléments Finis - Equations intégrales

Ecrivons tout d'abord la formulation variationnelle associée au problème. Dans ce but, nous considérons  $u'_1$  une fonction test associée à la fonction inconnue  $u_1$ , et nous multiplions la première équation de (3.3) par  $u'_1$ . Nous avons alors

$$\int_{\Omega_1} \Delta u_1 u'_1 d\Omega_1 + \int_{\Omega_1} k^2 u_1 u'_1 d\Omega_1 = 0.$$

En utilisant la formule de Green et les conditions sur  $\Gamma$  et  $\Sigma$ , nous obtenons

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla u'_1 d\Omega_1 - \int_{\Omega_1} k^2 u_1 u'_1 d\Omega_1 + \int_{\Sigma} \beta u_1 u'_1 d\Sigma = \int_{\Sigma} (\partial_n u_0 + \beta u_0) u'_1 d\Sigma. \quad (3.5)$$

### Approximation par éléments finis et éléments de frontière

Nous utilisons un maillage  $T_{\Omega_1}$  en triangles qui induit un maillage  $T_{\Sigma}$  sur  $\Sigma$ . Nous approchons la fonction inconnue  $u_1$  et la fonction test  $u'_1$  par une méthode d'éléments finis  $\mathbb{P}_1$ -continue sur le maillage  $T_{\Omega_1}$  pour laquelle les fonctions sont complètement caractérisées par leurs valeurs aux sommets ; nous prenons  $u_1$  et  $u'_1 \in X_{\Omega_1}$  avec

$$X_{\Omega_1} = \{v \in \mathbb{C}^0(\Omega_1) : v|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in T_{\Omega_1}\}.$$

Nous notons  $[u_1]$  et  $[u'_1]$  les vecteurs des composantes nodales de  $u_1$  et  $u'_1$ .

### Matrices éléments finis

Nous définissons la matrice rigidité K

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla u'_1 d\Omega_1 = [u'_1]^T K [u_1] \quad (3.6)$$

et la matrice masse  $M$

$$\int_{\Omega_1} k^2 u_1 u_1' d\Omega_1 = [u_1']^T M [u_1]. \quad (3.7)$$

**Remarque 3.2.1** *Le maillage est effectué à l'aide de la PdetoolBox de Matlab ; les matrices  $K$  et  $M$  sont ainsi calculées par la fonction 'assem'.*

### Matrices éléments de frontière

Nous avons vu que le maillage  $T_{\Omega_1}$  induit un maillage  $T_{\Sigma}$  sur  $\Sigma$ . Nous définissons la matrice masse  $M_1$

$$\int_{\Sigma} \beta u_1 u_1' d\Sigma = [u_1']^T M_1 [u_1] \quad (3.8)$$

ainsi que le second membre  $B$

$$\int_{\Sigma} (\partial_n u_0 + \beta u_0) u_1' d\Sigma = [u_1']^T B. \quad (3.9)$$

Nous décomposons  $[u_1]$  de la manière suivante

$$[u_1] = [u_{1|\Omega_1}, u_{1|\Gamma}, u_{1|\Sigma}]^T.$$

Le système linéaire à résoudre est alors le suivant

$$\begin{bmatrix} A_{\Omega_1, \Omega_1} & A_{\Omega_1, \Gamma} & A_{\Omega_1, \Sigma} \\ A_{\Gamma, \Omega_1} & A_{\Gamma, \Gamma} & 0 \\ A_{\Sigma, \Omega_1} & 0 & A_{\Sigma, \Sigma} + \beta M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_{1|\Omega_1}] \\ [u_{1|\Gamma}] \\ [u_{1|\Sigma}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix}$$

où la matrice  $A$  est donnée par :  $A = K - k^2 M$ .

Détaillons maintenant le calcul du second membre  $g = \int_{\Sigma} (\partial_n u_0 + \beta u_0) u_1' d\Sigma$ . Nous avons

$$u_0(x) = u^{inc}(x) + N(-u_{1|\Gamma})(x) \text{ pour } x \notin \Gamma.$$

Par les propriétés de saut des potentiels de simple et double couche, nous pouvons calculer la trace de  $u_0$  et  $\partial_n u_0$  sur  $\Sigma$

$$u_0(x) = u^{inc}(x) + \int_{\Gamma} \partial_{n_y} G(x, y) u_{1|\Gamma}(y) d\Gamma(y) \text{ pour } x \in \Sigma \quad (3.10)$$

$$\partial_n u_0(x) = \partial_n u^{inc}(x) + \int_{\Gamma} \partial_{n_x} \partial_{n_y} G(x, y) u_{1|\Gamma}(y) d\Gamma(y) \text{ pour } x \in \Sigma. \quad (3.11)$$

Ainsi, nous obtenons

$$g = \int_{\Sigma} \partial_n u^{inc}(x) u_1'(x) d\Sigma(x) + \int_{\Sigma \times \Gamma} \partial_{n_x} \partial_{n_y} G(x, y) u_{1|\Gamma}(y) u_1'_{|\Sigma}(x) d\Sigma(x) d\Gamma(y) \quad (3.12)$$

$$+ \beta \int_{\Sigma} u^{inc}(x) u_1'(x) d\Sigma(x) + \beta \int_{\Sigma \times \Gamma} \partial_{n_y} G(x, y) u_{1|\Gamma}(y) u_1'_{|\Sigma}(x) d\Sigma(x) d\Gamma(y) \quad (3.13)$$

que nous pouvons écrire sous forme matricielle

$$g = [u_1'_{|\Sigma}]^T [\partial_n u^{inc}_{|\Sigma}] + \beta [u_1'_{|\Sigma}]^T [u^{inc}_{|\Sigma}] - [u_1'_{|\Sigma}]^T D_{\Sigma, \Gamma} [u_{1|\Gamma}] - \beta [u_1'_{|\Sigma}]^T N_{\Sigma, \Gamma} [u_{1|\Gamma}]. \quad (3.14)$$

**Remarque 3.2.2** Les vecteurs et matrices permettant de calculer  $g$  sont données par des fonctions de la librairie `ie2m` du `Cerfacs`.

**Remarque 3.2.3** La matrice du système linéaire précédent peut s'écrire sous la forme  $(A+F)$  où la matrice  $F$  est une matrice qui ne contient que deux blocs pleins ; ce sont les termes relatifs aux potentiels de simple et double couche issus du second membre  $g$ .

### 3.3 Couplage Equations intégrales - Equations intégrales

Nous résolvons maintenant le problème (3.3) par une méthode Equations Intégrales. Le champ  $u_1$  admet la représentation intégrale suivante étant donnée l'orientation des normales sur  $\Gamma$  et  $\Sigma$

$$u_1(x) = N(-u_{1|\Gamma})(x) + N(u_{1|\Sigma})(x) + V(\partial_n u_{1|\Sigma})(x) \text{ pour } x \notin \Gamma \cup \Sigma. \quad (3.15)$$

Les inconnues du problème sont alors

$$\begin{cases} \lambda_\Gamma = -u_{1|\Gamma} \\ \lambda_\Sigma = u_{1|\Sigma} \\ p_\Sigma = \partial_n u_{1|\Sigma}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Nous cherchons maintenant à établir l'équation intégrale à résoudre. L'idée est d'utiliser le Principe des réactions de Rumsey [1]. L'équation variationnelle s'obtient en calculant  $\int_{\partial\Omega_1=\Gamma\cup\Sigma} (\partial_n u_1 \lambda' - u_1 p') d(\partial\Omega_1)$  où  $\lambda'$  et  $p'$  sont des fonctions test vérifiant

$$\begin{cases} p' = 0 \text{ sur } \Gamma \\ p' + \beta \lambda' = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (3.17)$$

Puisque  $\partial_n u_1 = 0$  sur  $\Gamma$  et  $p' = 0$  sur  $\Gamma$ , nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_1} (\partial_n u_1 \lambda' - u_1 p') d(\partial\Omega_1) &= \int_{\Sigma} (\partial_n u_1 \lambda'_\Sigma - u_1 p'_\Sigma) d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} (\partial_n u_1 + \beta u_1) \lambda'_\Sigma d\Sigma = \int_{\Sigma} g \lambda'_\Sigma d\Sigma. \end{aligned}$$

L'équation intégrale devient alors

$$\int_{\partial\Omega_1} (\partial_n u_1 \lambda'_\Sigma - u_1 p'_\Sigma) d(\partial\Omega_1) = \int_{\Sigma} g \lambda'_\Sigma d\Sigma.$$

Nous pouvons réécrire l'équation précédente en utilisant la représentation intégrale de  $u_1$ . Dans ce but, calculons la trace de  $u_1$  et  $\partial_n u_1$  sur  $\Gamma$  et  $\Sigma$ . Nous utilisons pour cela les propriétés des potentiels de simple et double couche.

**Trace de  $u_1$  sur  $\Gamma$**

$$u_1(x) = - \int_{\Gamma} \partial_{n_y} G \lambda_\Gamma d\Gamma(x) + \frac{1}{2} \lambda_\Gamma(x) - \int_{\Sigma} \partial_{n_y} G \lambda_\Sigma d\Sigma(x) + \int_{\Sigma} G p_\Sigma d\Sigma(x) \text{ pour } x \in \Gamma. \quad (3.18)$$

**Trace de  $\partial_n u_1$  sur  $\Gamma$** 

$$\partial_n u_1(x) = - \int_{\Gamma} \partial_{n_x} \partial_{n_y} G \lambda_{\Gamma} d\Gamma(x) - \int_{\Sigma} \partial_{n_x} \partial_{n_y} G \lambda_{\Sigma} d\Sigma(x) + \int_{\Sigma} \partial_{n_x} G p_{\Sigma} d\Sigma(x) \text{ pour } x \in \Gamma. \quad (3.19)$$

**Trace de  $u_1$  sur  $\Sigma$** 

$$u_1(x) = - \int_{\Gamma} \partial_{n_y} G \lambda_{\Gamma} d\Gamma(x) + \frac{1}{2} \lambda_{\Sigma}(x) - \int_{\Sigma} \partial_{n_y} G \lambda_{\Sigma} d\Sigma(x) + \int_{\Sigma} G p_{\Sigma} d\Sigma(x) \text{ pour } x \in \Sigma. \quad (3.20)$$

**Trace de  $\partial_n u_1$  sur  $\Sigma$** 

$$\partial_n u_1(x) = - \int_{\Gamma} \partial_{n_x} \partial_{n_y} G \lambda_{\Gamma} d\Gamma(x) - \int_{\Sigma} \partial_{n_x} \partial_{n_y} G \lambda_{\Sigma} d\Sigma(x) + \frac{1}{2} p_{\Sigma}(x) + \int_{\Sigma} \partial_{n_x} G p_{\Sigma} d\Sigma(x); x \in \Sigma. \quad (3.21)$$

Nous notons

- $n_x$  la normale unitaire extérieure à la surface des fonctions test
- $n_y$  la normale unitaire extérieure à la surface des fonctions inconnues.

En remplaçant dans l'équation (3.16), nous obtenons

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma \times \Gamma} \partial_{n_x} \partial_{n_y} G \lambda_{\Gamma} \lambda'_{\Gamma} d\Gamma d\Gamma - \int_{\Gamma \times \Sigma} \partial_{n_x} \partial_{n_y} G \lambda_{\Sigma} \lambda'_{\Gamma} d\Gamma d\Sigma + \int_{\Gamma \times \Sigma} \partial_{n_x} G p_{\Sigma} \lambda'_{\Gamma} d\Gamma d\Sigma \\ & - \int_{\Sigma \times \Gamma} \partial_{n_x} \partial_{n_y} G \lambda_{\Sigma} \lambda'_{\Sigma} d\Sigma d\Gamma - \int_{\Sigma \times \Sigma} \partial_{n_x} \partial_{n_y} G \lambda_{\Sigma} \lambda'_{\Sigma} d\Sigma d\Sigma + \int_{\Sigma \times \Sigma} \partial_{n_x} G p_{\Sigma} \lambda'_{\Sigma} d\Sigma d\Sigma \\ & \quad + \int_{\Sigma \times \Gamma} \partial_{n_y} G \lambda_{\Gamma} p'_{\Sigma} d\Sigma d\Gamma + \int_{\Sigma \times \Sigma} \partial_{n_y} G \lambda_{\Sigma} p'_{\Sigma} d\Sigma d\Sigma + \int_{\Sigma \times \Sigma} G p_{\Sigma} p'_{\Sigma} d\Sigma d\Sigma \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} p_{\Sigma} \lambda'_{\Sigma} d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \lambda_{\Sigma} p'_{\Sigma} d\Sigma = \int_{\Sigma} g \lambda'_{\Sigma} d\Sigma. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété sur les fonctions test, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} p_{\Sigma} \lambda'_{\Sigma} d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \lambda_{\Sigma} p'_{\Sigma} d\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (p_{\Sigma} + \beta \lambda_{\Sigma}) \lambda'_{\Sigma} d\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} g \lambda'_{\Sigma} d\Sigma;$$

et le second membre de l'expression précédente devient alors  $\frac{1}{2} \int_{\Sigma} g \lambda'_{\Sigma} d\Sigma$ .

**Discrétisation**

Nous discrétisons les fonction inconnues  $\lambda_{\Gamma}$  et  $\lambda_{\Sigma}$  et les fonctions test  $\lambda'_{\Gamma}$  et  $\lambda'_{\Sigma}$  par des éléments  $\mathbb{P}_1$ ;  $p_{\Sigma}$  et  $p'_{\Sigma}$  sont eux discrétisés par des éléments  $\mathbb{P}_0$ .

**Second membre**

Le second membre se traite comme pour le couplage EI-EF; cependant nous devons ici utiliser la relation  $p'_{\Sigma} + \beta \lambda'_{\Sigma} = 0$ . Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} g \lambda'_{\Sigma} d\Sigma &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \partial_n u_{inc} \lambda'_{\Sigma} d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma \times \Sigma} \partial_{n_x} \partial_{n_y} G \lambda_{\Gamma} \lambda'_{\Sigma} d\Gamma d\Sigma \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} u_{inc} p'_{\Sigma} d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma \times \Sigma} \partial_{n_y} G \lambda_{\Gamma} p'_{\Sigma} d\Gamma d\Sigma. \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement le système linéaire suivant

$$\begin{bmatrix} D_{\Gamma,\Gamma} & D_{\Gamma,\Sigma} & (-N_{\Sigma,\Gamma})^T \\ D_{\Sigma,\Gamma} & D_{\Sigma,\Sigma} & (-N_{\Sigma,\Sigma})^T \\ -N_{\Sigma,\Gamma} & -N_{\Sigma,\Sigma} & -S_{\Sigma,\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\Gamma \\ \lambda_\Sigma \\ p_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(D_{\Gamma,\Sigma} - [\partial_n u_{inc}]_\Sigma) \\ \frac{1}{2}([u_{inc}]_\Sigma - S_{\Gamma,\Sigma}) \end{bmatrix}.$$

**Remarque 3.3.1** De la même manière que pour le couplage EI-EF, nous écrivons la matrice du système linéaire sous la forme  $(A+F)$ .

**Remarque 3.3.2** Nous pouvons obtenir l'équation variationnelle du problème par une autre méthode. Il suffit d'écrire les deux équations variationnelles relatives aux équations  $\partial_n u_1 = 0$  sur  $\Gamma$  et  $\partial_n u_1 + \beta u_1 = g$  sur  $\Sigma$  et d'utiliser la relation  $p' + \beta \lambda' = 0$ .

Afin de résoudre le système linéaire du couplage EI-EI et celui du couplage EI-EF, nous mettons en place un processus itératif.

Initialisation  $u_{1|\Gamma}^{(0)} = 0$ ,  $u_{1|\Sigma}^{(0)} = 0$ ,  $u_{1|\Omega_1}^{(0)} = 0$ .

A l'itération  $n$  nous résolvons

$$\begin{cases} \Delta u_1^{(n+1)} + k^2 u_1^{(n+1)} = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \partial_n u_1^{(n+1)} = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \partial_n u_1^{(n+1)} + \beta u_1^{(n+1)} = \partial_n u_0^{(n)} + \beta u_0^{(n)} \text{ sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.22)$$

avec

$$u_0^{(n+1)}(x) = u^{inc}(x) + N(-u_{1|\Gamma}^{(n)})(x) \text{ pour } x \notin \Gamma. \quad (3.23)$$

## 3.4 Résolution du système par processus itératif

Nous utilisons deux méthodes itératives différentes : la méthode de Jacobi et la méthode GMRES. Nous présentons ici le principe de chacune de ces méthodes.

### 3.4.1 Méthode de Jacobi

Chacun des deux systèmes linéaires présentés ci-dessus s'écrit sous la forme itérative

$$AU^{(n+1)} = B - FU^{(n)}.$$

En introduisant le paramètre de relaxation  $r$ , nous pouvons écrire

$$\begin{cases} AU^{(n+\frac{1}{2})} = B - FU^{(n)} \\ U^{(n+1)} = rU^{(n+\frac{1}{2})} + (1-r)U^{(n)}. \end{cases} \quad (3.24)$$

De manière générale, nous fixons  $r = 1$ . Le critère d'arrêt choisi est la norme du résidu

$$\frac{\|AU^{(n)} - B\|}{\|B\|}.$$

### 3.4.2 Méthode GMRES

Cette méthode s'applique à résoudre le problème de minimisation

$$\|r_k\| = \min_{x \in x_0 + K_k(r_0, A)} \|b - Ax\|$$

pour des matrices non symétriques.

Pour cela, elle conserve tous les vecteurs qui ont été formés pour construire la base de Krylov. Ainsi, à l'itération  $k$ , il faut stocker  $k$  vecteurs de longueur  $N$  ; la place mémoire devient donc très vite importante. C'est la raison pour laquelle on définit un paramètre appelé 'restart' noté  $m$  qui fixe le nombre de vecteurs à considérer dans la base de Krylov. L'algorithme est redémarré toutes les  $m$  itérations. Plus  $m$  est grand, meilleure est la convergence ; mais l'occupation mémoire et le temps de calcul moyen par itération croissent linéairement avec  $m$ .

**Remarque 3.4.1** *Dans notre cas, le nombre d'itérations étant faible, nous utilisons une méthode GMRES sans restart ; nous utilisons la fonction gmres.m de Matlab.*

La matrice  $(A+F)$  étant mal conditionnée, nous réécrivons le système linéaire de la manière suivante

$$(I + A^{-1}F)U = A^{-1}B$$

et nous appliquons la méthode GMRES à la matrice  $A_{gmres} = I + A^{-1}F$  et au second membre  $B_{gmres} = A^{-1}B$ . Pour le calcul de  $A^{-1}$ , nous utilisons une décomposition LU de la matrice  $A$ .

La méthode GMRES peut également s'écrire à l'aide de projections ; ce qui permet de réduire la taille du système à résoudre [3].

### 3.4.3 Méthode GMRES réduit

Nous pouvons réécrire le système

$$(I + T)U = B' \tag{3.25}$$

avec  $T = A^{-1}F$  et  $B' = A^{-1}B$  à l'aide de projections. Nous définissons les opérateurs suivants

- $\Pi_{|\Gamma}$  l'opérateur de projection sur  $\Gamma$  tel que

$$\Pi_{|\Gamma}U = U_{|\Gamma} = [u_{\Gamma}]^T$$

- $P$  le prolongement de  $X_{|\Gamma}$  tel que

$$PU_{|\Gamma} = [0, u_{\Gamma}, 0]^T.$$

avec  $U = [u_{\Omega_1}, u_{\Gamma}, u_{\Sigma}]$ . A partir de ces définitions et du système (3.23), nous obtenons

$$(I + \Pi_{|\Gamma} TP)u_{\Gamma} = \Pi_{|\Gamma} B'.$$

Nous résolvons ce système à l'aide d'une méthode GMRES et nous revenons au vecteur complet avec la résolution du système

$$AU = B - FPu_{\Gamma}.$$

### 3.4.4 Validations numériques pour le disque

Pour valider la méthode et étudier la convergence des deux algorithmes, nous considérons l'exemple de la couronne attaquée par une onde plane (résolu au Chapitre 1). L'objet métallique est un disque de rayon  $R$  et la surface  $\Sigma$  est un cercle placé à une distance  $h$  du métal.

Nous considérons le cas de la couronne avec  $R = 1$  et  $k = 2$ . La surface  $\Sigma$  est placée à une distance de  $\frac{\lambda}{10} = 0,3$ . Le pas du maillage est fixé à  $\frac{\lambda}{20}$ .

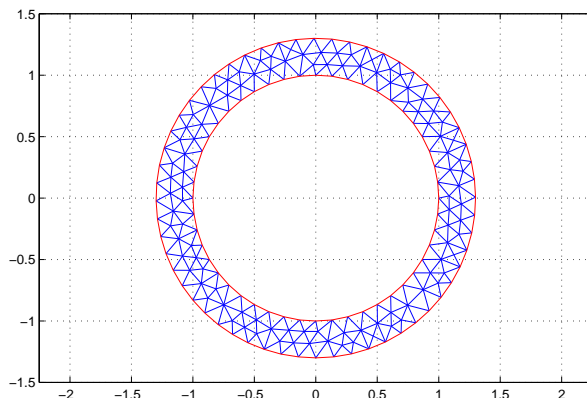


FIG. 3.2 – Maillage de la couronne

Nous comparons la SER exacte ( $ser^*$ ) à la SER approchée ( $ser$ ). Les erreurs relatives sont calculées suivant

$$erreur = \frac{\|ser - ser^*\|}{\|ser^*\|}.$$

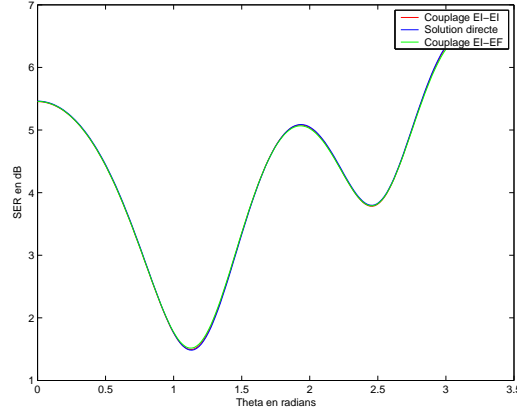


FIG. 3.3 – Comparaison de la ser exacte et la ser obtenue avec GMRES

Résidu = $10^{-6}$		
	Itérations	Erreur sur la SER
Jacobi EI-EI	3	0,57%
GMRES EI-EI	3	0,57%
Jacobi EI-EF	9	0,57%
GMRES EI-EF	6	0,57%
GMRES réduit EI-EF	6	0,57%

TAB. 3.1 – Comparaison des algorithmes itératifs pour les deux couplages dans le cas d'une couronne.

Le couplage EI-EI et le couplage EI-EF donnent les mêmes résultats au niveau de la précision sur la SER. Par contre, il semble que les méthodes itératives convergent plus rapidement pour le couplage EI-EI. Essayons d'accélérer la convergence de ces méthodes pour le couplage EI-EF.

### Accélération de la convergence pour le couplage EI-EF

Nous modifions la condition aux limites sur  $\Sigma$  pour le problème du couplage EI-EF ; le but étant d'obtenir une meilleure convergence pour le processus itératif mis en place. Plus précisément, nous rajoutons à la condition aux limites sur  $\Sigma$  la condition OSRC (On-Surface Radiation Condition) suivante

$$\partial_n u_1 + \beta u_1 + \partial_s a(s) \partial_s u_1 - b(s) u_1 = \partial_n u_0 + \beta u_0 + \partial_s a(s) \partial_s u_0 - b(s) u_0 \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\text{avec } a(s) = \frac{1}{2ik(1 + \frac{i\kappa(s)}{k})} \quad \text{et} \quad b(s) = -\frac{\kappa(s)}{2} + \frac{i\kappa(s)^2}{8k(1 + \frac{i\kappa(s)}{k})}$$

où  $\kappa(s)$  représente la courbure.

Nous prenons pour valider la nouvelle condition un exemple de plus grande taille. Nous considérons toujours le cas de la couronne mais cette fois-ci avec  $R = 1 = 5\lambda$ . Le pas de maillage est fixé à  $\frac{\lambda}{20} = 0,01$ , et la frontière  $\Sigma$  est placée à une distance  $h = \frac{\lambda}{2}$ .

Nous obtenons les résultats suivants

Résidu = $10^{-6}$				
	Jacobi	Jacobi OSRC	GMRES red.	GMRES red. OSRC
Itérations	18	7	10	6
$r$ (Jacobi) ou restart (GMRES)	1	1	0	0
erreur sur SER	0,66%	0,85%	0,66%	0,85%

TAB. 3.2 – Comparaison des algorithmes avec ou sans OSRC pour  $h = \frac{\lambda}{2}$ .

Nous remarquons que l'ajout de la condition OSRC sur  $\Sigma$  diminue le nombre d'itérations des deux méthodes itératives. Regardons maintenant l'influence du paramètre  $h$ . Nous décidons de rapprocher la frontière  $\Sigma$  : nous effectuons les calculs avec  $h = \frac{\lambda}{5}$  et  $h = \frac{\lambda}{10}$ .

Résidu = $10^{-6}$				
	Jacobi	Jacobi OSRC	GMRES red.	GMRES red. OSRC
Itérations	15	9	10	8
$r$ (Jacobi) ou restart (GMRES)	1	1	0	0
erreur sur SER	0,52%	0,62%	0,52%	0,61%

TAB. 3.3 – Comparaison des algorithmes itératifs pour  $h = \frac{\lambda}{5}$ .

Résidu = $10^{-6}$				
	Jacobi	Jacobi OSRC	GMRES red.	GMRES red. OSRC
Itérations	15	15	11	11
$r$ (Jacobi) ou restart (GMRES)	1	1	0	0
erreur sur SER	0,31%	0,46%	0,31%	0,46%

TAB. 3.4 – Comparaison des algorithmes itératifs pour  $h = \frac{\lambda}{10}$ .

Nous observons que plus la condition absorbante est loin de l'obstacle qui diffracte, meilleure est la convergence, mais le domaine de calcul augmente. Cependant pour  $h$  très faible, la condition OSRC n'accélère plus la convergence.

Nous avons mis en place dans ce chapitre une méthode de décomposition de domaine pour le problème de la diffraction d'une onde TE par un obstacle conducteur parfait. Nous souhaitons maintenant résoudre numériquement le problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par un conducteur recouvert d'une couche mince de diélectrique.

# Chapitre 4

## Méthodes numériques pour le problème d'obstacle revêtu

Nous nous intéressons dans ce troisième chapitre à la résolution du problème de diffraction d'une onde par un conducteur recouvert d'une mince couche de diélectrique (peinture, vernis). Nous présentons dans un premier temps une résolution directe du problème par une méthode Equations Intégrales et par une méthode Eléments Finis. Dans un second temps, nous résolvons le problème par une méthode de Jin-Liu qui propose une nouvelle écriture de la condition absorbante.

### 4.1 Résolution directe par Equations Intégrales

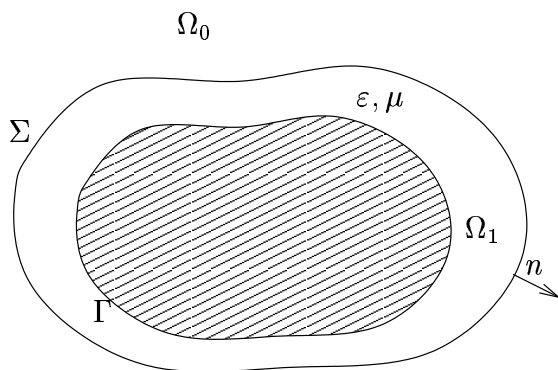


FIG. 4.1 – Diffraction d'un conducteur parfait par une couche mince de diélectrique

Le domaine  $\Omega_1$  caractérise la couche mince de diélectrique et le milieu extérieur de propagation est représenté par  $\Omega_0$ . Le problème à résoudre est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{trouver le champ total } u_{1,0} \text{ dans } H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega^0}) \cap H^1(\Omega^1) \text{ tel que} \\
\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^0) \\
\Delta u_1 + k^2 n^2 u_1 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega^1) \\
\bullet \text{ avec les conditions de transmission sur } \Sigma \\
\partial_{\vec{n}} u_0 = \varepsilon^{-1} \partial_{\vec{n}} u_1 \quad \text{dans } H^{-1/2}(\Sigma) \\
u_0 = u_1 \quad \text{dans } H^{1/2}(\Sigma) \\
\bullet \text{ avec la condition de conducteur parfait sur } \Gamma \\
\partial_{\vec{n}} u_1 = 0 \quad \text{dans } H^{-1/2}(\Gamma) \\
\bullet \text{ avec la condition de radiation à l'infini} \\
\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{1/2} (\partial_r (u_0 - u_{\text{inc}}) - ik(u_0 - u_{\text{inc}})) = 0.
\end{array} \right. \quad (4.1)$$

Nous voulons maintenant établir l'équation variationnelle intégrale.

### Equation variationnelle intégrale

Le champ magnétique  $u_{1,0}$  admet la représentation intégrale

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= u_{\text{inc}}(x) + \int_{\Sigma} G_0(x, y) \partial_{n_y} v_0(y) d\Sigma(y) - \int_{\Sigma} \partial_{n_y} G_0(x, y) v_0(y) d\Sigma(y) \\
u_1(x) &= \int_{\Sigma \cup \Gamma} G_1(x, y) \partial_{n_y} v_1(y) d\Sigma(y) - \int_{\Sigma \cup \Gamma} \partial_{n_y} G_1(x, y) v_1(y) d\Sigma(y)
\end{aligned} \quad (4.2)$$

où  $n^0$  (respectivement  $n^1$ ) désigne la normale extérieure à  $\Omega_0$  (respectivement  $\Omega_1$ ). Nous avons  $n^1 = n$  et  $n^0 = -n$ .

Les inconnues du problème sont donc

$$u_1, \quad u_0, \quad \partial_n u_1, \quad \partial_n u_0, \quad \text{sur } \Sigma \cup \Gamma.$$

Nous notons

$$\begin{cases} \lambda_{0,1} = u_{0,1} \\ p_{0,1} = \partial_{n^0,1} u_{0,1}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Ces quantités vérifient

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_0 = 0 \text{ sur } \Gamma \\
\lambda_1 &= \lambda_0 \text{ sur } \Sigma \\
\varepsilon^{-1} p_1 + p_0 &= 0 \text{ sur } \Sigma.
\end{aligned} \quad (4.4)$$

Pour obtenir l'équation intégrale variationnelle, il suffit comme au chapitre précédent d'utiliser le Principe des réactions de Rumsey. Il s'agit de former la quantité

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma} (\partial_{n^0} u_0 \lambda_0' - u_0 p_0') d\Sigma + \varepsilon^{-1} \int_{\Sigma} (\partial_{n^1} u_1 \lambda_1' - u_1 p_1') d\Sigma \\
&\quad + \varepsilon^{-1} \int_{\Gamma} (\partial_{n^1} u_1 \lambda_1' - u_1 p_1') d\Sigma
\end{aligned} \quad (4.5)$$

avec

$$\begin{aligned} p'_{0,1} &= 0 \text{ sur } \Gamma \\ \lambda'_{0,1} &= \lambda'_0 \text{ sur } \Sigma \\ \varepsilon^{-1} p'_1 + p'_0 &= 0 \text{ sur } \Sigma. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Après quelques calculs [1], nous obtenons la formulation variationnelle suivante

$$a^0_{\Sigma \times \Sigma}(\{p, \lambda\}, \{p', \lambda'\}) + a^1_{(\Sigma \cup \Gamma)^2}(\{p, \lambda\}, \{p', \lambda'\}) = b^0_{\Sigma}(\{u_{\text{inc}}\}, \{p', \lambda'\}) \quad (4.7)$$

avec les deux formes bilinéaires  $a^0_{\Sigma \times \Sigma}$  et  $a^1_{(\Sigma \cup \Gamma)^2}$  qui sont données par

$$\begin{aligned} a^0_{\Sigma \times \Sigma}(\{p, \lambda\}, \{p', \lambda'\}) &= \\ &- \int_{\Sigma \times \Sigma} \left( G_0(x, y) \partial_s \lambda(y) \partial_s \lambda'(x) - k^2 \lambda(y) \vec{\tau}_y \cdot \lambda'(x) \vec{\tau}_x \right) d\Sigma(y) d\Sigma(x) \\ &+ \int_{\Sigma \times \Sigma} \partial_{\vec{n}_x} G_0(x, y) p(y) \lambda'(x) d\Sigma(y) d\Sigma(x) \\ &+ \int_{\Sigma \times \Sigma} \partial_{\vec{n}_y} G_0(x, y) \lambda(y) p'(x) d\Sigma(y) d\Sigma(x) \\ &- \int_{\Sigma \times \Sigma} G_0(x, y) p(y) p'(x) d\Sigma(y) d\Sigma(x) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} a^1_{(\Sigma \cup \Sigma_h)^2}(\{p, \lambda\}, \{p', \lambda'\}) &= \\ &- \frac{1}{\varepsilon} \int_{(\Sigma \cup \Gamma)^2} \left( G_1(x, y) \lambda(y) \lambda'(x) - k^2 \lambda(y) \vec{\tau}_y \cdot \lambda'(x) \vec{\tau}_x \right) d\Sigma(y) d\Gamma(x) \\ &+ \int_{(\Sigma \cup \Gamma)^2} \partial_{\vec{n}_x} G_1(x, y) p(y) \lambda'(x) d\Gamma(y) d\Gamma(x) \\ &+ \int_{(\Gamma \cup \Sigma_h)^2} \partial_{\vec{n}_y} G_1(x, y) \lambda(y) p'(x) d\Sigma(y) d\Gamma(x) \\ &- \varepsilon \int_{(\Sigma \cup \Gamma)^2} G_1(x, y) p(y) p'(x) d\Sigma(y) d\Gamma(x). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le second membre est égal à

$$b^0_{\Sigma}(\{u_{\text{inc}}\}, \{p', \lambda'\}) = - \int_{\Sigma} \left( \partial_{n_x} u_{\text{inc}} \lambda'_0 - u_{\text{inc}} p'_0 \right) d\Sigma. \quad (4.10)$$

Après discrétisation par éléments finis nous aboutissons au système linéaire suivant

$$\begin{bmatrix} D^0_{\Sigma, \Sigma} + \frac{1}{\varepsilon} D^1_{\Sigma, \Sigma} & \frac{1}{\varepsilon} D^1_{\Sigma, \Gamma} & -(N^0_{\Sigma, \Sigma})^T - (N^1_{\Sigma, \Sigma})^T \\ \frac{1}{\varepsilon} D^1_{\Gamma, \Sigma} & \frac{1}{\varepsilon} D^1_{\Gamma, \Gamma} & -(N^1_{\Gamma, \Sigma})^T \\ -N^0_{\Sigma, \Sigma} - N^1_{\Sigma, \Sigma} & -N^1_{\Sigma, \Gamma} & -S^0_{\Sigma, \Sigma} - \varepsilon S^1_{\Sigma, \Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\lambda_{\Sigma}\} \\ \{\lambda_{\Gamma}\} \\ \{p_{\Sigma}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\partial_{\vec{n}_x} u_{\text{inc}}\} \\ 0 \\ -\{u_{\text{inc}}\} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \{\lambda'\}^T D_{\Sigma, \Sigma}^{0,1} \{\lambda\} &= \int_{\Sigma \times \Sigma} G_{0,1}(x, y) \left( \partial_s \lambda(y) \partial_s \lambda'(x) - k^2 \lambda(y) \vec{\tau}_y \cdot \lambda'(x) \vec{\tau}_x \right) d\Sigma(y) d\Sigma(x) \\ \{\lambda'\}^T N_{\Sigma, \Sigma}^{0,1} \{p\} &= - \int_{\Sigma \times \Sigma} \partial_{n_y} G_{0,1}(x, y) \lambda(y) p(x) d\Sigma(y) d\Sigma(x) \\ \{p'\}^T S_{\Sigma, \Sigma}^{0,1} \{p\} &= \int_{\Sigma \times \Sigma} G_{0,1}(x, y) p(y) p'(x) d\Sigma(y) d\Sigma(x). \end{aligned}$$

Nous résolvons ce système de manière directe.

## 4.2 Résolution directe par Eléments Finis-Équations Intégrales

Nous cherchons dans cette partie à résoudre le problème (4.1) par une méthode éléments finis.

### Formulation variationnelle du problème intérieur

Soit  $u'_1$  fonction test associée à  $u_1$ ; nous avons

$$\int_{\Omega_1} \nabla \cdot \frac{1}{\varepsilon} \nabla u_1 u'_1 d\Omega_1 + \frac{1}{\varepsilon} k^2 n^2 \int_{\Omega_1} u_1 u'_1 d\Omega_1 = 0$$

En utilisant la formule de Green et la condition sur  $\Gamma$ , nous obtenons

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla u'_1 - \frac{1}{\varepsilon} k^2 n^2 \int_{\Omega_1} u_1 u'_1 d\Omega_1 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma} \partial_n u_1 u'_1 d\Sigma = 0.$$

Nous notons

$$\begin{cases} \lambda_I = u_1 & \text{sur } \Omega_1 \text{ et } \Gamma \\ \lambda_{\Sigma} = u_0 = u_1 & \text{sur } \Sigma \\ p_{\Sigma} = \varepsilon^{-1} \partial_n u_1 = \partial_n u_0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (4.11)$$

Après discrétisation et en reprenant les notations du Chapitre II, nous arrivons au système linéaire suivant

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} K_{I,I} - \frac{1}{\varepsilon} k^2 n^2 M_{I,I} & \frac{1}{\varepsilon} K_{I,\Sigma} - \frac{1}{\varepsilon} k^2 n^2 M_{I,\Sigma} & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} K_{\Sigma,I} - \frac{1}{\varepsilon} k^2 n^2 M_{\Sigma,I} & \frac{1}{\varepsilon} K_{\Sigma,\Sigma} - \frac{1}{\varepsilon} k^2 n^2 M_{\Sigma,\Sigma} & -M_{\Sigma,\Sigma} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_I \\ \lambda_{\Sigma} \\ p_{\Sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### Formulation variationnelle du problème extérieur

Le champ  $u_0$  admet la représentation intégrale

$$u_0(x) = u_{inc}(x) + V^0(\partial_n u_{0|\Sigma})(x) + N^0(u_{0|\Sigma})(x) \text{ pour } x \notin \Sigma.$$

Pour obtenir l'équation intégrale, il suffit de former la quantité  $\int_{\Sigma} (\partial_{n_x} u_0 \lambda'_0 - u_0 p'_0) d\Sigma$  en prenant les mêmes notations que dans la section précédente. Le système linéaire correspondant est le suivant

$$\begin{bmatrix} D_{\Sigma,\Sigma}^0 & -(N_{\Sigma,\Sigma}^0)^T + \frac{1}{2}M_{\Sigma,\Sigma} \\ -N_{\Sigma,\Sigma}^0 - \frac{1}{2}M_{\Sigma,\Sigma} & -S_{\Sigma,\Sigma}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{\Sigma} \\ p_{\Sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\partial_n u_{inc}]_{\Sigma} \\ -[u_{inc}]_{\Sigma} \end{bmatrix}.$$

Ce qui donne le système final suivant

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon}K_{I,I} - \frac{1}{\varepsilon}k^2n^2M_{I,I} & \frac{1}{\varepsilon}K_{I,\Sigma} - \frac{1}{\varepsilon}k^2n^2M_{I,\Sigma} & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}K_{\Sigma,I} - \frac{1}{\varepsilon}k^2n^2M_{\Sigma,I} & K_{\Sigma,\Sigma} + D_{\Sigma,\Sigma} & -(N_{\Sigma,\Sigma}^0)^T - \frac{1}{2}M_{\Sigma,\Sigma} \\ 0 & -N_{\Sigma,\Sigma}^0 - \frac{1}{2}M_{\Sigma,\Sigma} & -S_{\Sigma,\Sigma}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_I \\ \lambda_{\Sigma} \\ p_{\Sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ [\partial_n u_{inc}]_{\Sigma} \\ -[u_{inc}]_{\Sigma} \end{bmatrix}.$$

Nous résolvons ce système de manière directe ; pour cela nous effectuons un complément de Schur. Le premier bloc du système permet d'écrire

$$\lambda_I = -\left(\frac{1}{\varepsilon}K_{I,I} - \frac{1}{\varepsilon}k^2n^2M_{I,I}\right)^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon}K_{I,\Sigma} - \frac{1}{\varepsilon}k^2n^2M_{I,\Sigma}\right) \lambda_{\Sigma}.$$

Nous remplaçons ainsi  $\lambda_I$  par cette expression dans le deuxième bloc.

### Validations numériques

Nous prenons l'exemple de la couronne dans le vide. L'objet métallique est un disque de rayon  $R$  et la surface  $\Sigma$  est placée à une distance  $h$  de cet objet. Nous choisissons les paramètres suivants  $\varepsilon = \mu = 1$ ,  $k = 2$ ,  $R = 1$  et  $h = 0.2$ . Le pas de maillage est fixé à  $\frac{\lambda}{40}$ . Nous comparons les résultats obtenus avec ceux du chapitre I.

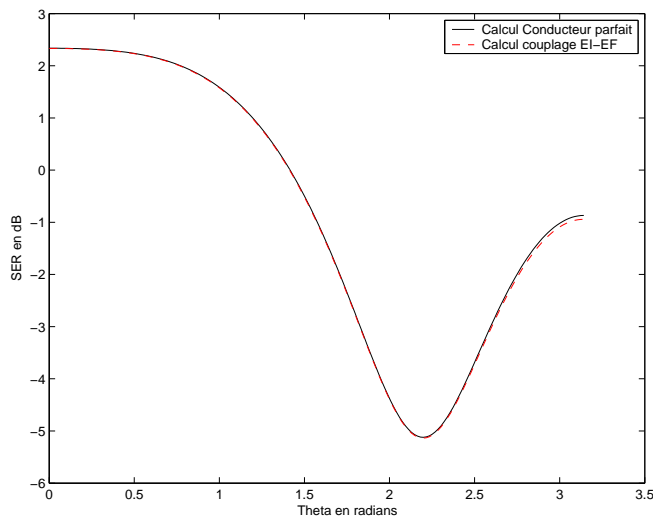


FIG. 4.2 – Comparaison de la ser exacte et la ser obtenue avec une résolution EI-EF directe

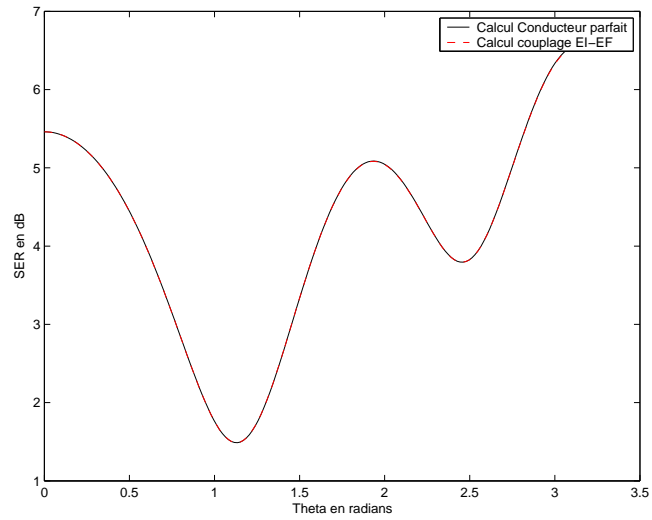


FIG. 4.3 – Comparaison des courants - EI-EF directe

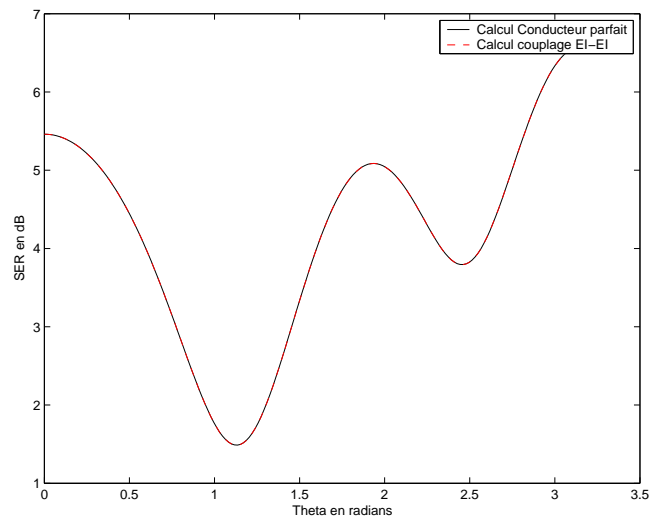


FIG. 4.4 – Comparaison de la ser exacte et la ser obtenue avec une résolution EI-EI directe

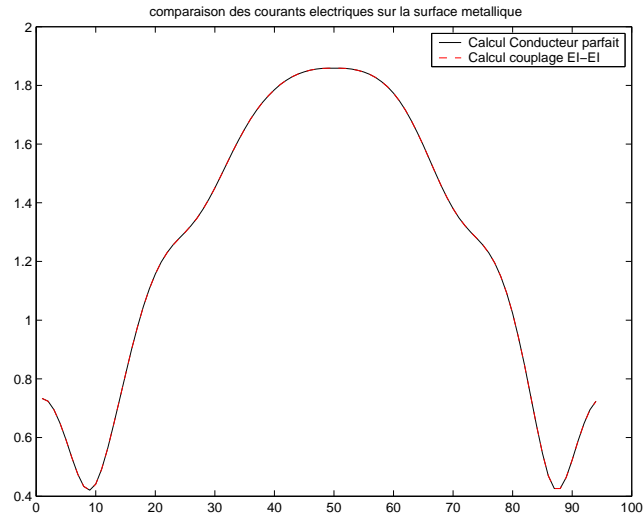


FIG. 4.5 – Comparaison des courants - EI-EI directe

	Erreur sur la SER (%)	Erreur sur les courants (%)
EI-EF	0,06%	0,13%
EI-EI	0,004%	0,02%

TAB. 4.1 – Comparaison des erreurs sur la SER et les courants dans le vide

Nous effectuons les validations avec  $\varepsilon \neq 1$  dans la prochaine section.

Nous avons présenté ici deux méthodes de résolution directe pour le problème d'obstacle revêtu qui serviront de référence pour la suite. Nous souhaitons désormais résoudre le même problème de manière itérative. Dans ce but, nous utilisons une Méthode de Jin-Liu [3] [4].

### 4.3 Résolution par une Méthode Jin-Liu

Le principe de la Méthode Jin-Liu est d'introduire une surface intermédiaire entre l'objet et la frontière absorbante. Cette méthode considère alors une condition absorbante adaptative calculée à partir des potentiels créés par les courants sur la surface intermédiaire. Cette surface peut être confondue avec celle de l'objet diffractant.

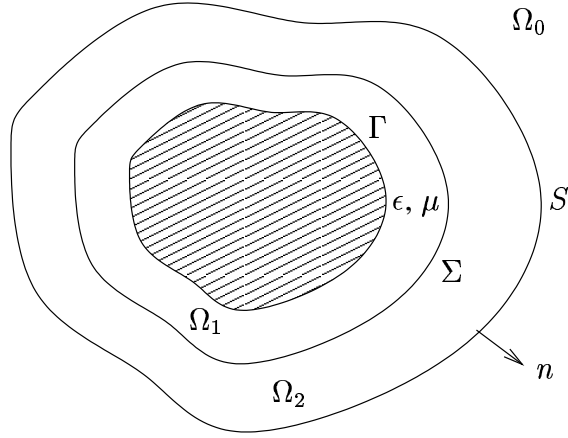


FIG. 4.6 – Surface intermédiaire  $\Sigma$  de Jin-Liu

Nous considérons les problèmes suivants.

**Problème dans  $\Omega_1$  (couche mince)**

$$\begin{cases} \nabla \frac{1}{\varepsilon} \cdot \nabla u_1 + \frac{1}{\varepsilon} k^2 n^2 u_1 = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_n u_1 = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.12)$$

**Problème dans  $\Omega_2$  (vide)**

$$\begin{cases} \nabla \cdot \nabla u_2 + k^2 u_2 = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ \partial_n u_2 + \beta u_2 = \partial_n u_0 + \beta u_0 \text{ sur } S. \end{cases} \quad (4.13)$$

**Conditions de transmission sur  $\Sigma$**

$$\begin{cases} u_1 = u_2 \text{ sur } \Sigma \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_n u_1 = \partial_n u_2 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (4.14)$$

**Problème dans  $\Omega_0$**

Le champ  $u_0$  admet la représentation intégrale

$$u_0(x) = u_{inc}(x) + V p_\Sigma(x) + N \lambda_\Sigma(x) \text{ pour } x \notin \Sigma \quad (4.15)$$

avec  $p_\Sigma = -\partial_n u_{2|\Sigma}$  et  $\lambda_\Sigma = -u_{2|\Sigma}$ .

Les inconnues du problème sont

$$\begin{cases} u_1 \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1 \text{ sur } \Sigma \\ u_2 \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2 \text{ sur } \Sigma \\ u_2 \text{ sur } S \\ p \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (4.16)$$

### Problème matriciel dans $\Omega_1$

Nous procédons de la même manière que dans les chapitres précédents pour l'obtention de la formulation variationnelle et du système. Finalement, nous aboutissons au système suivant

$$\begin{bmatrix} A_{I,I}^1 & A_{I,\Sigma}^1 & 0 \\ A_{\Sigma,I}^1 & A_{\Sigma,\Sigma}^1 & M_{\Sigma,\Sigma} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{int} \\ u_1^\Sigma \\ p_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où  $A_1 = \frac{1}{\varepsilon}K_1 - \frac{k^2 n^2}{\varepsilon}M_1$  avec  $K_1$  la matrice raideur et  $M_1$  la matrice masse.

### Problème matriciel dans $\Omega_2$

De même nous avons

$$\begin{bmatrix} A_{I,I}^2 & A_{I,\Sigma}^2 & A_{I,S}^2 & 0 \\ A_{\Sigma,I}^2 & A_{\Sigma,\Sigma}^2 & A_{\Sigma,S}^2 & -M_{\Sigma,\Sigma} \\ A_{S,I}^2 & A_{S,\Sigma}^2 & A_{S,S}^2 + \beta M_{S,S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^{int} \\ u_2^\Sigma \\ u_2^S \\ p_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

où  $A_2 = K_2 - k^2 M_2$  avec  $K_2$  la matrice raideur et  $M_2$  la matrice masse.

### Calcul du second membre $g_S$

En fait, nous avons  $g_S = \int_S (\partial_n u_0 + \beta u_0) u_2' dS$  avec  $u_0 = u_{inc} + V p_\Sigma + N \lambda_\Sigma$ . Il suffit alors de calculer la trace de  $u_0$  et  $\partial_n u_0$  sur  $S$  pour exprimer  $g_S$  en fonction de  $\lambda_\Sigma$  et  $p_\Sigma$ .

#### Trace de $u_0$ et $\partial_n u_0$ sur $S$

$$u_0(x) = u_{inc}(x) + \int_\Sigma G p_\Sigma d\Sigma(x) - \int_\Sigma \partial_{n_y} G \lambda_\Sigma d\Sigma(x); x \in S \quad (4.17)$$

$$\partial_n u_0(x) = \partial_n u_{inc}(x) + \int_\Sigma \partial_{n_x} G p_\Sigma d\Sigma(x) - \partial_{n_x} \int_\Sigma \partial_{n_y} G \lambda_\Sigma d\Sigma(x); x \in S. \quad (4.18)$$

Ceci nous permet ainsi de calculer  $g_S$

$$\begin{aligned} g_S &= \int_S \partial_n u_{inc} dS + \beta \int_S u_{inc} u_2' + \int_{S \times \Sigma} \partial_{n_x} G p_\Sigma u_2' dS d\Sigma \\ &\quad + \int_{S \times \Sigma} \partial_{n_x} \partial_{n_y} G u_2 u_2' dS d\Sigma + \beta \int_{S \times \Sigma} G p_\Sigma u_2' dS d\Sigma \\ &\quad + \beta \int_{S \times \Sigma} \partial_{n_y} G u_2 u_2' dS d\Sigma. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nous ajoutons les deux systèmes précédents ; comme  $u_1^\Sigma = u_2^\Sigma$ , nous obtenons le système final

$$\begin{bmatrix} A_{I,I}^1 & A_{I,\Sigma}^1 & 0 & 0 \\ A_{\Sigma,I}^1 & A_{\Sigma,\Sigma}^2 + A_{\Sigma,\Sigma}^1 & A_{\Sigma,I}^2 & A_{\Sigma,S}^2 \\ 0 & A_{I,\Sigma}^2 & A_{I,I}^2 & A_{I,S}^2 \\ 0 & A_{S,\Sigma}^2 & A_{S,I}^2 & A_{S,S}^2 + \beta M_{S,S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{int} \\ u_2^\Sigma = u_1^\Sigma \\ u_2^{int} \\ u_2^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_S \end{bmatrix}.$$

Remarquons que l'inconnue  $p_\Sigma$  est éliminée.

Après résolution du système, nous obtenons le vecteur  $[u_1^{int}, u_2^\Sigma, u_2^{int}, u_2^S]^T$ . Pour mettre à jour le second membre  $g_S$ , nous sommes tenus de calculer  $p_\Sigma$ . Pour cela, nous utilisons le problème matriciel dans  $\Omega_1$  ou  $\Omega_2$ ; nous choisissons celui de  $\Omega_1$

$$p_\Sigma = -(M_{\Sigma,\Sigma})^{-1}[A_{\Sigma,I}^1 u_1^{int} + A_{\Sigma,\Sigma}^1 u_1^\Sigma].$$

Si  $M_{\Sigma,\Sigma}$  est calculée en utilisant le procédé de condensation de masse, alors c'est une matrice diagonale.

C'est ainsi qu'est mis en place le processus itératif. Les méthodes itératives utilisées sont les mêmes que celles du Chapitre II : Méthode de Jacobi et Méthode GMRES.

Nous souhaitons maintenant comparer les résultats obtenus par cette méthode itérative avec ceux des méthodes directes.

### Validations numériques

Nous nous plaçons toujours dans le cas de la couronne attaquée par une onde plane. Nous comparons ici pour  $\varepsilon \neq 1$  les trois méthodes mises en place. Nous choisissons les paramètres suivants :  $R = 0,5$ ,  $\varepsilon = 2$ ,  $\mu = 1$  et  $k = 2$ . La surface  $\Sigma$  est placée à une distance égale à  $0,5$ , et la surface  $S$  à une distance égale à  $0,2$ . Le pas de maillage est fixé à  $\frac{\lambda}{40}$ .

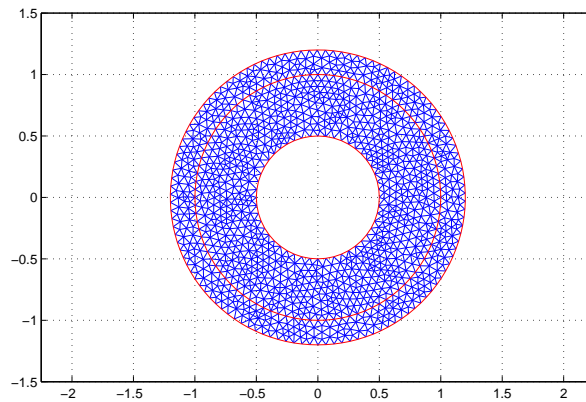


FIG. 4.7 – Maillage de la couronne

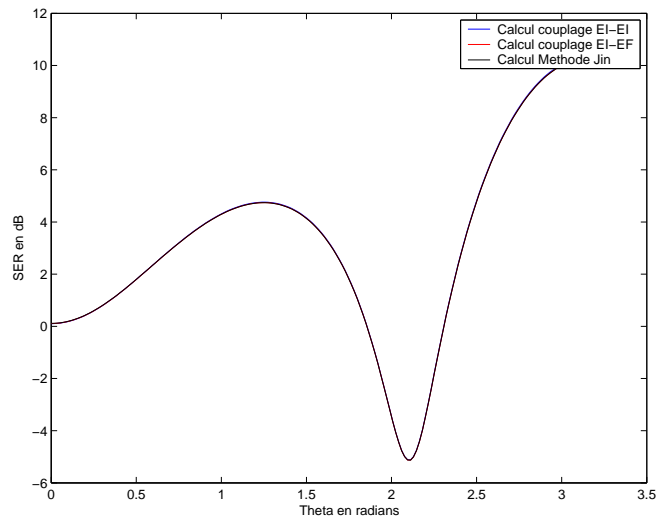


FIG. 4.8 – Comparaison de la ser pour les trois méthodes

Nous obtenons des résultats similaires pour les trois méthodes : nous remarquons la superposition des trois courbes.

Nous souhaitons, par la suite, mettre en œuvre la même méthode pour le couplage antenne-satellite qui fait apparaître des points de jonction entre la surface de Jin et la surface du satellite.

# Chapitre 5

## Traitement des points de jonction pour la méthode de Jin-Liu

Nous souhaitons, dans ce chapitre, appliquer la Méthode de Jin-Liu présentée au chapitre précédent à la géométrie suivante

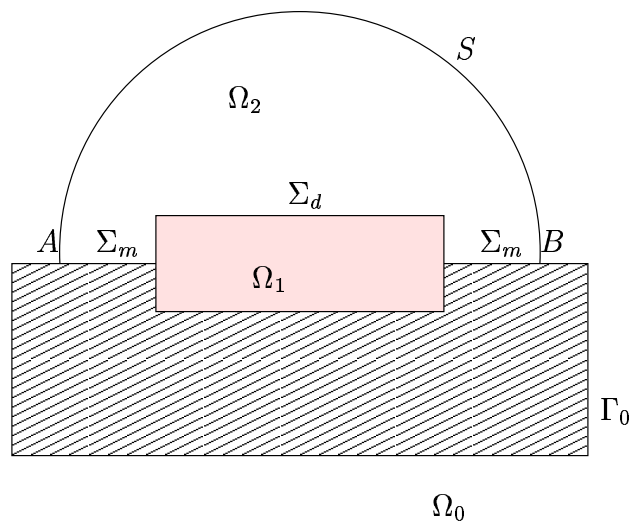


FIG. 5.1 – Points de jonction  $A$  et  $B$ .

Ce type de géométrie est utile pour modéliser l'interaction entre une antenne et un satellite. La surface hachurée représente le métal et la surface de couleur représente le milieu diélectrique. Un problème réside au niveau des points de jonction  $A$  et  $B$  ; en effet, des difficultés apparaissent pour exprimer la dérivée normale du potentiel de double couche intervenant dans le problème Equations intégrales en ces points. Ils nécessitent donc un traitement particulier.

## 5.1 Résolution directe

Dans un premier temps, nous résolvons le problème de manière directe. Nous considérons les problèmes suivants

$$\begin{cases} \nabla \frac{1}{\varepsilon} \cdot \nabla u_1 + \frac{1}{\varepsilon} k^2 n^2 u_1 = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_n u_1 = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \nabla u_2 + k^2 u_2 = 0 \text{ dans } \Omega_2 \\ \partial_n u_2 + \beta u_2 = \partial_n u_0 + \beta u_0 \text{ sur } S \end{cases} \quad (5.2)$$

avec les conditions de raccord

$$\begin{cases} u_1 = u_2 \text{ sur } \Sigma_d \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_n u_1 = \partial_n u_2 \text{ sur } \Sigma_d \end{cases} \quad (5.3)$$

et

$$u_0(x) = u_{inc}(x) + V p_{\Sigma_d}(x) + N \lambda_{\Sigma_d}(x) + N \lambda_{\Sigma_m}(x) + N \lambda_{\Gamma_0}(x) \text{ pour } x \notin \Gamma \quad (5.4)$$

où  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Sigma_m \cup \Sigma_d$ ,  $p_{\Sigma_d} = -\partial_n u_2|_{\Sigma_d}$ ,  $\lambda_{\Sigma} = -u_2|_{\Sigma_d}$ ,  $\lambda_{\Sigma_m} = -u_2|_{\Sigma_m}$  et  $\lambda_{\Gamma_0} = -u_{\Gamma_0}$ .

Les inconnues du problème sont alors

$$\begin{cases} u_1 \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1 \text{ sur } \Sigma_d \\ u_2 \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2 \text{ sur } \Sigma_d \\ u_2 \text{ sur } \Sigma_m \\ u_2 \text{ sur } S \\ u_0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ p \text{ sur } \Sigma_d. \end{cases} \quad (5.5)$$

Les problèmes dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont résolus par une méthode éléments finis et le problème dans  $\Omega_0$  est résolu par une méthode équations intégrales sur  $\Gamma$ .

### Problème dans $\Omega_0$

Nous avons  $\partial_n u_0 = 0$  sur  $\bar{\Gamma}_0$ . Nous traduisons cette équation à l'aide de la représentation intégrale de  $u_0$ . La trace de  $\partial_n u_0$  sur  $\bar{\Gamma}_0$  est donnée par

$$\partial_n u_0 = \partial_n u_{inc} - N^T p_{\Sigma_d} - \frac{1}{2} p_{\Sigma_d} - \partial_s V(\partial_s \lambda_{\Gamma}) - k^2 V(\lambda_{\Gamma} \tau) \cdot \tau_x \text{ sur } \bar{\Gamma}_0. \quad (5.6)$$

Nous pouvons alors réécrire  $\int_{\overrightarrow{AB}} \partial_n u_0 \lambda' d\Gamma_0 = 0$  avec  $\lambda'$  fonction test associée à  $\lambda_{\Gamma}$ ;  $\overrightarrow{AB}$  signifie que l'on parcourt  $\Gamma_0$  du point  $A$  vers le point  $B$ . Après une intégration par

parties, nous obtenons

$$0 = \int_{\overline{AB}} \partial_n u_{inc} \lambda' d\Gamma_0 - \int_{\overline{AB}} N^T p_{\Sigma_d} \lambda' d\Gamma_0 + \int_{\overline{AB}} (V(\partial_s \lambda_\Gamma) \partial_s \lambda' - k^2 V(\lambda_\Gamma \tau) \cdot \lambda' \tau_x) d\Gamma_0 \\ + V(\partial_s \lambda_\Gamma)(A) \lambda'_A - V(\partial_s \lambda_\Gamma)(B) \lambda'_B.$$

Nous choisissons une fonction test  $\lambda'$  telle que  $\lambda' = 0$  aux points  $A$  et  $B$ . Nous sommes alors ramenés à résoudre, après discrétisation, le système linéaire

$$-[\lambda']^T D_{\Gamma_0, \Gamma_0} [u_{\Gamma_0}] - [\lambda']^T D_{\Gamma_0, \Sigma_d} [u_{\Sigma_d}] - [\lambda']^T D_{\Gamma_0, \Sigma_m} [u_{\Sigma_m}] - [\lambda']^T (N_{\Gamma_0, \Sigma_d})^T [p_{\Sigma_d}] = -[\lambda']^T [\partial_n u_{inc}]_{\Gamma_0}$$

ou encore

$$-D_{\Gamma_0, \Gamma_0} [u_{\Gamma_0}] - D_{\Gamma_0, \Sigma_d} [u_{\Sigma_d}] - D_{\Gamma_0, \Sigma_m} [u_{\Sigma_m}] - (N_{\Gamma_0, \Sigma_d})^T [p_{\Sigma_d}] = -[\partial_n u_{inc}]_{\Gamma_0}. \quad (5.7)$$

Cette équation nous permettra de calculer  $u_{\Gamma_0}$  en fonction des quantités connues par EF. Nous prenons ensuite  $\lambda'$  telle que  $\lambda' = 1$  au point  $A$  et  $\lambda' = 0$  ailleurs ; il vient

$$-V(\partial_s \lambda_\Gamma)(A) = [\partial_n u_{inc}]_A - N_{A, \Sigma_d}^T [p_{\Sigma_d}] - D_{A, \Gamma_0} [u_{\Gamma_0}] - D_{A, \Sigma_d} [u_{\Sigma_d}] - D_{A, \Sigma_m} [u_{\Sigma_m}]. \quad (5.8)$$

De même, en prenant  $\lambda'$  telle que  $\lambda' = 1$  au point  $B$  et  $\lambda' = 0$  ailleurs, nous avons

$$V(\partial_s \lambda_\Gamma)(B) = [\partial_n u_{inc}]_B - N_{B, \Sigma_d}^T [p_{\Sigma_d}] - D_{B, \Gamma_0} [u_{\Gamma_0}] - D_{B, \Sigma_d} [u_{\Sigma_d}] - D_{B, \Sigma_m} [u_{\Sigma_m}]. \quad (5.9)$$

Les deux termes  $-V(\partial_s \lambda_\Gamma)(A)$  et  $V(\partial_s \lambda_\Gamma)(B)$  vont intervenir dans le second membre du système éléments finis ; comme nous le verrons par la suite.

**Remarque 5.1.1** *D'un point de vue programmation, nous calculons la matrice  $D_{\overline{\Gamma_0}, \Gamma}$ . Nous résolvons le système (5.7) en supprimant les deux lignes correspondants aux points  $A$  et  $B$ . Nous utilisons, ensuite, ces deux lignes pour le calcul des termes  $-V(\partial_s \lambda_\Gamma)(A)$  et  $V(\partial_s \lambda_\Gamma)(B)$ .*

**Problème dans  $\Omega_1$**

Soit  $u'_1$  fonction test associée à  $u_1$  ; de la même manière qu'au chapitre précédent, nous obtenons la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega_1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla u_1 \nabla u'_1 - \frac{k^2 n^2}{n^2} u_1 u'_1 \right) d\Omega_1 + \int_{\Sigma_d} p_{\Sigma_d} u'_1 d\Sigma_d = 0. \quad (5.10)$$

Matriciellement, nous avons

$$\begin{bmatrix} A_{I, I}^1 & A_{I, \Sigma_d}^1 & 0 \\ A_{\Sigma_d, I}^1 & A_{\Sigma_d, \Sigma_d}^1 & M_{\Sigma_d, \Sigma_d} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{int} \\ u_1^{\Sigma_d} \\ p_{\Sigma_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où  $A_1 = \frac{1}{\varepsilon} K_1 - \frac{k^2 n^2}{\varepsilon} M_1$  avec  $K_1$  la matrice raideur et  $M_1$  la matrice masse.

### Problème dans $\Omega_2$

Soit  $u'_2$  fonction test associée à  $u_2$  ; nous obtenons la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega_2} (\nabla u_2 \nabla u'_2 - k^2 u_2 u'_2) d\Omega_2 - \int_{\Sigma_d} p_{\Sigma_d} u'_2 d\Sigma_d + \beta \int_S u_2 u'_2 dS = \int_S (\partial_n u_0 + \beta u_0) u'_2 dS. \quad (5.11)$$

Matriciellement, nous avons

$$\begin{bmatrix} A_{I,I}^2 & A_{I,\Sigma_d}^2 & A_{I,\Sigma_m}^2 & A_{I,S}^2 & 0 \\ A_{\Sigma_d,I}^2 & A_{\Sigma_d,\Sigma_d}^2 & A_{\Sigma_d,\Sigma_m}^2 & A_{\Sigma_d,S}^2 & -M_{\Sigma_d,\Sigma_d} \\ A_{\Sigma_m,I}^2 & A_{\Sigma_m,\Sigma_d}^2 & A_{\Sigma_m,\Sigma_m}^2 & A_{\Sigma_m,S}^2 & 0 \\ A_{S,I}^2 & A_{S,\Sigma_d}^2 & A_{S,\Sigma_m}^2 & A_{S,S}^2 + \beta M_{S,S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^{int} \\ u_2^{\Sigma_d} \\ u_2^{\Sigma_m} \\ u_2^S \\ p_{\Sigma_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

où  $A_2 = K_2 - k^2 M_2$  avec  $K_2$  la matrice raideur et  $M_2$  la matrice masse.

Lorsque nous ajoutons les deux systèmes, l'inconnue  $p_{\Sigma_d}$  disparaît ; or nous avons besoin d'une équation sur  $p_{\Sigma_d}$ .

### Equation vérifiée par $p_{\Sigma_d}$

Nous choisissons une fonction test  $p'_{\Sigma_d}$  telle que  $p'_{\Sigma_d} = 0$  sauf sur  $\Sigma_d$  et nous considérons, par exemple, le problème dans  $\Omega_2$

$$[p'_{\Sigma_d}, 0] A_2 [u_{\Sigma_d}, u_I]^T - [p'_{\Sigma_d}, 0] M_{\Sigma_d} [p_{\Sigma_d}, 0]^T = 0. \quad (5.12)$$

Nous décomposons la matrice  $A_2$  de la façon suivante

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{\Sigma_d,\Sigma_d}^2 & A_{\Sigma_d,I}^2 \\ A_{I,\Sigma_d}^2 & A_{I,I}^2 \end{bmatrix}$$

où  $I$  correspond à tout ce qui n'est pas sur  $\Sigma_d$ . Nous obtenons alors l'équation suivante sur  $p_{\Sigma_d}$

$$A_{\Sigma_d,\Sigma_d}^2 [u_{\Sigma_d}] + A_{\Sigma_d,I}^2 [u_I] - M_{\Sigma_d} [p_{\Sigma_d}] = 0. \quad (5.13)$$

### Calcul du second membre $g_S$

Nous calculons l'intégrale  $g_S = \int_S (\partial_n u_0 + \beta u_0) u'_2 dS$  en utilisant la trace de  $\partial_n u_0$  et  $u_0$  sur  $S$ . Nous avons après une intégration par parties

$$\begin{aligned} g_S &= \int_{\overrightarrow{BA}} (\partial_n u_{inc} + \beta u_{inc}) u'_2 dS - \int_{\overrightarrow{BA}} (V(\partial_s \lambda_\Gamma) \partial_s u'_2 - k^2 V(\lambda_\Gamma \tau) \cdot u'_2 \tau_x) dS \\ &+ \beta \int_{\overrightarrow{BA}} V p_{\Sigma_d} u'_2 dS + \beta \int_{\overrightarrow{BA}} N \lambda_\Gamma u'_2 dS + V(\partial_s \lambda_\Gamma)(B) - V(\partial_s \lambda_\Gamma)(A). \end{aligned}$$

Nous connaissons l'expression des deux termes  $V(\partial_s \lambda_\Gamma)(B)$  et  $-V(\partial_s \lambda_\Gamma)(A)$  calculée en (5.5) et (5.6). Nous obtenons alors vectoriellement

$$\begin{aligned}
g_S &= [\partial_n u_{inc}]_S + \beta[u_{inc}]_S + [\partial_n u_{inc}]_A + [\partial_n u_{inc}]_B \\
&\quad + (-N_{S,\Sigma_d}^T + \beta V_{S,\Sigma_d} - N_{A,\Sigma_d}^T - N_{B,\Sigma_d}^T)[p_{\Sigma_d}] \\
&\quad + (-D_{S,\Sigma_d} - \beta N_{S,\Sigma_d} - D_{A,\Sigma_d} - D_{B,\Sigma_d})[u_{\Sigma_d}] \\
&\quad + (-D_{S,\Sigma_m} - \beta N_{S,\Sigma_m} - D_{A,\Sigma_m} - D_{B,\Sigma_m})[u_{\Sigma_m}] \\
&\quad + (-D_{S,\Gamma_0} - \beta N_{S,\Gamma_0} - D_{A,\Gamma_0} - D_{B,\Gamma_0})[u_{\Gamma_0}].
\end{aligned}$$

Nous pouvons, maintenant, écrire le système final  $AU = B$  avec

$$A = \begin{bmatrix}
A_{I,I}^1 & A_{I,\Sigma_d}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A_{\Sigma_d,I}^1 & A_{\Sigma_d,\Sigma_d}^1 + A_{\Sigma_d,\Sigma_d}^2 & A_{\Sigma_d,I}^2 & A_{\Sigma_d,\Sigma_m}^2 & A_{\Sigma_d,S}^2 & 0 & 0 \\
0 & A_{I,\Sigma_d}^2 & A_{I,I}^2 & A_{I,\Sigma_m}^2 & A_{I,S}^2 & 0 & 0 \\
0 & A_{\Sigma_m,\Sigma_d}^2 & A_{\Sigma_m,I}^2 & A_{\Sigma_m,\Sigma_m}^2 & A_{\Sigma_m,S}^2 & 0 & 0 \\
& A_{S,\Sigma_d}^2 & & A_{S,\Sigma_m}^2 & & (N_{S,\Sigma_d})^T & D_{S,\Gamma_0} \\
& +D_{S,\Sigma_d} & & +D_{S,\Sigma_m} & A_{S,S}^2 & -\beta S_{S,\Sigma_d} & +\beta N_{S,\Gamma_0} \\
0 & +\beta N_{S,\Sigma_d} & A_{S,I}^2 & +\beta N_{S,\Sigma_m} & +\beta M_{S,S} & +(N_{A,\Sigma_d})^T & +D_{A,\Gamma_0} \\
& +D_{A,\Sigma_d} & & +D_{A,\Sigma_m} & & +(N_{B,\Sigma_d})^T & +D_{B,\Gamma_0} \\
& +D_{B,\Sigma_d} & & +D_{B,\Sigma_m} & & & \\
0 & A_{\Sigma_d,\Sigma_d}^2 & A_{\Sigma_d,I}^2 & A_{\Sigma_d,\Sigma_m}^2 & A_{\Sigma_d,S}^2 & -M_{\Sigma_d} & 0 \\
0 & -D_{\Gamma_0,\Sigma_d} & 0 & -D_{\Gamma_0,\Sigma_m} & 0 & -(N_{\Gamma_0,\Sigma_d})^T & -D_{\Gamma_0,\Gamma_0}
\end{bmatrix}$$

$$U = [u_{int}^1, u_{\Sigma_d}, u_{int}^2, u_{\Sigma_m}, u_S, p_{\Sigma_d}, u_{\Gamma_0}]^T \quad \text{et}$$

$$B = [0, 0, 0, 0, [\partial_n u_{inc} + \beta u_{inc}]_S + [\partial_n u_{inc}]_A + [\partial_n u_{inc}]_B, 0, -[\partial_n u_{inc}]_{\Gamma_0}]^T.$$

**Remarque 5.1.2** *Au niveau de la programmation, il faut faire très attention à la gestion des degrés de liberté aux points  $A$  et  $B$ . Nous avons dû construire une table de degrés de liberté considérant  $A$  et  $B$  comme extrémités de  $\Gamma_0$ , de  $S$  et de  $\Sigma_m$  : les points  $A$  et  $B$  sont alors associés aux mêmes degrés de liberté.*

## Validations numériques

Onde plane avec  $\varepsilon = 1$   $\mu = 1$

Nous considérons la géométrie suivante

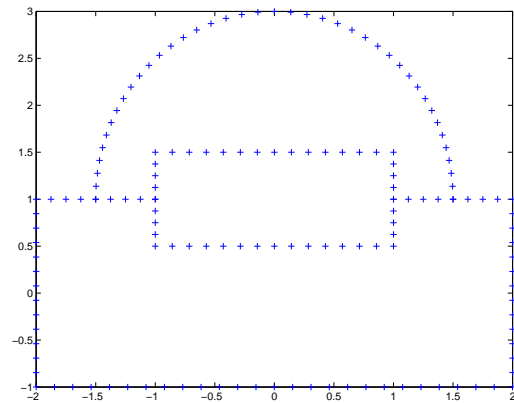


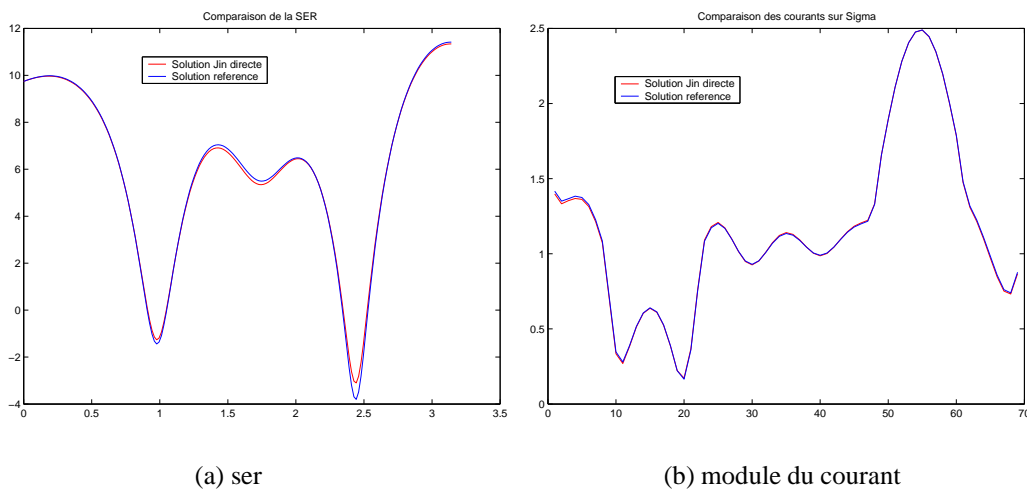
FIG. 5.2 – Géométrie avec points de jonction

Nous comparons avec la solution de référence sur la courbe  $\Sigma = \Gamma_0 \cup \Sigma_m$ .

pas	Erreur sur la SER (%)	Erreur sur les courants (%)
$\frac{\lambda}{20}$	2,2%	1,4%
$\frac{\lambda}{40}$	0,67%	0,44%

TAB. 5.1 – Comparaison de la SER et des courants pour  $\varepsilon = 1$  et  $\mu = 1$

Nous obtenons des erreurs tout à fait satisfaisantes. Nous traçons ici les SER et les courants.



(a) ser

(b) module du courant

FIG. 5.3 – Comparaison de la ser et des courants.

### Onde plane avec $\varepsilon = 3$ $\mu = 2$

Nous prenons la même géométrie. Nous comparons avec la solution de la Méthode directe de Jin où S est une ellipse entourant complètement le métal et le diélectrique.

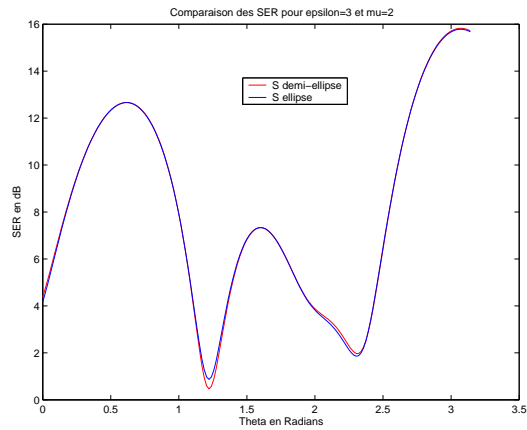


FIG. 5.4 – Comparaison de la SER pour  $\varepsilon = 3$  et  $\mu = 2$

Nous obtenons, pour un pas égal à  $\frac{\lambda}{20}$ , une erreur de 1,1% sur la SER.

### Dipôle avec $\varepsilon = 3$ $\mu = 2$

Nous prenons comme source un dipôle placé à l'intérieur du milieu diélectrique. Nous prenons les mêmes éléments de comparaison que précédemment ; nous modifions seulement le pas à  $\frac{\lambda}{10}$ .

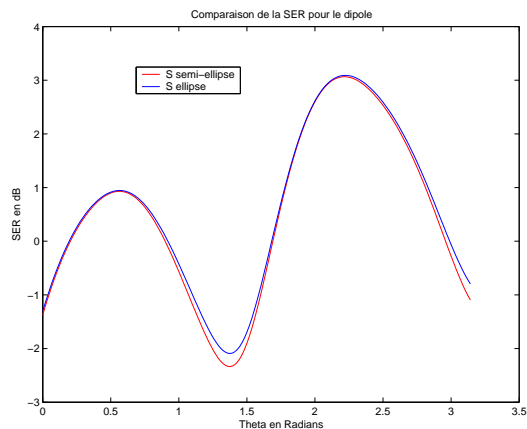


FIG. 5.5 – Comparaison de la SER pour  $\varepsilon = 3$  et  $\mu = 2$

Nous obtenons des résultats semblables pour les deux surfaces de Jin testées.

## 5.2 Résolution par une méthode itérative

Nous souhaitons, dans cette deuxième section, mettre en place un processus itératif. Nous proposons ici trois méthodes itératives : une méthode de Gauss-Seidel, une méthode couplant Gauss-Seidel et Gmres et une méthode Gmres appliquée au système direct.

### 5.2.1 Méthode de Gauss-Seidel

L'algorithme de Gauss-Seidel mis en place est le suivant :

#### Initialisation

$$U_{EF} = [u_{1int}, u_{\Sigma_d}, u_{2int}, u_{\Sigma_m}, u_S]^T = 0$$

$$p_{\Sigma_d} = 0$$

$$u_{\Gamma_0} = 0$$

$$f_{EF} = g_{inc}^{EF} \text{ ou } \delta_{dipole}$$

$$f_{EI} = g_{inc}^{EI} \text{ ou } 0$$

#### Boucle

- Calcul du second membre du système EF

$$g_{EF}^{(n+1)} = f_{EF} + MatF * [u_{\Sigma_d}^{(n)}, u_{\Sigma_m}^{(n)}, p_{\Sigma_d}^{(n)}, u_{\Gamma_0}^{(n)}]^T$$

- Résolution du système EF par une méthode LU

$$A_{EF} U_{EF}^{(n+1)} = g_{EF}^{(n+1)}$$

- Calcul de  $p_{\Sigma_d}$

$$p_{\Sigma_d}^{(n+1)} = fct(U_{EF}^{(n+1)})$$

- Calcul du second membre du système EI

$$g_{EI}^{(n+1)} = f_{EI} + MatEI * [u_{\Sigma_d}^{(n+1)}, u_{\Sigma_m}^{(n+1)}, p_{\Sigma_d}^{(n+1)}]^T$$

- Résolution du système EI par une méthode LU

$$A_{EI} u_{\Gamma_0}^{(n+1)} = g_{EI}^{(n+1)}$$

Nous choisissons le critère d'arrêt suivant

$$\max\left(\frac{\|U_{EF}^{(n+1)} - U_{EF}^{(n)}\|}{\|U_{EF}^{(n)}\|}, \frac{\|U_{\Gamma_0}^{(n+1)} - U_{\Gamma_0}^{(n)}\|}{\|U_{\Gamma_0}^{(n)}\|}\right).$$

**Remarque 5.2.1** Les matrices  $MatF$  et  $MatEI$  sont constituées des matrices type EI intervenant dans la matrice  $A$  du système direct.

**Remarque 5.2.2** De même, nous pouvons utiliser une méthode de Jacobi ; dans ce cas pour calculer  $g_{EI}$  à l'itération  $(n + 1)$  nous utilisons  $U_{EF}$  calculé à l'itération  $n$ .

## 5.2.2 GMRES couplé à Gauss-Seidel

Afin d'obtenir une convergence plus rapide, nous pouvons également coupler une méthode GMRES à la méthode Gauss-Seidel.

L'algorithme de Gauss-Seidel permet de résoudre

$$MU^{(n+1)} = NU^{(n)} + F$$

et la méthode GMRES s'applique à résoudre, si on écrit  $A = M - N$ , le système

$$(M - N)U = F$$

que l'on peut écrire sous la forme, compte tenu de la nature diagonale par bloc (cas Jacobi) ou triangulaire inférieure par bloc (cas Gauss-Seidel) pour la matrice  $M$

$$(I - M^{-1}N)U = M^{-1}F$$

pour un meilleur conditionnement.

Le couplage GMRES-Gauss-Seidel consiste alors à donner à l'algorithme GMRES le second membre  $M^{-1}F$  et la manière pour former le produit matrice-vecteur  $(I - M^{-1}N)U$ .

### Formation du produit $(I - M^{-1}N)U$

Nous avons  $(I - M^{-1}N)U = U - M^{-1}NU$ . Pour trouver  $Y = M^{-1}NU$ , il suffit d'effectuer une itération de Gauss-Seidel avec  $F = 0$ . Nous faisons ensuite  $U - Y$  pour obtenir le produit.

### Formation du second membre $B_{gmres} = M^{-1}F$

Pour obtenir le second membre  $B_{gmres}$ , il suffit de résoudre une itération de Gauss-Seidel en initialisant  $U$  à 0. Nous avons alors  $U = M^{-1}F$  et nous prenons  $B_{gmres} = U$ .

**Remarque 5.2.3** *Les matrices  $M$  et  $N$  s'obtiennent en écrivant  $A$  sous la forme  $A = M - N$  ; mais nous n'avons pas besoin de former ces matrices pour cette méthode de couplage.*

## 5.2.3 GMRES appliqué au système direct

Nous écrivons le système direct  $AU = B$  sous la forme

$$(M - N)U = B$$

où  $N$  comprend les matrices de type EI de  $A$ . Nous appliquons alors la méthode GMRES à la matrice  $A_{gmres} = I + M^{-1}N$  et au second membre  $B_{gmres} = M^{-1}B$ .

**Remarque 5.2.4** *Cela revient en fait à appliquer du GMRES à la méthode de Jacobi. La différence se situe au niveau des matrices  $M$  et  $N$ . Dans le cas de Jacobi, les matrices EI intervenant dans le second membre du système EI sont dans la matrice  $N$  ; alors que pour Gauss-Seidel elles sont dans la matrice  $M$ .*

## 5.2.4 Validations numériques

Nous considérons la géométrie (5.2) avec  $k = 2$ .

Onde plane avec  $\varepsilon = 1 \mu = 1$

Nous comparons le nombre d'itérations entre les trois méthodes itératives.

Résidu = $10^{-6}$	
	Itérations
Gauss-Seidel	11
GMRES Gauss-Seidel	5
GMRES Jacobi	6

TAB. 5.2 – Comparaison des algorithmes itératifs dans le cas de l'onde plane.

Il semble que le fait de coupler la méthode GMRES à une méthode de Gauss-Seidel ou Jacobi accélère la convergence. En ce qui concerne l'erreur sur la ser et les courants, nous obtenons les mêmes résultats que pour la méthode directe.

Dipôle avec  $\varepsilon = 2 \mu = 0.5$

Nous étudions le cas du dipôle toujours avec  $k = 2$ .

Résidu = $10^{-6}$	
	Itérations
Gauss-Seidel	12
GMRES Gauss-Seidel	5
GMRES Jacobi	6

TAB. 5.3 – Comparaison des algorithmes itératifs dans le cas du dipôle  $k = 2$ .

Les meilleurs résultats de convergence sont encore obtenus pour un couplage d'une méthode GMRES avec une méthode Jacobi ou Gauss-Seidel.

Test de plus grande taille

Nous considérons encore le cas du dipôle avec  $\varepsilon = 2 \mu = 0.5$ , mais nous prenons cette fois un nombre d'onde plus élevé  $k = 6$ . Le pas de maillage est alors égal à  $\frac{\lambda}{20} = 0,026$ .

Nous obtenons pour un résidu de  $10^{-2}$  les résultats suivants

Résidu = $10^{-2}$	
	Itérations
Gauss-Seidel	4
GMRES Gauss-Seidel	1
GMRES Jacobi	2

TAB. 5.4 – Comparaison des algorithmes itératifs dans le cas du dipôle  $k = 6$ .

# Chapitre 6

## Conclusion

Ce stage a été très enrichissant pour moi. Il m'a permis de participer à un travail de recherche avec Nathalie Bartoli et Abderrahmane Bendali, et de découvrir le métier de chercheur.

Durant ces trois mois, nous avons réussi à mettre en œuvre un processus itératif performant permettant de résoudre le problème de couplage d'une antenne et d'un satellite en dimension deux. Ce travail a permis de tester la validité de la méthode qui sera étendue à la dimension trois.

Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe EMC pour m'avoir accueilli et, en particulier, Nathalie Bartoli pour sa disponibilité et sa gentillesse.

# Chapitre 7

## Annexe : Présentation du Cerfacs

### Généralités

Société civile, le CERFACS a été fondé en 1987 par Aérospatiale, le CNES, EDF et Météo-France, et est devenu un institut de renom pour son expertise dans le domaine du calcul scientifique à hautes performances. Il a pour objectifs de s'occuper de la résolution par modélisations et simulations numériques des problèmes scientifiques nécessitant le recours aux moyens de calculs les plus puissants. Il conçoit, optimise et évalue les outils et algorithmes qui tirent le meilleur parti des ordinateurs à hautes performances dont il dispose. Ceux-ci représentent une capacité de calcul non négligeable : citons notamment une SGI Origin à 32 processeurs, une MEIKO CS2 32 processeurs, une SGI PowerChallenge 8 processeurs, ainsi que des accès sur la plupart des supercalculateurs (CRAY C90 et J90, IBM SP2, FUJITSU VPP700 ...).

Le CERFACS a établi des conventions de collaboration avec de nombreux organismes scientifiques, parmi lesquels le CNRS, l'université Paul Sabatier, l'INRIA, l'INP Toulouse et le CEA.

Il réunit de manière interdisciplinaire des physiciens, des mathématiciens appliqués, des numériciens et des ingénieurs autour de cinq équipes. Les deux premières constituent le "pôle théorie".

**Paralell Algorithms** a pour but d'étudier et de développer des méthodes numériques et des logiciels pour l'utilisation optimale (performance et fiabilité) des calculateurs haute-performance (scalaire, vectoriel, parallèle) dans le domaine scientifique. Les principaux thèmes abordés sont les noyaux de calcul (algèbre linéaire), les calculs de matrices creuses de grandes dimensions (méthodes directes, itératives, solveurs de valeurs propres...) ainsi que la décomposition de domaines.

**Image and Signal Processing** travaille en partenariat avec l'Observatoire Midi-Pyrénées. Elle s'intéresse essentiellement aux problèmes inverses : déconvolution, synthèse de Fourier... Les applications sont l'imagerie satellitaire (CNES), la télédétection par synthèse d'ouverture (ESA) et l'astronomie observationnelle (ESO, IRAM, NRAO).

Autour de ces deux services, trois équipes s'attachent à l'aspect applications :

**Computational Fluid Dynamics** : la simulation numérique est le complément indispensable des études expérimentales (essais en soufflerie, etc...) dans la conception des avions, des voitures ou des engins spatiaux. Une vaste gamme d'outils numériques (simulation directe, simulation des grandes échelles, modèles de turbulence, maillages adaptatifs ...) sont développés au Cerfacs afin de traiter des problèmes tels que l'écoulement autour d'un avion, la combustion interne d'un moteur, la pollution atmosphérique à l'échelle d'une ville ou la réduction du bruit généré par la turbulence autour d'une voiture.

**Climate Modelling and Global Change** développe des modèles numériques pour l'étude du climat terrestre et son évolution. Cette modélisation se fait à l'échelle globale, en couplant des modèles d'atmosphère, d'océan et de glace de mer développés dans la communauté scientifique. L'expérience acquise permet d'aborder les problèmes de scénario climatique pour le futur.

**Electromagnetism and Control** est l'équipe que j'ai intégrée durant mon stage. Nous décrivons son activité plus en détail dans la suite.

## L'équipe EMC

Fondée en 1992, elle compte actuellement cinq membres permanents et deux doctorants :

- Abderrahmane BENDALI, chef de projet et enseignant à l'INSA,
- Florence MILLOT, chercheur senior,
- M'Barek FARES, chercheur senior,
- Nathalie BARTOLI, chercheur senior,
- Francis COLLINO, consultant externe,
- Nolwenn BALIN, doctorant,
- Nicolas ZERBIB, doctorant.

L'équipe EMC a pour objectifs de développer des méthodes numériques performantes pour la résolution des équations de Maxwell dans les domaines fréquentiels et temporels. Elle propose ainsi des algorithmes efficaces destinés principalement à des applications industrielles telles que la caractérisation d'antennes, la comptabilité électromagnétique ou le calcul de signature radar (RCS : Radar Cross Section).

Actuellement, ses thèmes de recherche sont :

- les méthodes intégrales pour le calcul de diffraction d'ondes électromagnétiques en régime harmonique,
- la FMM (Fast Multipole Method) pour la résolution des problèmes électromagnétiques de grande taille,
- la méthode de Décomposition de Domaine,
- les équations intégrales de Després couplées aux méthodes itératives,
- l'effet des couches minces,
- et les problèmes de cavités de grandes dimensions.

L'équipe EMC travaille en partenariat avec des organismes comme le CNES, le CEA-

CESTA, Alcatel Space, Dassault ou EADS, et avec des laboratoires de recherche comme celui de l'ENAC, de l'INSA ou le MIP.

L'intérêt de la simulation et de la modélisation électromagnétique est multiple. Tout d'abord, d'un point de vue physique, elle permet de mieux comprendre les différents modèles utilisés pour représenter les phénomènes électromagnétiques. Du point de vue de l'industriel, elle permet d'appréhender le comportement d'objets sans avoir à les construire. Cela permet par exemple l'expérimentation dans les domaines spatial et aéronautique. On trouve donc diverses applications de la simulation et de la modélisation électromagnétiques :

**Industries de la défense, de l'aéronautique et de l'espace :** radar, transmission, sécurité des équipements électriques ...

**Industries grand public :** téléphones portables, antennes ...

# Bibliographie

- [1] Nathalie Bartoli. *Modèles pour la diffraction d'ondes par des obstacles revêtus de couches minces. Résolution de problèmes de diffraction d'ondes via une formulation intégrale de type point selle*. PhD thesis, INSA, 2000.
- [2] Abderrahmane Bendali. Quelques méthodes pour la résolution numérique de problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques. Technical report, INSA, 2002.
- [3] Nathalie Bartoli et Francis Collino. Etude bidimensionnelle de la condition absorbante adaptative proposée par Liu et Jin pour la résolution des problèmes de diffraction. Technical Report TR/EMC/04/34, CERFACS, Toulouse, France, 2004.
- [4] Jian Liu and Jian-Ming Jin. A novel hybridization of higher order finite element and boundary integral methods for electromagnetic scattering and radiation problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 49(12) :1794–1806, december 2001.