

# Des mathématiques pour la finance

Jean-Philippe ARGAUD

Séminaire CERFACS  
du 27 novembre 2007

## Brève introduction à la finance

- Finance de marché
- Les produits et intervenants de marché
- La structure de gestion des informations

## Des mathématiques pour la finance : pourquoi, comment ?

- La modélisation stochastique des aléas
- Le calcul stochastique et l'optimisation
- Les mesures de risque
- La résolution numérique, l'usage de scénarios

## Ouvertures : des mathématiques à l'opérationnel

- La modélisation des aléas
- La couverture imparfaite
- Le calcul numérique adapté
- La communication



# Brève introduction à la finance

# De quoi parlons-nous, et pourquoi ?

## Finance de marché : elle est liée

- À l'argent, à l'établissement des **prix**
- À **l'économie**, aux entreprises, au commerce...
- À la gestion prospective, au **financement** des entreprises...
- À l'échange et à la diffusion **d'informations**

Le Monde.fr

## Economie

🏠	actualités	perspectives	pratique	annonces	le desk	le kiosque	newsletters	multimédia	références	EDITION ABONNÉS Abonnez-vous 6 €	Jeudi 01 novembre 2007							
					ACCUEIL	MARCHÉS	SOCIÉTÉS	DÉPÊCHES	ÉTUDES									
ACCUEIL		INDICES	ACTIONS	OBLIGATIONS	TAUX	SICAV & FCP	DEVISES	MATIÈRES LIÈRES	GLOSSAIRE	RECHERCHE								
CAC40	• 5 730,92	• -2,00%	↓	DOW JONES	• 13 930,01	• +1,00%	↑	1 € = 1,4464\$	• -0,03%	↓	OR (\$)	• 789,95	• -0,98%	↓	BARIL PÉTROLE NEW-YORK (\$)	• 95,56	• +5,60%	↑

## Quelques éléments particuliers :

- Données **banalisées**, vie courante
- Techniques nombreuses, **impacts majeurs**

# Les intervenants dans la finance de marché

## La finance :

- Science de la "gestion prospective des patrimoines et des deniers"

## Qu'échange-t'on sur les marchés ?

- Actions, obligations, devises, commodités, indices, produits dérivés
- **Sous-jacent** versus **Option**

## Qui trouve-t'on dans un marché ?

- Des **spéculateurs**
- Des **arbitragistes**
- Des **gestionnaires de risques**



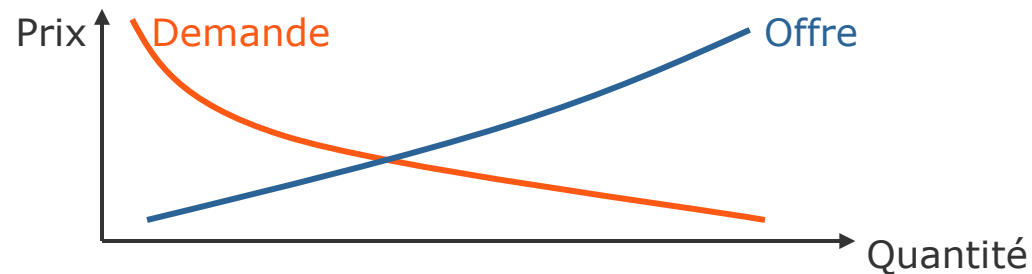
## Le cadre des marchés organisés

- Les **bourses** = associations mettant à disposition les outils de comptage et de garantie pour les offres/demandes
- Liés aux agrégateurs d'information et aux agences de notation

# Mais que font ces intervenants de marché ?

## De manière pratique :

- Chacun **gère un portefeuille** pour aujourd'hui et **demain**
- Réalisation de **stratégies** relatives au rendement et aux risques
- La rencontre en continu des offres et des demandes établit le **prix**



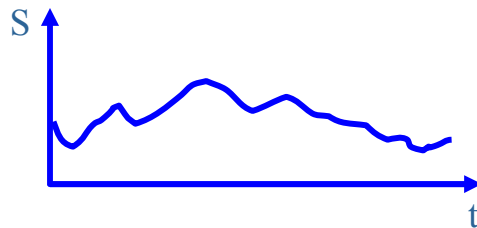
## Plus subtilement :

- Les **risques** sont le véritable objet des échanges de marché
- L'individu n'intervient qu'à la marge, est supposé rationnel...
- Le système est supposé sans frottements
- La **réglementation** est la seule limite aux actions des intervenants
- **L'information** est l'aiguillon temporel majeur des actions

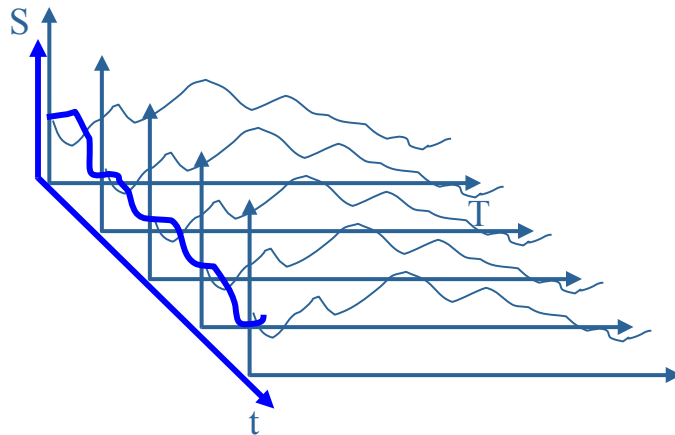
# Les types d'échanges sur les marchés

## Marchés spot, marchés à terme

- **Spot** : prix aujourd'hui pour l'instant présent



- A **terme** : prix aujourd'hui pour plusieurs instants futurs



## Contrats fermes, contrats optionnels

- Contrat **ferme** : engagement présent ou futur ferme (« future » ou « forward »)

*Exemples :*

- Livraison d'une denrée
- Emprunt à taux et durée fixés

- Contrat **optionnel** : engagement futur incluant une condition de réalisation (décision ou critère)

*Caractéristiques :*

- Droit mais pas obligation
- Clause de décision
- Clauses d'échéances
- Clauses de règlement

*Exemples :*

- Option sur action
- Option sur commodité
- Option réelle

# La finance de marché : une structure de gestion des informations prévisionnelles

Le risque provient d'une promesse d'engagement pour demain



Les marchés organisés :

- Risque de prix : formalisation des promesses dans **les options**
- Permettent des échanges standardisés **spot** ou à **terme**
- Opportunités entre **actifs**, **lieux d'échanges**, **dates d'actions**

C'est une structure de traitement de l'information temporelle :

- Pour la période présente mais surtout les **périodes futures**
- Qui **rassemble des informations** économiques, humaines... : c'est un filtre global d'informations sociétales
- Qui les confrontent pour **produire une évaluation** collective normalisée de risques et de décisions futures
- Qui **régie la publication** de ces informations et évaluations

# 2

Des mathématiques pour la finance :  
pourquoi, comment ?

# Des mathématiques pour analyser et gérer

## Un peu d'histoire, des mathématiques, appliqués en finance...

- Depuis l'antiquité, comptabilité et mesure de patrimoine
- Au milieu du 20ème siècle, optimisation de portefeuille
- Années 1970, calcul en environnement incertain
- Années 1980, réseaux informatiques et calcul numérique

## Des mathématiques pour la finance :

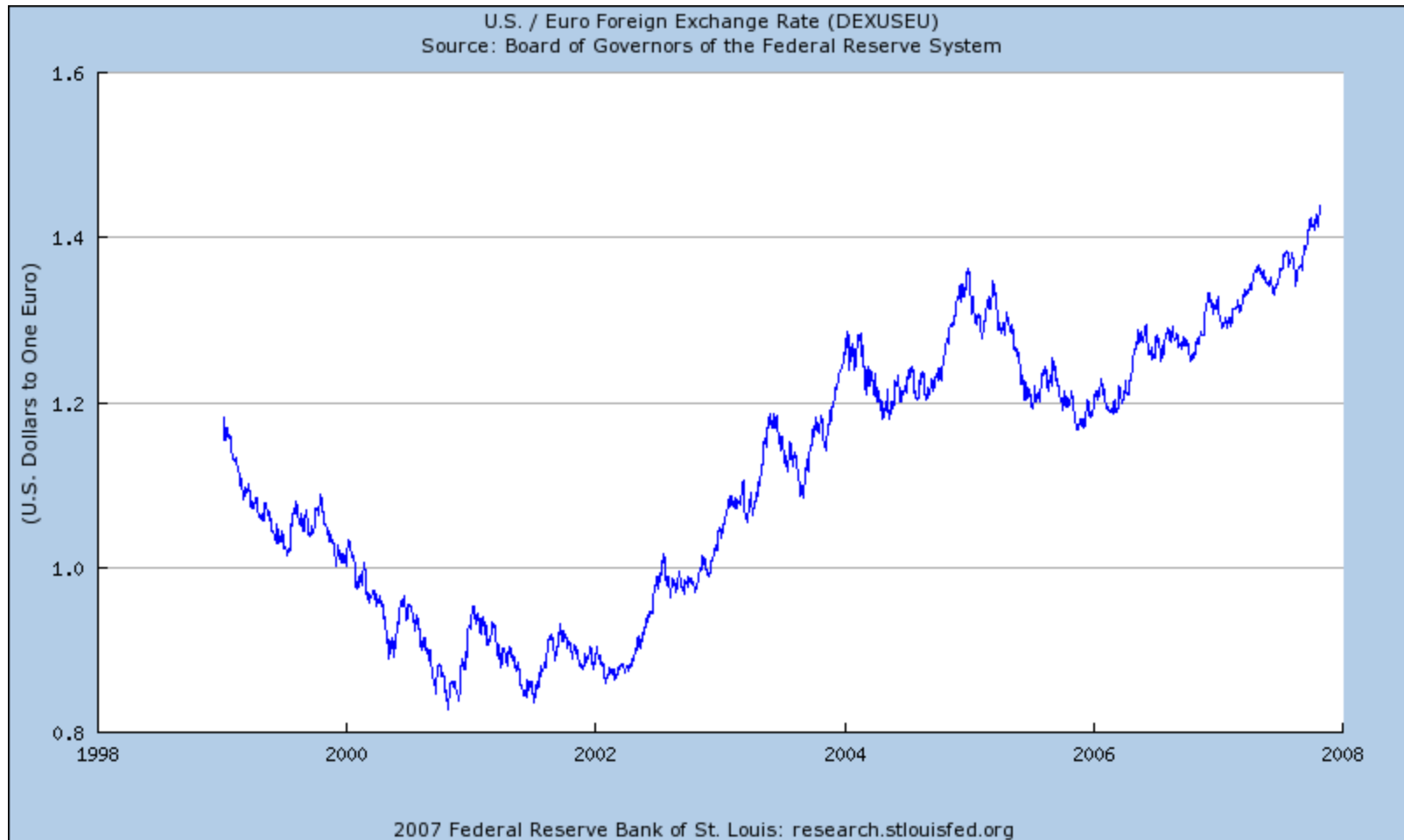
- Pour **mesurer** et **contrôler** les risques en présence d'aléas
- Pour **donner une valeur** à des décisions futures (options)
- Pour **gérer** le rendement et le risque d'un portefeuille

## Les mathématiques financières en application :

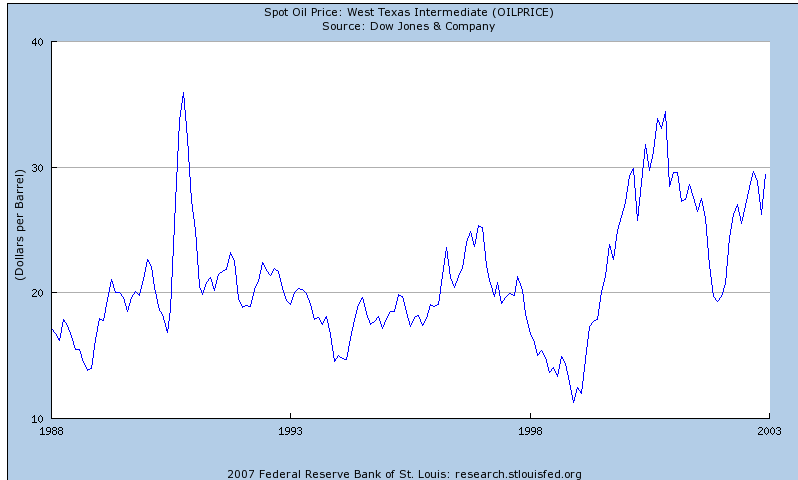
- Le calcul est contraint par le temps imparti
- La communication est cruciale
- L'impact est majeur

# Outil 1 : la modélisation stochastique des aléas (1/4)

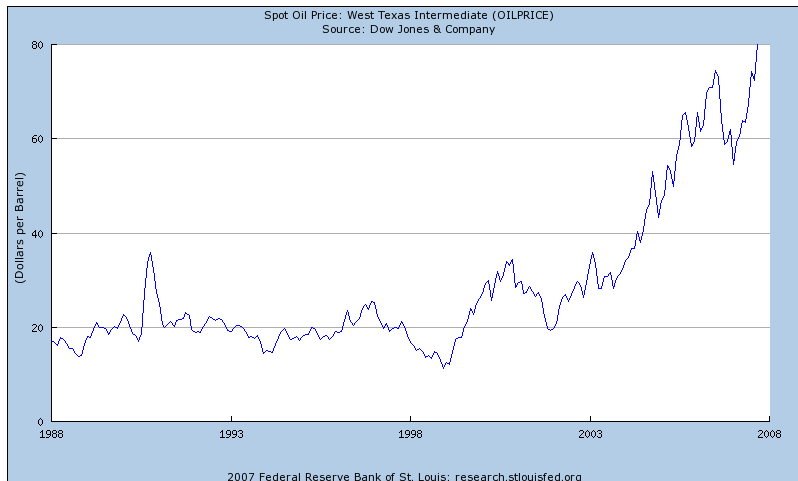
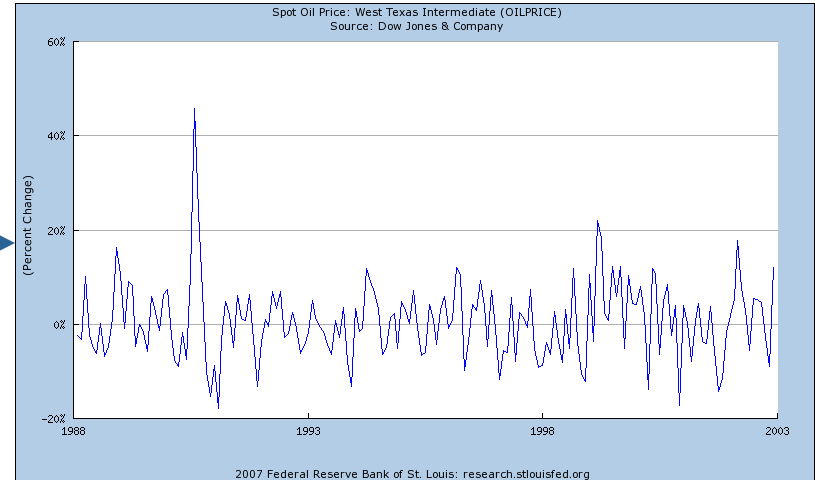
La base : historique des cours de marchés, de prix, d'indices



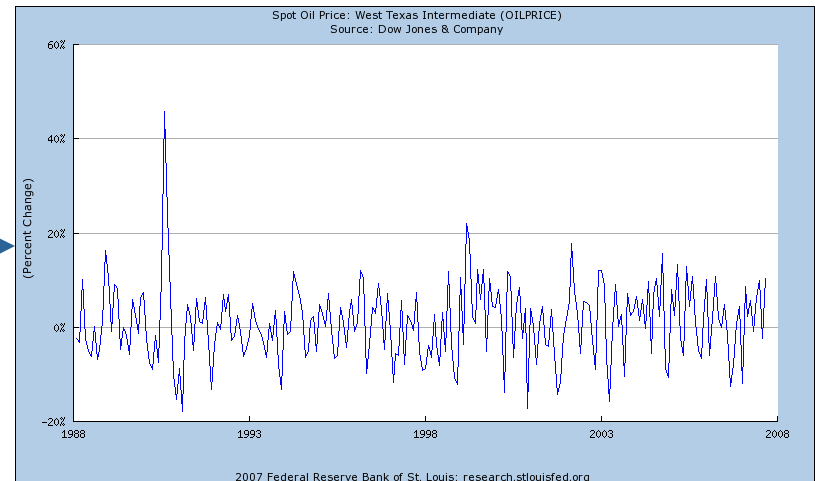
# Outil 1 : la modélisation stochastique des aléas (2/4)



Incréments



Incréments



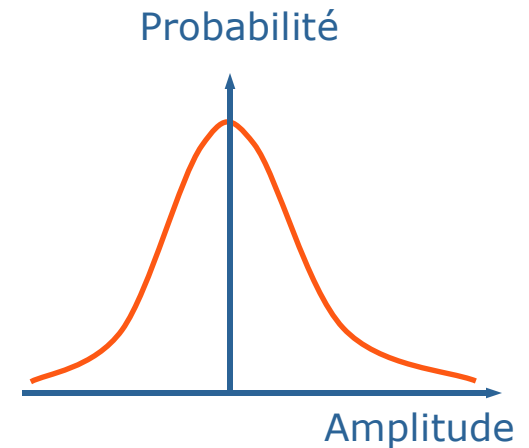
*Période plus longue 1988-2007*

*Les incréments restent semblables !*

# Outil 1 : la modélisation stochastique des aléas (3/4)

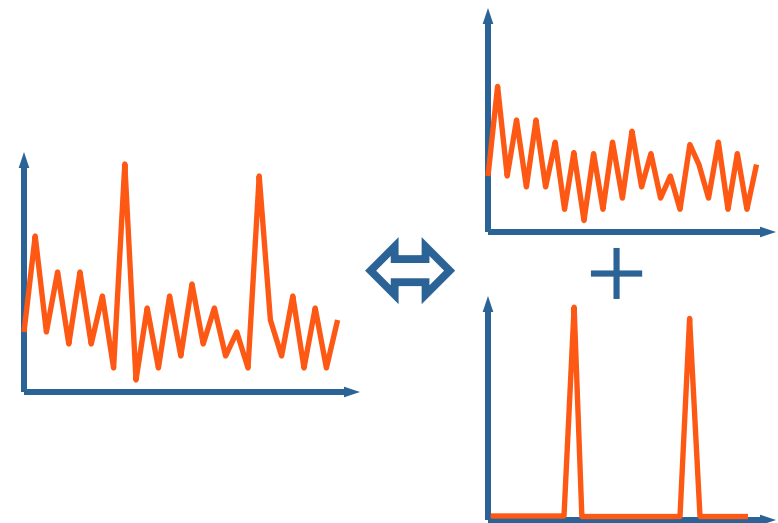
## Densité de probabilité des incréments :

- Markovienne paramétrique : utilisation de densités classiques : par exemple gaussienne
- Markovienne non-paramétrique : nécessite suffisamment de données
- A mémoire : AR, SAR...



## Complexification... très délicate !

- Combinaison des densités : par exemple, Gaussienne+Poisson
- Processus de Levy
- Processus non unimodaux



# Outil 1 : la modélisation stochastique des aléas (4/4)

## Ingrédients simples des processus stochastiques :

- **Processus** = modèle dynamique incorporant les aléas
- Modélisation (du logarithme) des **incrémentes** :  $\ln \left( \frac{x(T)}{x(0)} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k$
- Passage au continu, mouvement **brownien**
- Exemple de **modèle stochastique** d'évolution :  $\frac{dx(t)}{x(t)} = \mu dt + \sigma dW(t)$
- Ajout de **propriétés spécifiques** :
  - Retour à la moyenne, saisonnalité ou périodicité déterministe
  - Processus inter-dépendants (en temps ou en valeur)
- Lors de paramétrisations simples, calculs parfois explicites

## Cette « simplification » des aléas de prix doit permettre :

- La représentation des **événements défavorables** et/ou extrêmes
- Le **calcul numérique** effectif des options
- **L'estimation** robuste des paramètres

# Outil 2 : le calcul stochastique

Etude de la **variation** instantanée de richesse

=> **Équation différentielle stochastique (EDS)**

$$dX_t = K_t dt + H_t dW_t$$

Le calcul stochastique permet :

- L'évaluation des moments (espérance, variance) des processus
- Le calcul explicite des valeurs de certaines options

**Calcul différentiel sur des processus stochastiques :**

- Formules usuelles de dérivation : **fausses !**

- Nécessite le **calcul différentiel d'Itô** : si  $Y_t = f(t, X_t)$   
alors :

$$dY_t = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) dX_t + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) H_t^2 dt$$

- Utilise )abilité
- Complexe, mais conduit à des formules explicites

# Outil 3 : l'optimisation

## L'optimisation intervient principalement :

- Pour **minimiser** le risque (++++)
- Pour le **calcul numérique** des valeurs d'options (++)
- Pour **l'estimation** de paramètres par recalage (--)

## Mots-clé sur les méthodes courantes :

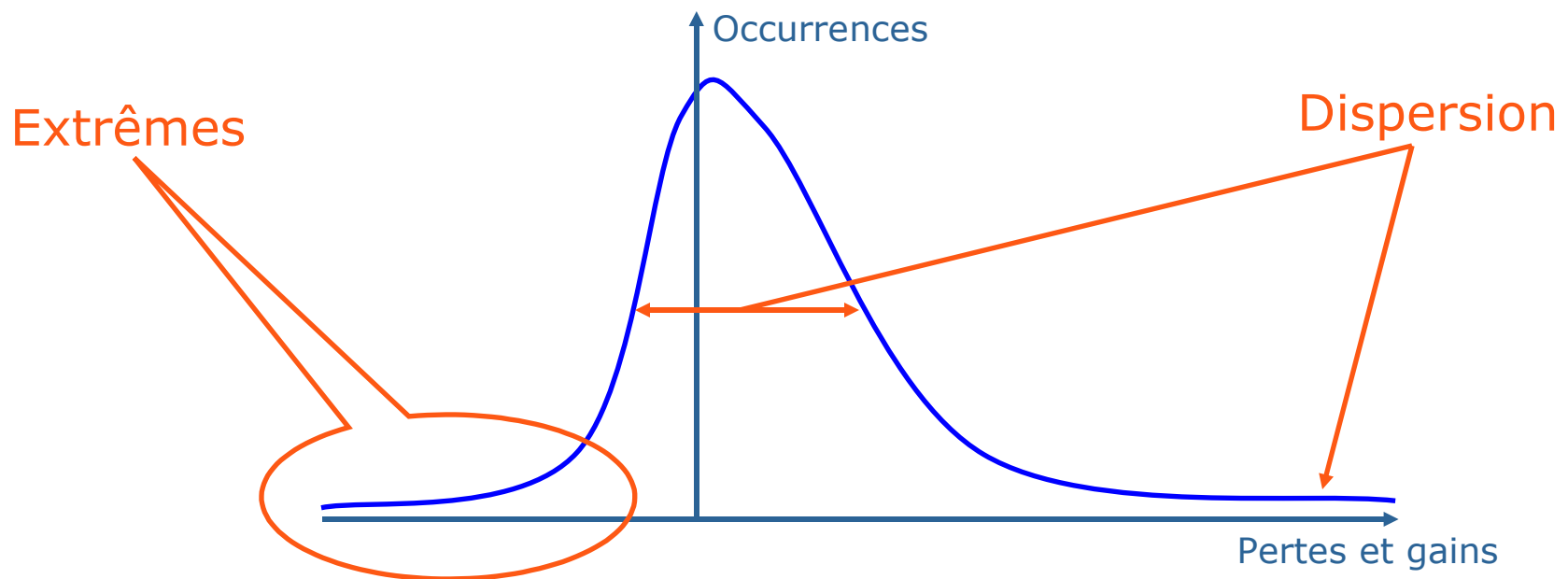
- La programmation dynamique
- Méthodes variationnelles de résolution d'équations différentielles
- Optimisation discrète, en nombres entiers

## Caractéristiques principales :

- Soit les problèmes sont énormes (contraintes informatiques)
- Soit les problèmes sont trop longs (contraintes opérationnelles)
- Soit leur solution explicite est connue

## Outil 4 : les mesures de risque (1/2)

La mesure du risque : c'est celle de la qualité des états du portefeuille selon les évolutions possibles des aléas



## Outil 4 : les mesures de risque (2/2)

La mesure de risque => la mise au point d'indicateurs

Objectifs pratiques pour des indicateurs de risque :

- **Décrire** : quantifier et qualifier les risques de marché
- **Contrôler** : établir et surveiller des limites opérationnelles
- **Réduire** : déterminer la tactique de diminution des risques
- **Décider** : établir une stratégie viable de risque/rentabilité

Des mesures courantes sur les variations de valeurs :

- D'origine **statistique** : variance, quantile (VaR)...
- D'origine **variationnelle** : sensibilités
- **Autres** : anormalité (stress), risque modèle (back), expertise

Contraintes d'usage des mesures de risque :

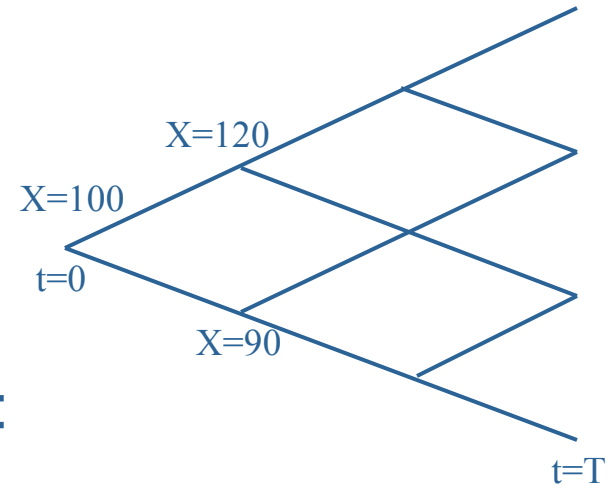
- Être raisonnablement **calculables** et optimisables
- Être **communicables** efficacement

# Outil 5 : méthodes de calculs numériques

## La valorisation des options :

Contraintes : calculs à **précision maîtrisée**

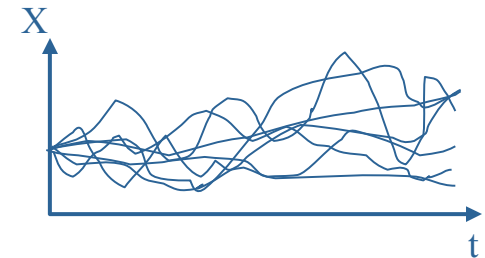
- Formules fermées
- Résolution par arbres
- Résolution par Monte-Carlo



## L'évaluation des risques de portefeuille :

Contraintes : calculs à **durée maîtrisée**

- Soit à partir de formules fermées
- Soit sur la base de simulations historiques
- Soit sur la base de simulations de Monte-Carlo



## L'optimisation et les stratégies :

Contraintes : **robustesse** et **communicabilité**

- Sur la base de scénarios historiques ou Monte-Carlo



# Ouvertures : des mathématiques à l'opérationnel

# Question 1 : la modélisation des aléas réels

## La modélisation stochastique des aléas nécessite :

- Des **modèles** stochastiques identifiables
- Des **données** statistiquement exploitables
- La maîtrise du **risque de modèle** par les utilisateurs

## Difficultés sur l'identification

- Des données inégalement réparties dans l'espace des observables
- Des valeurs parfois difficiles à interpréter
- Le modèle est souvent fixé « a priori »... et inadapté !

## Maîtrise du risque de modèle

- Les modèles sont multiples en fonction des objectifs : **cohérence** ?
- Tous les niveaux des chaînes décisionnelles veulent (doivent ?) **comprendre l'influence** détaillée des modèles
- **Impacts multiples** : risques, prix et provisions !

## Question 2 : la couverture imparfaite

### Les modèles présentent des approximations :

- **Économiques** : sans frottement, comportement rationnel, acteurs suffisamment nombreux, absence d'ententes cachées...
- **Temporelles** : ajustement continu, simultanéité des actions
- **Informationnelles** : prise en compte complète et instantanée

La gestion du risque ne l'annule pas, elle **réduit** le risque

### Implications sur les mécanismes de gestion de risque :

- **Théoriques** : intérêt pour la couverture robuste
- **Financières** : provisions et « stop-loss » indispensables
- **Pragmatiques** : l'expertise garde sa place dans la chaîne
- **Opérationnelles** : surveillance interne multi-niveaux
- **Réglementaires** : surveillance externe contraignante

# Question 3 : le calcul numérique adapté

L'utilisation **opérationnelle** du numérique n'est pas facile

## Prévisibilité stochastique du risque :

- Dépend des **modèles** stochastiques d'état
- Dépend des **données** et de leurs statistiques
- Repose sur des **mesures** d'états rares et/ou extrêmes

## Difficulté à renseigner les paramètres ou à conduire les calculs

- **Scénarisation** des cas extrêmes imaginables
- **Scénarisation** des modèles stochastiques trop compliqués

## Conséquences :

- Possibilité **d'imbriquer** des simulations et des « dire d'expert »
- Facilité de communication du résultat mais pas de son erreur
- Calculs **naturellement HPC** mais toujours trop coûteux...
- Difficulté de pondération et de **qualification des extrêmes**

# Question 4 : communiquer pour décider

La communication sous-tend directement des décisions

## Communiquer en finance :

- Une modélisation de la réalité... ou la réalité des modèles ?
- Les informations sont dans une unité unique : « l'euro probable »
- « Le temps, c'est de l'argent »... potentiel !
- Relations à l'économie, la théorie des jeux, la prise de risque...

## Communiquer des mathématiques en finance :

- **Compromis** entre maîtrise des erreurs et complexité
- **Causalité non déterministe**, le chaos n'est jamais loin
- L'acteur ne peut être un observateur **indépendant**
- « **Calculs** » et « **Règles** » sont antagonistes et complémentaires

# Une petite analyse de texte en guise de conclusion

Le Monde.fr

## Economie

actualités perspectives pratique annonces le desk le kiosque newsletters multimédia références EDITION ABONNES Abonnez-vous 6€ Mardi 13 novembre 2007

ACCUEIL MARCHÉS SOCIÉTÉS DÉPÊCHES ÉTUDES

CAC40 · 5 540,89 · +0,10% ↑ DOW JONES · 12 987,55 · -0,42% ↓ 1€ = 1,4609\$ · +0,59% ↑ OR (\$) · 806,45 · +1,91% ↑ BARIL PÉTROLE NEW-YORK (\$) · 95,76 · +1,09% ↑

FINANCE UNE ÉTUDE DE LA DEUTSCHE BANK

### Les "subprimes" pourraient coûter 400 milliards de dollars aux banques

LE MONDE | 13.11.07 | 13h59 • Mis à jour le 13.11.07 | 13h59

La facture de la crise financière s'alourdit pour les banques. Lundi 12 novembre, une note des analystes de la Deutsche Bank a évalué à 400 milliards de dollars (273 milliards d'euros) les pertes pour le secteur bancaire mondial liées à l'effondrement du marché des crédits immobiliers à risque aux Etats-Unis (*subprime*).

Mike Mayo, analyste au sein de l'établissement financier allemand, évalue entre 150 et 250 milliards de dollars les pertes directement liées aux subprimes et à 150 milliards celles provoquées par le plongeon des prix des produits financiers dérivés.

Les difficultés des banques sont à relier au retournement du marché immobilier aux Etats-Unis. La chute des prix des logements a provoqué depuis cet été une grave crise financière. Nombre de ménages américains modestes avaient contracté des crédits hypothécaires, et la chute de la valeur de leur maison les a rendus insolvables. Plus d'un million de foyers ont déjà fait l'objet d'une saisie depuis janvier 2007. En outre, du fait de la sophistication financière, les crédits subprimes se sont diffusés sur les marchés, transformés et démultipliés, en produits dérivés que les banques du monde entier ont en portefeuille.

Aujourd'hui les financiers tentent d'évaluer les dégâts mais l'exercice est délicat. "Tous les trois jours une nouvelle annonce oblige à revoir les chiffres", s'alarme un courtier à New York. Si les experts s'entendent sur le montant approximatif des pertes directement liées aux subprimes, chiffrer les dépréciations des produits dérivés reste très difficile car la crise provoque un effet domino et affecte progressivement tout le marché du crédit y compris des titres qui n'ont parfois aucun lien avec les subprimes.



AFP/Spencer Platt

Le siège de Citigroup à New York City, le 7 juin 2005. La première banque mondiale a été durement touchée par la crise des subprimes.

Le coût du risque...

L'impact des produits dérivés

La puissance de l'information

# Questions, discussions

