

N° d'ordre : 2368

ACADÉMIE DE TOULOUSE  
UNIVERSITÉ PAUL SABATIER  
– TOULOUSE III –

## THÈSE

présentée en vue de l'obtention du diplôme de  
**DOCTORAT EUROPÉEN DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER**

Spécialité : **Océanographie**

par **Laurence FLEURY**

## ÉQUILIBRES MULTIPLES DE LA CIRCULATION THERMOHALINE

Soutenue le 05 juillet 1996 devant le jury composé de :

|          |         |               |                    |
|----------|---------|---------------|--------------------|
| Madame   | Paola   | CESSI         | Rapporteur         |
| Monsieur | Michel  | CREPON        | Rapporteur         |
| Monsieur | Eric    | DELEERSNIJDER | Rapporteur         |
| Monsieur | Henk    | DIJKSTRA      | Examineur          |
| Monsieur | Robert  | ROSSET        | Président du jury  |
| Monsieur | Olivier | THUAL         | Directeur de Thèse |

Travaux effectués au CERFACS  
Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique,  
42, avenue G. Coriolis, 31057 Toulouse Cedex, France



”La mer est une route lisse pour trouver les mystères, l’inconnu. L’or est dans la lumière, autour de moi, caché dans le miroir de la mer. Je pense à ce qui m’attend, à l’autre bout de ce voyage, comme à une terre où je serais déjà allé autrefois, et que j’aurais perdue. Le navire glisse sur le miroir de la mémoire. Mais saurais-je comprendre, quand j’arriverai ?”

Jean-Marie Le Clézio  
“*Le chercheur d’or*”



Un immense merci à Olivier Thual qui m'a encadrée tout au long de ce travail avec un enthousiasme et une attention hors du commun. Nos après-midi de travail comme nos longues discussions sur le pourquoi et le comment d'une équipe démocratique constituent de précieux souvenirs.

Je remercie vivement Paola Cessi, avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer dès le début de mon travail. Ses idées, son énergie et son amitié ont toujours été très motivants.

Merci également à Henk Dijkstra, qui m'a accueillie à l'Université d'Utrecht pendant plusieurs mois et qui m'a guidée dans les tours et détours des diagrammes de bifurcation. Sa patience et son enthousiasme ont su rendre mon séjour à l'IMAU particulièrement intéressant.

Je suis très reconnaissante à mes rapporteurs Paola Cessi, Michel Crépon et Eric Deleersnijder d'être venus à bout de ce manuscrit et de m'avoir fait part de bien des remarques intéressantes et à Robert Rosset d'avoir présidé mon jury de thèse.

J'ai eu la chance d'effectuer ma thèse au sein d'un ... climat plus qu'agréable : celui de l'équipe "Climate Modelling and Global Change" du Cerfacs. Je tiens ici à saluer Isabelle pour sa gentillesse, son entrain et ses charlottes, Sophie pour sa vision réaliste et amusée de la vie et pour la période très agréable où nous avons partagé un bureau, Gilles mon camarade d'infortune des cours de DEA aux affres de la rédaction en passant bien heureusement par quelques bars toulousains, Marc grâce à qui l'atmosphère sonore du couloir a toujours été au top : entre deux jurons un slow des seventies, Jorge dont l'humour ravageur a su nous expliquer les effets les plus dramatiques de la déforestation, David qui m'a confirmé que la bière "ça aide un peu" en toutes circonstances et nos coupleurs fous Eric l'amoureux de l'horizontale, avec vagues, et Laurent celui de la verticale, avec prises. Mes amitiés également à ceux qui sont passés brièvement dans l'équipe ou arrivés peu avant mon départ : Catherine, Christophe et Thierry M. qui ont su égayer notre bureau, ainsi que Pierre et Philippe qui pourraient conjointement travailler au concept de l'igloo dans l'art moderne. Un tendre merci enfin à Thierry L. pour son soutien au cours de ma dernière année de thèse et son affection.

Je pense en outre aux autres membres du Cerfacs, grâce à qui il fait si bon y travailler, en particulier l'équipe administrative, l'équipe de support informatique, les cavaliers d'un jour ou bien plus, les adeptes de la gym à midi et ceux de la Kfet à toute heure. Merci à tous pour votre bonne humeur et votre disponibilité.

Je dois également beaucoup à mes collègues d'Utrecht qui ont su rendre ma visite à l'IMAU très plaisante. Merci à Will, Paul, Tjeerd, Michiel, Jordi, Sybren et tous les autres.

Pendant mes années de thèse j'ai aussi vécu deux expériences importantes : la pratique du théâtre et je salue amicalement mes partenaires, en particulier Christophe, Albéric, Nathalie, Gilles, Manu et Marie-Pierre, et celle de l'enseignement et je tiens à remercier Jean-Claude Yakoubsohn de m'avoir confié des groupes d'étudiants.



# Table des Matières

|                                                       |            |
|-------------------------------------------------------|------------|
| <b>Résumé</b>                                         | <b>v</b>   |
| <b>Abstract</b>                                       | <b>vii</b> |
| <b>I Introduction</b>                                 | <b>1</b>   |
| <b>II Variabilité de la circulation thermohaline</b>  | <b>5</b>   |
| II.1 Observations . . . . .                           | 5          |
| II.1.1 Données paléoclimatiques . . . . .             | 5          |
| II.1.2 Mécanismes invoqués . . . . .                  | 7          |
| II.2 Modélisation . . . . .                           | 8          |
| II.2.1 Introduction . . . . .                         | 8          |
| II.2.2 Interface océan–atmosphère . . . . .           | 9          |
| II.2.3 Equilibres multiples . . . . .                 | 11         |
| (a) Modèles de boîtes . . . . .                       | 11         |
| (b) Modèles océaniques bidimensionnels . . . . .      | 13         |
| (c) Modèles océaniques tridimensionnels . . . . .     | 17         |
| (d) Modèles couplés . . . . .                         | 20         |
| II.2.4 Oscillations . . . . .                         | 22         |
| (a) Modèles de boîtes . . . . .                       | 23         |
| (b) Variabilité décennale et interdécennale . . . . . | 24         |
| (c) Variabilité séculaire . . . . .                   | 27         |
| (d) Variabilité millénaire . . . . .                  | 29         |
| (e) Sensibilités . . . . .                            | 31         |

|            |                                                              |           |
|------------|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>III</b> | <b>Modèle bidimensionnel de Boussinesq</b>                   | <b>33</b> |
| III.1      | Modèle de l'étude . . . . .                                  | 33        |
| III.1.1    | Equations . . . . .                                          | 33        |
| III.1.2    | Conditions aux limites . . . . .                             | 34        |
| III.1.3    | Adimensionnement . . . . .                                   | 34        |
| III.1.4    | Hypothèses de l'étude . . . . .                              | 36        |
| III.2      | Glossaire de la théorie des bifurcations . . . . .           | 37        |
| III.3      | Comportement dynamique du modèle 2D de Boussinesq . . . . .  | 40        |
| III.3.1    | Thual & McWilliams (1992) . . . . .                          | 41        |
| III.3.2    | Quon & Ghil (1992 et 1995) . . . . .                         | 46        |
| III.3.3    | Dijkstra & Molemaker (1997) . . . . .                        | 49        |
| III.3.4    | Synthèse . . . . .                                           | 52        |
| <b>IV</b>  | <b>Modèle asymptotique</b>                                   | <b>53</b> |
| IV.1       | Théorie asymptotique . . . . .                               | 53        |
| IV.1.1     | Modèle 2D . . . . .                                          | 53        |
| IV.1.2     | Développement asymptotique . . . . .                         | 54        |
| (a)        | Chemin asymptotique . . . . .                                | 54        |
| (b)        | Résolution au premier ordre . . . . .                        | 55        |
| (c)        | Résolution au second ordre . . . . .                         | 55        |
| (d)        | Equation de compatibilité au troisième ordre . . . . .       | 56        |
| IV.1.3     | Equations asymptotiques . . . . .                            | 58        |
| IV.1.4     | Solutions asymptotiques . . . . .                            | 59        |
| IV.1.5     | Une variante du développement asymptotique . . . . .         | 59        |
| IV.2       | Analogie avec les modèles de boîtes . . . . .                | 61        |
| IV.2.1     | Formulation d'un modèle à $N$ boîtes . . . . .               | 61        |
| IV.2.2     | Modèle adimensionné . . . . .                                | 62        |
| IV.2.3     | Equations asymptotiques du modèle . . . . .                  | 64        |
| IV.3       | Structure bifurcatoire du modèle asymptotique . . . . .      | 65        |
| IV.3.1     | Le code AUTO . . . . .                                       | 65        |
| IV.3.2     | Implantation de l'équation asymptotique . . . . .            | 65        |
| IV.3.3     | Evolution de la structure bifurcatoire selon $\mu$ . . . . . | 67        |



|           |                                                                            |            |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| IV.3.4    | Evolution de la structure bifurcatoire selon $k$                           | 70         |
| IV.3.5    | Sensibilité au paramètre $\gamma_0$                                        | 72         |
| <b>V</b>  | <b>Interprétation géométrique et validation de l'approche asymptotique</b> | <b>75</b>  |
| V.1       | Introduction                                                               | 75         |
| V.2       | Article Fleury & Thual (1997)                                              | 75         |
| <b>VI</b> | <b>Modèles avec rotation et forçage dynamique</b>                          | <b>115</b> |
| VI.1      | Modèle bidimensionnel                                                      | 115        |
| VI.1.1    | Modèle                                                                     | 115        |
| (a)       | Equations et conditions aux limites                                        | 115        |
| (b)       | Adimensionnement                                                           | 116        |
| VI.1.2    | Comportement du modèle                                                     | 118        |
| (a)       | Cas de référence                                                           | 118        |
| (b)       | Effet de la rotation seule                                                 | 122        |
| (c)       | Effet du forçage dynamique                                                 | 123        |
| VI.2      | Théorie asymptotique                                                       | 127        |
| VI.2.1    | Modèle                                                                     | 127        |
| (a)       | Equations                                                                  | 127        |
| (b)       | Forçages et conditions aux limites                                         | 127        |
| (c)       | Formulation du forçage dynamique                                           | 128        |
| (d)       | Adimensionnement                                                           | 128        |
| VI.2.2    | Développement asymptotique                                                 | 130        |
| (a)       | Chemin asymptotique                                                        | 130        |
| (b)       | Résolution ordre par ordre                                                 | 130        |
| (c)       | Equations asymptotiques                                                    | 132        |
| VI.2.3    | Structure bifurcatoire du modèle asymptotique                              | 133        |
| (a)       | Implantation de l'équation asymptotique                                    | 133        |
| (b)       | Cas $F_U$ symétrique et rotation constante                                 | 134        |
| (c)       | Cas $F_U$ antisymétrique et rotation constante                             | 140        |
| (d)       | Cas $F_U$ symétrique et rotation antisymétrique                            | 141        |
| (e)       | Cas $F_U$ et rotation antisymétriques                                      | 142        |

|                           |            |
|---------------------------|------------|
| (f) Synthèse . . . . .    | 143        |
| VI.3 Conclusion . . . . . | 143        |
| <b>VII Conclusion</b>     | <b>145</b> |
| <b>Annexe A</b>           | <b>149</b> |
| <b>Annexe B</b>           | <b>175</b> |
| <b>Bibliographie</b>      | <b>181</b> |

# RÉSUMÉ

En réponse aux gradients du champ de densité de surface, de grandes cellules convectives se développent dans l'océan. Elles sont à l'origine d'une importante redistribution méridienne de chaleur et de substances chimiques. Les forçages de chaleur et d'eau douce en surface agissent de façon antagoniste sur la densité et sur la circulation résultante, dite circulation thermohaline. Cette compétition entre les effets thermique et salin autorise plusieurs modes opératoires de la convection thermohaline.

Les équilibres multiples de la circulation thermohaline sont ici étudiés via la comparaison entre les résultats d'un modèle numérique bidimensionnel et ceux d'une équation asymptotique dérivée dans la limite d'une couche océanique fine.

Le modèle bidimensionnel (latitude – profondeur) considéré est basé sur les équations de Boussinesq écrites dans un bassin rectangulaire à fond plat. Le forçage de surface est de type mixte (température et flux d'eau douce imposés). L'espace de contrôle du système se compose de cinq paramètres adimensionnels et de deux fonctions normées représentant les profils méridiens des forçages.

Numériquement, une étude paramétrique a été entreprise, qui a permis de situer le lieu des équilibres multiples dans l'espace des amplitudes des forçages thermique et salin. Plusieurs profils de forçage ont été étudiés. Ils furent choisis pour la richesse des comportements dynamiques qu'ils induisaient (équilibres multiples, présence de fronts thermohalins).

Un développement asymptotique de ce modèle dans la limite d'un faible rapport d'aspect permet de réduire le problème à une équation asymptotique monodimensionnelle (latitude), dont les solutions correspondent aux minima d'un potentiel. Cette équation supporte des équilibres multiples, définis sur seulement certaines bandes de latitude du bassin.

Une interprétation géométrique de l'équation asymptotique est proposée. Elle permet de déduire la topologie des solutions et de déterminer les parties du domaine où la théorie asymptotique est mise en défaut.

Une comparaison entre solutions asymptotiques et résultats des simulations numériques montre que l'analyse asymptotique est un outil simple et puissant de prédiction des équilibres simulés.

Une méthode de suivi des solutions stationnaires dans l'espace des paramètres a été utilisée pour étudier l'équation asymptotique régularisée par l'addition d'un terme d'hyperdiffusivité. La structure bifurcatoire observée est analogue à celle du modèle bidimensionnel.

Une paramétrisation de la rotation et du forçage dynamique a ensuite été introduite dans le modèle bidimensionnel. L'équation asymptotique correspondante a été dérivée. Les solutions stationnaires des modèles 1D et 2D sont étudiées. Dans les deux modèles, une imperfection est introduite, de sorte que des solutions asymétriques peuvent être observées sous un forçage symétrique, en l'absence d'une bifurcation brisant la symétrie.

# ABSTRACT

Forced by the surface density field gradients, large scale convective cells develop in the ocean. They induce an important meridional redistribution of heat and chemicals. The temperature and freshwater surface forcings have antagonistic effects on the density field and on the resulting thermohaline circulation. Due to the competition between the two forcings, the circulation can operate in different modes.

Here, the multiple equilibria of the thermohaline circulation are studied through the comparison between numerical results of a bidimensional model and predictions of an asymptotic expansion derived from the model in the limit of a thin layer.

The bidimensional model (latitude – depth) is based on the Boussinesq equations in a rectangular basin with flat bottom. Mixed boundary conditions (fixed temperature field and salinity flux) are imposed at the surface. The model is controlled by five adimensional parameters and the two forcing meridional profiles.

Through a numerical parametric study, the location of multiple equilibria has been located in the forcing amplitude plane. We considered many forcing profiles, chosen for their ability to induce interesting dynamical behaviour of the thermohaline circulation (multiple equilibria, thermohaline fronts).

Performing an asymptotic expansion in the limit of a thin fluid layer, the bidimensional model is reduced to only one monodimensional (latitude) evolution equation. The asymptotic equation supports multiple solutions, corresponding to the minima of a potential. One of these solutions is globally defined in the basin. The others are only defined on certain ranges of latitudes.

A geometric interpretation of the asymptotic equation is proposed. The topology of its solutions is deduced, as well as the parts of the domain where the asymptotic theory is not valid.

Comparing asymptotic solutions and numerical results, the asymptotic analysis is found to be a very simple and powerful tool to predict the simulated equilibria.

The asymptotic equation is regularized by the addition of a hyperdiffusivity term. Its branches of steady states are then solved in parameter space using path following techniques. The obtained catastrophe structure is analogous to the one of the bidimensional model.

Rotation and wind stress forcing at the surface have been parametrized in the bidimensional model. A corresponding asymptotic expansion has been derived. The steady solutions of asymptotic equation and fluid model are studied. In both models, an imperfection is introduced, such that asymmetric solutions are observed under a symmetric surface forcing without any symmetry breaking bifurcation occurs.



# CHAPITRE I

## Introduction

### - La circulation thermohaline

La circulation générale océanique est régie par la friction du vent à l'interface océan-atmosphère et par les gradients de densité des eaux de surface.

L'action du vent s'exerce sur une couche de surface de quelque cent mètres de profondeur et génère une circulation essentiellement horizontale sous forme de grandes boucles de courant (ou gyres) d'extension comparable à la largeur du bassin océanique, dans lequel elles se développent.

Le champ de densité de surface varie avec les quantités de chaleur et d'eau douce fournies à l'océan par l'atmosphère, la glace de mer (rejet de sel lors de la formation de glace de mer et, inversement, apport d'eau douce en cas de fonte) et les continents (apport des rivières, ruissellement). Quand la densité des eaux de surface excède celle des couches inférieures, la colonne d'eau est gravitationnellement déstabilisée et une cellule convective se forme. Les eaux de surface plongent sous les eaux moins denses qu'elles, puis se répandent horizontalement quand elles atteignent une masse d'eau de leur densité. En surface, un courant horizontal se développe pour compenser le déficit de masse créé par la plongée des eaux de surface. L'ensemble du mouvement s'effectue essentiellement dans le plan latitude – profondeur. Le terme *circulation thermohaline* (du grec “*thermos*” pour chaud et “*hals*” pour sel) est utilisé pour désigner de telles cellules convectives de grande échelle spatiale : plus de 1000 km horizontalement et de 300 m verticalement.

A l'échelle du globe terrestre, les forçages de chaleur et d'eau douce agissent de façon antagoniste sur la densité des eaux de surface et donc sur la circulation thermohaline résultante. Dans les zones tropicales et subtropicales, l'océan gagne de la chaleur, ce qui tend à réduire la densité superficielle, mais la forte évaporation régnante génère des eaux de surface très salines et donc alourdies. A l'inverse, les eaux de surface des hautes latitudes connaissent une augmentation de densité par perte de chaleur au profit de l'atmosphère et une diminution de densité par gain d'eau douce, les précipitations y dominant nettement l'évaporation. Cette tendance générale comporte des exceptions ; ainsi les précipitations sont abondantes dans la zone de convergence intertropicale et

peu importantes dans les régions polaires.

### - Le “conveyor belt” actuel

Dans l’océan actuel, la convection profonde s’effectue principalement pendant l’hiver dans certaines régions subpolaires, où le refroidissement hivernal et le rejet de sel lors de la formation de glace de mer s’accordent à accroître la densité des eaux de surface. Ainsi la plus importante plongée d’eau a lieu dans la zone Nord Atlantique en mer du Labrador, mer du Groenland et mer de Norvège. Une fraction plus faible de l’eau profonde océanique est formée sur le pourtour du continent Antarctique, particulièrement en mer de Weddell.

Dans l’océan Pacifique Nord, aucune plongée d’eau profonde n’est observée. Les salinités de surface y sont en effet très faibles, et l’augmentation de densité due au refroidissement hivernal ne suffit pas à déclencher le processus de convection profonde. La faible salinité de l’océan Pacifique superficiel est partiellement expliquée par plusieurs facteurs tels la grande largeur du bassin, qui ne favorise pas les phénomènes d’évaporation au contact de masses d’air continental sec, ou l’absence de mer saline adjacente, comme la mer Méditerranée pour l’océan Atlantique.

La circulation thermohaline globale est schématiquement décrite par le *conveyor belt* (ou tapis roulant), proposé par **Gordon (1986)** et **Broecker (1991)** et représenté sur la figure I.1. Franchissant les seuils des mers de Norvège et du Groenland, l’eau profonde créée dans la zone Nord Atlantique rejoint un courant profond en provenance de la mer du Labrador pour former la *NADW* (North Atlantic Deep Water). Cette masse d’eau s’écoule en profondeur jusqu’au sud du bassin Atlantique, où elle se mélange avec l’eau profonde formée au sud de l’Atlantique, notamment en mer de Weddell. Puis elle subit un lent mouvement de remontée vers la thermocline et se trouve entraînée par le courant circumpolaire Antarctique, qui tourne d’est en ouest autour de ce continent. Ainsi, elle se propage dans les océans Indien et Pacifique, où elle remonte lentement à la surface. La branche de retour du *conveyor belt* est assurée par des courants de subsurface chauds, qui passent entre les îles indonésiennes, traversent le bassin Indien, contournent l’Afrique et gagnent l’Atlantique Nord.

### - Impact Climatique

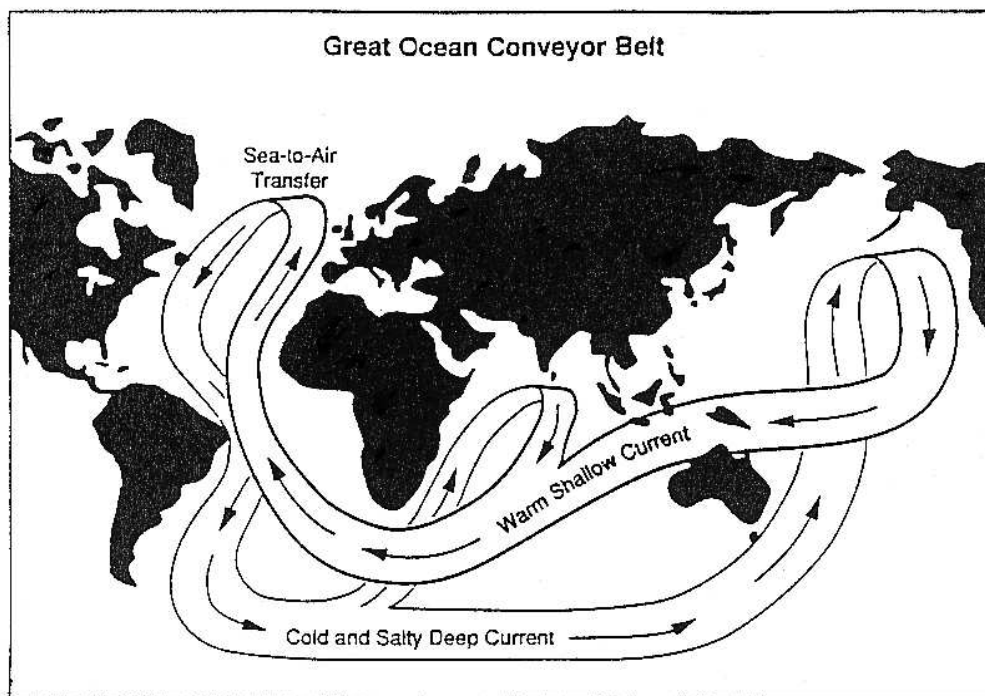
Le lent brassage des océans, que constitue le *conveyor belt*, est à l’origine d’une redistribution immense de chaleur, de salinité et de substances chimiques dans l’océan mondial. En particulier, la circulation actuelle induit dans le bassin Atlantique un transport de chaleur vers les hautes latitudes nord, qui contribue à la clémence des climats européens et s’oppose à une éventuelle avancée des calottes de glace polaires.

L’étude de nombreuses données paléoclimatiques suggère que la circulation thermohaline a pu connaître dans le passé d’autres modes opératoires. Ainsi les climats les plus chauds (périodes interglaciaires ou interstades chauds pendant une période



glaciaire) sont associés, dans les scénarii paléoclimatiques, à des circulations thermohalines proches du *conveyor belt* actuel. Les climats plus froids correspondraient soit à une convection thermohaline peu intense et/ou de moindre profondeur, soit, plus radicalement, à une cessation complète de formation d'eau profonde dans la zone Nord Atlantique. La possibilité d'une inversion des rôles respectifs des bassins Atlantique et Pacifique est aussi envisagée. Ainsi la plongée d'eau se ferait dans la zone Nord Pacifique, et la circulation globale serait un *conveyor belt* inverse.

Ces différentes hypothèses sont étayées par la forte sensibilité de la circulation thermohaline dans les simulations numériques. En effet, depuis Stommel (1961), de nombreux auteurs ont pu mettre en évidence l'existence d'équilibres multiples et d'oscillations de la circulation thermohaline. Leurs observations reposent sur des modèles aussi différents les uns des autres que des modèles de boîtes, des modèles numériques d'océan bidimensionnels (plan latitude – profondeur) ou tridimensionnels et des modèles couplés océan-atmosphère simplifiés ou complets. Si les modèles tridimensionnels complexes sont les mieux adaptés aux études à caractère réaliste, les modèles simplifiés s'imposent dans le cadre d'études de sensibilité précises. Ces modèles permettent en effet d'isoler facilement un processus physique particulier et sont peu coûteux en temps de calcul.



**Figure I.1** : Représentation schématique du *conveyor belt* (d'après Broecker (1987)).

## - Présentation de la thèse

Ce travail s'intéresse particulièrement à la structure bifurcatoire de la circulation thermohaline. L'étude est menée au travers de la comparaison entre les résultats d'un modèle numérique bidimensionnel (2D) d'océan et ceux d'un développement asymptotique de ce modèle dans la limite d'une couche mince.

Le deuxième chapitre donne une vue d'ensemble de la variabilité de la circulation thermohaline, telle qu'enregistrée dans les données paléoclimatiques et simulée numériquement. L'effet de certaines paramétrisations en usage dans les modèles actuels est souligné.

Le modèle 2D utilisé ici est basé sur les équations de Boussinesq. Il est décrit au chapitre trois. Y sont ensuite précisément relatées plusieurs études menées à l'aide de modèles analogues et visant, notamment, à étudier sa structure bifurcatoire.

Au quatrième chapitre, la dérivation du développement asymptotique dans la limite d'une couche fine est expliquée. Le problème est ainsi réduit à une seule équation d'évolution monodimensionnelle (latitude). Un modèle de boîtes est présenté dont les équations sont l'exacte discrétisation du modèle asymptotique. L'équation asymptotique présente des équilibres multiples, définis sur seulement certaines bandes de latitude du bassin. Mais elle est régularisée par l'addition d'un terme d'hyperdiffusivité. Dans ce cas, sa structure bifurcatoire est étudiée et comparée à celle obtenue avec le modèle bidimensionnel et présentée au troisième chapitre.

Une interprétation géométrique de l'équation asymptotique non régularisée est proposée au chapitre cinq. Les solutions asymptotiques sont comparées aux états d'équilibre du code numérique 2D pour différents forçages de surface. Les jeux de forçages thermique et salin choisis permettent d'observer des comportements intéressants, tels l'existence d'équilibres multiples et la formation de fronts thermohalins. L'analyse asymptotique se révèle apte à prédire de tels comportements.

Au sixième chapitre, la physique du modèle est améliorée par l'ajout d'une paramétrisation de la rotation et du forçage dynamique. Le développement asymptotique correspondant est dérivé. Les structures bifurcatoires des deux modèles 1D et 2D sont comparées.

Suivent une conclusion de l'étude et une présentation de ses perspectives.

## CHAPITRE II

# Variabilité de la circulation thermohaline

## II.1 Observations

### II.1.1 Données paléoclimatiques

L'étude des archives naturelles de la terre, telles les calottes glaciaires ou les sédiments océaniques et lacustres, à l'aide de méthodes isotopiques, géochimiques ou micropaléontologiques, permet de mettre en évidence les grands cycles d'évolution du système climatique.

Cette variabilité peut en partie être expliquée par celle du forçage extérieur. En effet, la variation des paramètres orbitaux de la terre modifie l'insolation qu'elle reçoit. La théorie astronomique de **Milutin Milanković (1941)** indique des périodicités de variations de 100.000 ans, 41.000 ans et environ 20.000 ans pour, respectivement, l'excentricité de l'orbite terrestre, l'obliquité de la terre et l'angle de précession des équinoxes. Ces périodes apparaissent clairement dans les variations climatiques du passé.

Mais le cycle à 100.000 ans observé correspond à l'alternance des grandes périodes glaciaires et interglaciaires et ne peut s'expliquer par les seules variations d'insolation liées à celles de l'excentricité terrestre. Ces faibles variations ont néanmoins pu initier des mécanismes ayant amplifié, par tout un jeu d'interactions, la réponse du système climatique. Parmi les mécanismes envisagés, citons les changements d'albédo, liés à l'extension de la couverture neigeuse, ou les modifications de la composition atmosphérique avec la température. Certaines données suggèrent plutôt une réorganisation des circulations océaniques et atmosphériques préalable à l'étendue ou au retrait des calottes polaires. Ainsi, un refroidissement considérable a été enregistré en mer de Norvège plusieurs milliers d'années avant l'entrée dans la dernière déglaciation. Et un réchauffement du système climatique, particulièrement sensible dans l'hémisphère Sud, aurait précédé l'avant-dernière déglaciation.

L'existence d'une variabilité interne du système climatique s'impose encore plus nettement pour expliquer les cycles d'évolution rapides et de grande amplitude observés durant, par exemple, la dernière période glaciaire–interglaciaire. Ainsi l'étude de sédiments océaniques du bassin Nord Atlantique ou de carottes de glace provenant du Groenland révèlent une forte variabilité à l'échelle du millier d'années.

Pendant la dernière période glaciaire, des épisodes chauds ont été identifiés. Si certains semblent avoir été essentiellement cantonnés à la zone Nord Atlantique, d'autres ont eu des répercussions à l'échelle planétaire et sont identifiables dans des carottes de glace de l'Antarctique ou des sédiments océaniques provenant du bassin Pacifique. Les *événements de Heinrich* durent 1000 à 2000 ans, présentent une quasi-périodicité de 7.000 à 10.000 ans et seraient dus à une instabilité de la calotte glaciaire Laurentide ; la débâcle massive d'icebergs ainsi générée dans l'Atlantique Nord perturbant fortement la circulation océanique. De tels événements s'accompagnent d'une baisse des température et salinité de surface et sont suivis d'un réchauffement très brutal. Ils ont une signature globale. Les *événements de Dansgaard-Oeshger* d'une durée de 500 à 2000 ans et d'une périodicité variant de 1000 à 10.000 ans, sont définis comme des réchauffements rapides suivis de refroidissements plus lents. La plupart d'entre eux présentent seulement une signature locale.

D'autre part, la sortie du dernier cycle glaciaire s'est faite de façon discontinue, avec plusieurs retours vers des conditions glaciaires. La dernière de ces “mini-glaciations”, dénommée *Dryas Récent*, a eu lieu entre 11.000 et 10.000 ans *BP* (*Before Present*). La transition entre ce stade interglaciaire et la période préboréale fut extrêmement rapide (20 à 50 ans). Plusieurs enregistrements paléoclimatiques prélevés dans la zone Nord Atlantique révèlent des interruptions dans la production de *NADW* au cours du *Dryas Récent* (**Lehman & Keigwin (1992)**). Selon d'autres mesures effectuées en mer de Norvège, la convection thermohaline pendant cette période présentait une intensité analogue à celle du *conveyor belt* actuel, mais les lieux de convection profonde était déplacés (**Veum et al. (1992)**). La salinité de surface alors très élevée, en raison du rejet de sel par extension des calottes polaires, aurait en effet favorisé la plongée d'eau. Une hypothèse conciliatrice envisage une convection thermohaline active pendant le *Dryas Récent*, mais opérant à une profondeur intermédiaire, de l'ordre de 2000 mètres environ (**Zahn (1992)**). Ainsi les eaux de surface auraient enregistré une plongée d'eau, sans que l'océan profond soit ventilé, ce qui expliquerait l'apparente incompatibilité des mesures. Et la communication entre l'océan Nord Atlantique et le bassin Antarctique n'aurait jamais été complètement interrompue, comme semble l'indiquer la cohésion des données sédimentaires dans ces deux zones (**Charles & Fairbanks (1992)**).

Notons enfin, qu'une forte variabilité séculaire a été mise en évidence par nombre d'enregistrements paléoclimatiques pendant l'holocène (les 10.000 dernières années). Procédant à un inventaire des variations à cette échelle temporelle, **Stocker & Mysak (1992)** soulignent que les cycles observés sont multiples et correspondent à des périodes de 50 à 400 ans. Une telle variabilité concerne l'ensemble du globe terrestre, mais présente une amplitude maximale dans les régions proches de la zone Nord Atlantique. Des oscillations dans la formation d'eau profonde *NADW* pourraient donc être à

l'origine de cette variabilité séculaire et expliquerait son caractère global. Nous verrons plus loin qu'une telle variabilité de la circulation thermohaline est en effet présente dans diverses simulations numériques.

## II.1.2 Mécanismes invoqués

Les tentatives d'explication des événements rapides de la dernière période glaciaire–interglaciaire font intervenir une interaction entre l'activité des calottes polaires et la circulation thermohaline. Les états froids correspondraient à une diminution ou une absence de formation d'eau profonde Nord Atlantique. La convection profonde serait réactivée pendant les états plus chauds.

**Broecker et al. (1985)** proposèrent un mécanisme d'*oscillateur salin* pour expliquer les variations d'intensité ou les éventuelles interruptions de la convection thermohaline. En effet des calottes glaciaires de grande extension dans l'Atlantique Nord constituent une réserve d'eau douce défavorable au maintien d'une circulation thermohaline de type *conveyor belt* actif. Dans une telle circulation, la convection profonde produit aux hautes latitudes un fort dégagement de chaleur au profit de l'atmosphère, et un courant de surface transporte de la chaleur vers les régions englacées. Le réchauffement induit peut entraîner une fonte de la glace continentale. L'eau douce ainsi libérée se mêle aux eaux de surface et en diminue la densité, jusqu'à ce qu'elle devienne trop faible pour permettre une plongée d'eau. La circulation thermohaline est interrompue, ainsi que la fonte des calottes de glace. Le mécanisme dominant le bilan d'eau douce est alors l'évaporation, qui enrichit les eaux de surface en sel. La densité augmente jusqu'à devenir suffisante pour réactiver le *conveyor belt*.

La boucle de rétroaction proposée par la théorie de l'oscillateur salin permet d'expliquer les différences de durée entre les périodes froides et les périodes plus chaudes, qui sont observées tant pendant les *événements de Dansgaard-Oeschger* qu'au cours du *Dryas Récent*. En effet les phénomènes advectifs et convectifs liés à un *conveyor belt* actif permettent une rapide fonte des calottes polaires : la période chaude ne peut donc se maintenir durablement. Le processus d'accumulation de sel par évaporation est nécessairement plus lent et autorise une plus grande persistance des états froids.

Une mécanisme complémentaire a été invoqué pour expliquer les *événements de Heinrich* (**Paillard & Labeyrie (1994)**). La décharge d'icebergs dans l'Atlantique apportant beaucoup d'eau douce, elle bloque la circulation thermohaline. Les échanges méridiens de chaleur sont alors réduits et le contraste thermique entre basses et hautes latitudes se renforce. Les basses latitudes emmagasinent de la chaleur et les hautes latitudes voient leur température décroître, à tel point que la calotte polaire se restabilise et que la circulation thermohaline peut reprendre. La chaleur stockée aux basses latitudes est transportée vers les hautes latitudes, ce qui y induit un réchauffement rapide. Les conditions favorables à une interruption de la circulation thermohaline sont à nouveau réunies.

Un tout autre processus a été envisagé par **Birchfield et al. (1994)**. Cette fois la

boucle de rétroaction entre la fonte de la calotte et le transport de chaleur par la circulation thermohaline serait positive. L'eau douce libérée serait en effet transportée par le Mississippi et déversée à des latitudes relativement basses du bassin Atlantique. Le gradient méridien de salinité serait alors réduit, ce qui induirait une intensification de la circulation thermohaline. Le transport de chaleur vers les hautes latitudes serait à son tour accru et la fonte de la calotte amplifiée.

## II.2 Modélisation

Ce chapitre se veut un panorama général des différents phénomènes observés dans les études numériques de la circulation thermohaline, tous modèles confondus. Le chapitre III s'intéressera aux études les plus proches du présent travail et en décrira plusieurs visant à déterminer la structure catastrophique d'un modèle bidimensionnel de Boussinesq. Une revue portant sur les résultats obtenus avec des modèles de circulation générale océanique est présentée en Annexe A.

### II.2.1 Introduction

Le comportement de l'océan est décrit par les équations d'évolution de ses différentes grandeurs caractéristiques (vitesses, température, salinité, ...) et des forçages extérieurs qu'il subit. Depuis quelques décennies, l'outil informatique est utilisé afin de résoudre numériquement ces équations dans leur formulation discrète.

Dans l'étude de la circulation thermohaline, divers types de modèles sont utilisés, dont les temps de calcul sont proportionnels à la complexité. Les approches simplifiées sont particulièrement intéressantes pour ce phénomène, dont le temps caractéristique très important impose de longues intégrations numériques. Modèles de boîtes et modèles bidimensionnels (latitude – profondeur) sont donc souvent utilisés. Légers d'utilisation, ces modèles simples permettent d'isoler certains mécanismes physiques et d'explorer intensivement l'espace des paramètres du problème. Ainsi certains processus mis en évidence à l'aide de modèles simples, ont été recherchés et trouvés ultérieurement dans des modèles plus réalistes.

L'usage de modèles tridimensionnels complexes permet l'obtention de résultats plus réalistes. Mais de tels modèles ont aussi leurs limites. Ainsi la résolution spatiale reste relativement basse en raison des temps et coûts de calculs. Tous les processus d'échelle inférieure à la taille de la maille (turbulence, convection profonde, ..) doivent être paramétrés et la bathymétrie n'est représentée que grossièrement. Néanmoins les modèles de circulation générale océanique permettent de reproduire raisonnablement bien l'état actuel de l'océan (**England (1993), Maier-Reimer *et al.* (1993)**).

D'autre part, l'usage de modèles purement océaniques est assez limitatif. En effet, l'action de l'atmosphère sur l'océan y est représentée par des conditions à la surface dérivées d'observations. Les interactions océan-atmosphère ne sont pas prises en

compte et, dans le cadre d'études climatiques, les conditions de surface peuvent rappeler artificiellement le modèle vers la circulation océanique et le climat actuels. L'usage de modèles couplés océan-atmosphère, dans lesquels les échanges à l'interface évoluent librement, est souhaitable pour les études de scénarii paléoclimatiques ou prédictifs.

## II.2.2 Interface océan-atmosphère

Dans les modèles purement océaniques, des conditions imposées à la surface sont censées représenter les échanges de flux entre atmosphère et océan.

En accord avec les observations de tension de vent à la surface, le forçage dynamique appliqué est généralement purement zonal. Il ne dépend que de la latitude et s'exerce sur les cinquante premiers mètres environ de l'océan. Dans de nombreux modèles idéalisés de la circulation thermohaline, l'action du vent n'est pas considérée.

Un fort couplage existe entre la température océanique de surface et le forçage atmosphérique. En effet, la température atmosphérique de surface dépend des flux de chaleurs latente et sensible et du flux infrarouge émis par l'océan. Ainsi les températures des deux milieux s'ajustent de façon à atteindre une température d'équilibre à l'interface. Pour tenir compte de cette interaction, une condition de relaxation de type newtonien est généralement appliquée. Le flux de chaleur  $Q_T$  à l'interface s'écrit

$$Q_T = \lambda_T (T - T_*) ,$$

et s'interprète comme le rappel de la température  $T$  de surface vers la température de référence  $T_*$ , le coefficient constant  $\lambda_T$  étant inversement proportionnel au temps de rappel. Le cas limite  $\lambda_T \rightarrow \infty$  correspond à un temps de réponse nul, donc à une condition de température imposée à la surface (condition de Dirichlet). La limite opposée  $\lambda_T \rightarrow 0$  et  $T_* \rightarrow \infty$ , avec  $\lambda_T T_*$  constant, correspond à une condition de flux imposé (condition de Neumann).

Selon **Haney (1971)**, qui proposa cette formulation, la température de référence est une température atmosphérique apparente, tenant compte des effets de l'évaporation et du rayonnement solaire, et le coefficient  $\lambda_T$  dépend de la vitesse du vent au-dessus de la surface océanique et, donc, varie selon la latitude. L'intérêt principal d'une telle condition était de permettre une certaine interaction entre températures océaniques et atmosphériques, contrairement à la condition de température imposée à la surface, qui était alors en usage dans les modèles océaniques.

Cette formulation a été adoptée par la plupart des modélisateurs, mais une température océanique climatologique (généralement issue de l'atlas de **Levitus (1982)**) est utilisée et le temps de rappel est choisi constant, de l'ordre de 1 à 2 mois. La condition ne correspond donc plus à la paramétrisation du flux de chaleur à l'interface océan-atmosphère, mais constitue un rappel artificiel vers la climatologie actuelle. Un tel rappel est inapte dans le cadre d'études sur les changements climatiques. De plus, le coefficient  $\lambda_T$  est généralement estimé d'après des mesures réalisées aux basses et moyennes lati-

tudes. Il ne traduit nullement les processus d'échanges aux hautes latitudes, pourtant primordiaux à l'étude de la circulation thermohaline.

La salinité de surface est, elle, directement influencée par le flux d'eau douce atmosphérique, qui correspond à la différence eau reçue par précipitations moins eau perdue par évaporation. Il n'y a aucune rétroaction de la salinité de surface sur le flux d'eau douce reçu par l'océan. De plus, une anomalie de salinité peut subsister en surface beaucoup plus longtemps qu'une anomalie de température. Il semble donc raisonnable d'adopter pour la salinité une condition de flux imposé en surface. On choisit, en modélisation océanique, d'imposer un flux de sel en surface, équivalent au flux d'eau douce effectif. L'intégrale de ce flux sur la surface océanique est nulle, afin de conserver la masse de sel contenue par l'océan.

Les observations correspondant au flux  $E - P$  (Evaporation moins Précipitations) sont tout à fait éparses et inhomogènes sur la surface océanique. Les modélisateurs préfèrent donc déterminer numériquement ce flux. Une première simulation est effectuée avec une *double condition de relaxation*, pour la température et pour la salinité de surface, jusqu'à atteindre un état d'équilibre du modèle. Cette phase est dite *spin-up* du modèle. Notons que cet état d'équilibre est obtenu au prix d'une contrainte bien trop forte sur la salinité, mais ainsi il possède des champs de température et de salinité de surface compatibles avec la climatologie. Le flux de sel en surface correspondant à cet état d'équilibre est *diagnostiqué*. Il sera utilisé comme condition de surface pour les simulations suivantes.

Dans le cas d'un modèle de circulation générale, un état complètement stationnaire n'est jamais atteint. En particulier, la convection aux hautes latitudes est toujours intermittente (**Weaver & Sarachik (1991a)**). Néanmoins un état *statistiquement stationnaire* peut s'installer. Les auteurs choisissent alors de diagnostiquer le flux de sel pendant plusieurs décennies après établissement de cet état, le flux de sel en surface appliqué ultérieurement étant la moyenne des flux diagnostiqués.

D'autre part, notons qu'un flux stationnaire de sel est loin de traduire raisonnablement la forte variabilité des précipitations et donc du flux d'eau douce reçu par l'océan. De nombreux auteurs choisissent d'ajouter au flux stationnaire diagnostiqué un terme stochastique, de type bruit blanc (**Mikolajewicz & Maier-Reimer (1990)**, **Mysak et al. (1993)**).

Le passage d'une *double condition de relaxation* pour la température et pour la salinité de surface aux *conditions de surface diagnostiquées mixtes* (condition de relaxation pour la température et flux diagnostiqué imposé pour la salinité) peut, comme on le verra plus loin, s'accompagner d'une déstabilisation de l'équilibre obtenu par *spin-up* du modèle, alors qu'en théorie cet équilibre est solution pour les deux jeux de conditions de surface.

Notons enfin qu'on parle de *conditions de surface mixtes* quand des conditions non analogues sont appliquées pour la température et la salinité. Les équations d'évolution de ces deux variables ne peuvent alors pas être combinées en une unique équation d'évolution de la densité. Dans le cadre de l'étude de la circulation thermohaline,



on emploie ce terme notamment pour indiquer qu'on impose en surface un rappel newtonien de température et un flux de sel. Mais deux conditions de relaxation, dont les échelles de temps diffèrent, constituent aussi des *conditions de surface mixtes*. Enfin, dans nombre d'études idéalisées, la température est imposée ainsi que le flux de sel.

## II.2.3 Equilibres multiples

### (a) Modèles de boîtes

La présence d'équilibres multiples de la circulation océanique générés par la compétition entre effets salins et thermiques a d'abord été mise en évidence grâce aux modèles dits de boîtes. Ces modèles correspondent à la discrétisation minimale que l'on puisse écrire à partir des équations océaniques. L'océan y est représenté par une succession de réservoirs de volume constant, homogènes en température et en salinité et connectés deux à deux par des tubes de volume négligeable, leur permettant d'échanger chaleur et sel. Les boîtes de surface subissent un forçage "atmosphérique".

Résolvant analytiquement les équations de circulation entre deux boîtes de même volume connectées en surface et au fond, **Stommel (1961)** a obtenu plusieurs solutions, les mêmes forçages salins et thermiques étant appliqués. Les deux boîtes de ce modèle sont forcées par des conditions de relaxation en température et en salinité. Par analogie avec l'océan, la boîte dite équatoriale gagne de la chaleur et du sel, et la boîte dite polaire en perd. La circulation est dite thermique si le transport s'effectue du pôle vers l'équateur dans le tube de fond, et de l'équateur vers le pôle dans celui de surface. Elle est dite saline, dans le cas d'un transport inverse. Si les temps de relaxation sont égaux pour la température et la salinité, un seul équilibre existe. Si ces temps diffèrent, on obtient un ou trois états d'équilibre, selon les intensités respectives des forçages salins et thermiques appliqués. Quand trois états existent, deux d'entre eux sont stables, le troisième instable. Dans le cas où le temps de relaxation est choisi plus court pour la température que pour la salinité, ce qui correspond à la physique océanique, les deux états stables sont une circulation thermique rapide et une circulation saline lente, l'équilibre instable étant une circulation thermique intermédiaire. Cet équilibre instable n'est pas associé à un cycle limite et aucun comportement oscillatoire ne peut être observé. Notons bien que c'est la différence entre les temps de relaxation qui permet d'obtenir des équilibres multiples. Le constat sera le même dans les modèles océaniques complexes : seules des *conditions de surface mixtes* permettent d'observer des équilibres multiples.

Ce premier travail fructueux a été grandement suivi. En ajoutant une troisième boîte au modèle de Stommel, certains auteurs ont étudié l'existence et la stabilité des circulations dans un bassin transéquatorial, tel les océans Atlantique et Pacifique. Dans un tel bassin, on qualifie la circulation de *symétrique* si elle comporte deux cellules convectives miroirs l'une de l'autre par rapport à l'équateur, et d'*asymétrique* sinon.

**Rooth (1982)** utilisa un modèle à trois boîtes, jointes par trois tubes : un entre la

boîte équatoriale et chacune des boîtes polaires et le dernier reliant les deux boîtes polaires entre elles. Les réservoirs sont forcés par une condition de relaxation sur la température et un flux de sel, les forçages des deux boîtes polaires étant égaux. Il a ainsi mis en évidence l'existence de circulations pôle-à-pôle (plongée d'eau dans l'une des deux boîtes polaires et remontée d'eau dans l'autre) asymétriques par rapport à l'équateur (i.e. la boîte centrale), sous un forçage de surface symétrique. De plus, une perturbation de salinité suffisamment large permet de déstabiliser une solution pôle-à-pôle au profit de la solution pôle-à-pôle inverse. Notons que les connexions entre boîtes choisies ici n'autorisaient aucune solution symétrique, si ce n'est une circulation uniformément nulle.

**Welander (1986)** étudia un autre modèle à trois boîtes, qui est la juxtaposition de deux modèles de Stommel, chaque boîte étant reliée à sa voisine par une connexion de fond et une connexion de surface. Le seul forçage imposé est un flux salin. La circulation entre deux boîtes pouvant s'effectuer de trois façons différentes, dont deux stables (cf. modèle de Stommel), il existe avec trois boîtes neuf états d'équilibre, dont quatre seulement sont stables :

- une circulation thermique, le transport s'effectuant par le fond de chacune des boîtes polaires vers la boîte équatoriale.
- une circulation saline, la plongée s'effectuant dans la boîte centrale et l'eau passant par le fond de l'équateur aux pôles.
- deux circulations pôle-à-pôle, avec circulation thermique entre deux boîtes et circulation saline entre les deux autres.

Par extension, si l'on étudie un modèle à  $N$  boîtes, reliées deux à deux par le fond et la surface, on trouvera  $2^{N-1}$  états d'équilibre stables. La circulation globale est en effet la juxtaposition des solutions dans les sous-domaines (i.e. les  $N - 1$  paires de boîtes adjacentes). Ce *principe de superposition* s'applique également aux modèles bidimensionnels, si la profondeur est suffisamment faible (Thual & McWilliams (1992)).

Par la suite, **Marotzke (1990)** modifia le modèle de Welander, en subdivisant la boîte équatoriale en quatre (deux boîtes de surface et deux boîtes de fond). Dans ce cas, les circulations symétriques sont instables. Mais cette séparation entre les régions sud et nord équatoriales, qui favorise les équilibres asymétriques, n'est absolument pas justifiée par le comportement de l'océan actuel. En revanche, il étudia un modèle de boîtes représentant deux bassins, chacun étant constitué d'une boîte équatoriale de surface, d'une boîte équatoriale de profondeur et de deux boîtes polaires. Les deux océans sont reliés par une connexion à haute latitude, assimilable à l'océan circumpolaire. Les seize équilibres stables de ce modèle sont soumis à des perturbations aléatoires de salinité, afin de déterminer les équilibres de prédilection du modèle. Il s'agit des équilibres produisant une même circulation asymétrique dans chacun des deux bassins. Cette préférence du modèle semble fortement liée à la présence de la connexion entre océans, qui rompt la symétrie géographique du modèle.

**Joyce (1991)** étudia un modèle transéquatorial à quatre boîtes, constitué de deux

boîtes équatoriales superposées et de deux boîtes polaires. Dans cette étude, salinité et température subissent une condition de relaxation en surface, le temps de rappel étant plus court pour la température. Quatre états stables sont obtenus. L'ajout d'une perturbation d'amplitude finie sur le champ de salinité permet de mettre en évidence la préférence de ce modèle pour les états symétriques.

**Huang & Stommel (1992)** développèrent un modèle “tridimensionnel” à huit boîtes, de forme cubique (deux boîtes de côté). Les quatre boîtes de surface sont forcées par des *conditions mixtes*. En ajoutant une paramétrisation simple de la gyre anticyclonique subpolaire induite par le vent, ils parvinrent à stabiliser la circulation thermohaline et à limiter les transitions rapides entre équilibres qu'ils observaient en l'absence de vent (Huang *et al.* (1992)). Si un forçage de vent correspondant à l'océan Nord Atlantique actuel est appliqué, un seul équilibre de type thermique existe.

Les modèles de boîtes ont donc permis de révéler l'existence d'équilibres multiples de la circulation thermohaline et la possibilité d'obtenir des circulations transéquatoriales, en appliquant un forçage symétrique par rapport à l'équateur. Ces propriétés se retrouveront dans tous les types de modèles, quelle que soit leur complexité. Mais ce succès relatif ne doit pas faire oublier le faible degré de réalisme des modèles de boîtes : la rotation et l'effet du vent sont négligés, les mécanismes de convection ne sont pas considérés et les transports advectifs sont très pauvrement paramétrés. La circulation thermohaline résulte seulement du gradient méridional de densité de surface. L'emploi de tels modèles doit donc se limiter à l'étude de la compétition entre forçages salin et thermique quant à la circulation thermohaline.

D'autres études révélant la présence d'oscillations autoentretenues dans les modèles de boîtes sont exposées plus loin (section II.2.4(a)).

## (b) Modèles océaniques bidimensionnels

Des équilibres multiples de la circulation thermohaline ont également été simulés par des modèles numériques océaniques bi- ou tridimensionnels. Le processus expérimental le plus souvent utilisé pour les observer a été introduit par **Bryan (1986)** qui, le premier, a obtenu numériquement des équilibres multiples en utilisant un modèle de circulation générale océanique. Une première intégration numérique est réalisée en imposant à la surface une *double condition de relaxation* ou bien une *double condition de Dirichlet* pour la température et la salinité. L'état d'équilibre – ou d'équilibre statistique – obtenu est utilisé comme état initial des expériences réalisées ensuite sous *conditions de surface diagnostiquées mixtes* (condition inchangée pour la température et flux de sel imposé égal au flux salin de surface de l'équilibre). En perturbant l'état initial, généralement par addition d'anomalies de salinité aux hautes latitudes, les auteurs parviennent à obtenir plusieurs états d'équilibre avec les mêmes conditions de surface. Les océanographes considèrent que la circulation obtenue en prenant pour état initial un océan au repos (température et salinité uniformes) constitue le mode opératoire

préférentiel du modèle océanique sous les conditions de surface utilisées.

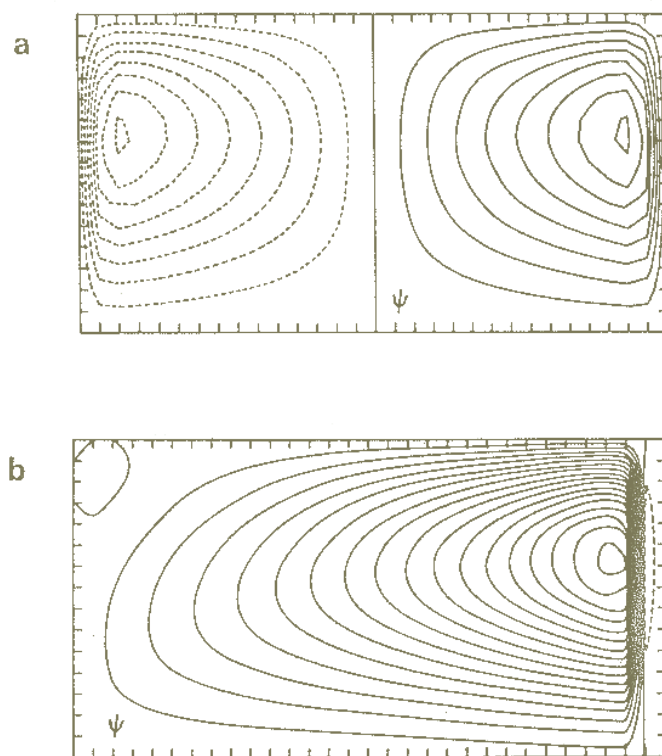
Quand différents modes opératoires de la circulation thermohaline sont obtenus, on parle d'équilibres multiples sous les mêmes conditions aux limites. Une critique de cette expression a été formulée par **Power & Kleeman (1993)**. En effet si la température de relaxation  $T_*$  est inchangée d'une expérience à l'autre, la température  $T$  de surface diffère et le flux de chaleur imposé en surface  $Q_T = \lambda_T (T - T_*)$  n'est donc pas le même. Cet argument, certes fondé dans le cas d'une condition de relaxation newtonienne pour la température, ne remet pas en cause l'existence même des équilibres multiples de la circulation thermohaline. En effet, plusieurs états d'équilibre peuvent être observés sous des conditions aux limites réellement identiques, quand on impose la température (condition de Dirichlet) et le flux de sel (condition de Neumann) en surface comme c'est le cas dans de nombreuses études numériques bidimensionnelles.

**Marotzke et al. (1988)** utilisèrent un modèle 2D ayant pour équation dynamique un simple équilibre entre gradient méridien de pression et friction verticale et pour équations de salinité et de température des équations d'advection-diffusion. Le forçage en surface est thermohalin uniquement. Dans un bassin rectangulaire à fond plat, l'état d'équilibre obtenu sous *double condition de Dirichlet* est de type thermique avec plongée d'eau profonde aux deux pôles (voir figure II.1.a). En appliquant les *conditions de surface diagnostiquées mixtes*, une perturbation infinitésimale de la salinité de surface aux hautes latitudes suffit à déstabiliser cet équilibre au profit d'une circulation pôle-à-pôle (plongée d'eau à un pôle et remontée d'eau à l'autre).

Si une anomalie positive de salinité est appliquée aux hautes latitudes de l'hémisphère Nord (par exemple), l'équilibre résultant est un équilibre pôle-à-pôle avec plongée d'eau au pôle nord (voir figure II.1.b). Un mécanisme de *rétroaction positive d'origine advective* déjà décrit par Rooth (1982), Walin (1985) et Bryan (1986) est invoqué pour expliquer cette transition. La circulation initiale étant de type thermique, une anomalie positive de salinité située aux hautes latitudes tend à intensifier la boucle de circulation de l'hémisphère correspondant. Cette cellule va s'étendre au-delà de l'équateur et induire un transport accru d'eau équatoriale chaude et salée vers le pôle. L'anomalie de température de cette eau équatoriale est rapidement perdue au profit de l'atmosphère. L'anomalie de salinité, elle, est peu modifiée par le flux d'eau douce de surface et persiste jusqu'au pôle, y créant une nouvelle anomalie de salinité qui renforce la circulation. Pendant ce temps, la quantité d'eau salée transportée vers l'autre pôle décroît. La circulation devient de moins en moins intense dans le second hémisphère. Ce processus de rétroaction positive agit jusqu'à ce qu'une circulation pôle-à-pôle stable s'établisse. Ce mécanisme est observé en présence, comme en absence, d'une paramétrisation du type *ajustement convectif*, visant à éliminer toute instabilité statique par mélange de la colonne d'eau quand la stratification est localement instable. La transition entre équilibre symétrique et équilibre asymétrique est néanmoins plus rapide si une telle paramétrisation existe.

Quand des anomalies négatives de salinité sont appliquées aux hautes latitudes d'un hémisphère, l'équilibre symétrique est également déstabilisé au profit d'un équilibre

asymétrique, la transition étant nettement plus rapide. Dans l'équilibre pôle-à-pôle résultant, la plongée d'eau s'effectue dans l'hémisphère non perturbé. Le mécanisme en jeu ici est une *rétroaction positive d'origine convective*, déjà citée par Bryan (1986). L'addition d'une perturbation de salinité négative aux hautes latitudes d'un hémisphère y induit un ralentissement de la circulation thermique. Les eaux de surface sont donc soumises plus longtemps à l'effet adoucissant aux hautes latitudes du flux de sel en surface et l'anomalie est amplifiée jusqu'à ce que la circulation cesse tout à fait. Dans l'autre hémisphère la circulation n'est pas ralentie et la différence de pression résultante à l'équateur permet à la boucle active de circulation de s'intensifier et d'envahir tout le domaine.



**Figure II.1** : **a** : Fonction de courant de l'équilibre obtenu sous *double condition de relaxation*. Le sens de circulation est indiqué par les flèches. Le pôle sud correspond à l'extrême gauche de la figure, le pôle nord à l'extrême droite. L'écart entre deux isolignes est  $0.2 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  et la valeur maximale s'élève à  $1.6 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . **b** : Fonction de courant de l'équilibre obtenu sous *conditions de surface diagnostiquées mixtes* quand on perturbe l'état initial (figure a) par une anomalie de salinité positive aux hautes latitudes de l'hémisphère nord. L'écart entre deux isolignes est  $0.15 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  et la valeur maximale s'élève à  $2.6 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . (d'après Marotzke *et al.* (1988)).

**Marotzke (1990)** a montré que l'équilibre thermique obtenu sous *double condition de Dirichlet* peut être déstabilisé au profit d'un équilibre salin (plongée d'eau de part et d'autre de l'équateur et remontée d'eau aux deux pôles) de faible amplitude. La perturbation négative de salinité appliquée à chaque pôle doit être d'amplitude finie pour provoquer ce renversement de circulation. Sous l'effet du mécanisme convectif décrit ci-dessus, la circulation est interrompue. Les particules d'eau résident longtemps en surface et les eaux équatoriales, soumises à l'effet de l'évaporation, deviennent suffisamment salines pour générer une plongée d'eau à l'équateur. En présence d'*ajustement convectif*, une perturbation de salinité bien plus faible suffit à induire la transition, mais l'équilibre salin est instable et des oscillations de type *flush* (décrites en II.2.4(d)) peuvent être observées.

**Wright & Stocker (1991)** ont amélioré le modèle de Marotzke, en introduisant une paramétrisation du gradient est-ouest de pression en fonction du gradient nord-sud de pression. On peut dès lors parler d'équations en moyenne zonale. La version un seul bassin de ce modèle leur permet de retrouver l'instabilité de l'équilibre symétrique, obtenu sous *double condition de relaxation*, au profit de solutions asymétriques sous les *conditions de surface diagnostiquées mixtes*.

**Stocker & Wright (1991a)** étudient ensuite le comportement du même modèle dans une version deux bassins. Ils représentent dans une géométrie idéalisée l'océan Atlantique et l'océan Pacifique, connectés par un océan Austral zonalement uniforme. Si les conditions de relaxation appliquées aux deux bassins ont même profil latitudinal, on obtient une solution où la circulation est symétrique par rapport à l'équateur dans chaque bassin. Cette circulation est instable quand on applique les *conditions de surface diagnostiquées mixtes*. L'équilibre alors observé est asymétrique dans chaque bassin, avec plongée d'eau au pôle nord. Sous des conditions de Dirichlet issues de la climatologie actuelle et présentant notamment une salinité moindre dans l'océan Pacifique, une circulation de type *conveyor belt* et d'intensité raisonnable est obtenue. Elle est peu modifiée par passage aux *conditions de surface diagnostiquées mixtes*. En appliquant un flux salin perturbé pendant les premiers milliers d'années de simulation, on observe un autre équilibre sous le même forçage de surface. La plongée d'eau a lieu dans l'océan Austral et les deux bassins agissent de façon indépendante.

**Hovine et Fichet (1994)** ont développé un modèle en moyenne zonale à trois bassins de géographie et topographie réalistes. Les échanges latéraux de sel et de chaleur entre bassins sont explicitement résolus. Les océans Arctique et Antarctique sont représentés. Un forçage dynamique est imposé en surface. La paramétrisation de Wright & Stocker (1991) est utilisée. Forcée par des conditions aux limites de relaxation issues des observations et reproduisant un cycle saisonnier, une circulation de type *conveyor belt* s'établit. Plusieurs expériences de perturbation sont réalisées et trois états d'équilibre sont observés sous les *conditions de surface diagnostiquées mixtes*. Il s'agit d'un *conveyor belt*, d'un *conveyor belt* inverse, où les rôles des océans Pacifique et Atlantique sont échangés et d'un état où la formation d'eau profonde a lieu dans l'océan Austral exclusivement. Ce dernier état est l'équilibre préféré du modèle sous les *conditions de surface mixtes* appliquées.

D'autres études conduites avec des modèles océaniques bidimensionnels sont présentées de façon plus détaillée au chapitre III en raison des liens directs qu'elles entretiennent avec le présent travail. Il s'agit des études de Thual & McWilliams (1992), de Quon & Ghil (1992 et 1995) et de Dijkstra & Molemaker (1997). Le développement asymptotique calculé par Cessi & Young (1992) sera lui rappelé en IV.1.2. Tous ces auteurs utilisent des modèles bidimensionnels dérivés des équations tridimensionnelles de Boussinesq en considérant que la vitesse zonale et les dérivées zonales sont nulles. Les modèles des études décrites ci-dessus étaient, eux, dérivés des équations tridimensionnelles par moyenne zonale et contenaient, à l'exception du modèle de Marotzke, une paramétrisation de la rotation. Les deux types de modèles diffèrent essentiellement par la formulation de l'équation de mouvement.

Les modèles bidimensionnels océaniques proposent une représentation plus fine des processus océaniques que les modèles de boîtes. Ils restent néanmoins peu réalistes. Le plus souvent, aucun forçage dynamique correspondant à la tension de vent n'est appliqué et l'action de la circulation de surface dirigée par le vent sur la circulation thermohaline ne peut être représentée.

### (c) Modèles océaniques tridimensionnels

L'étude numérique des équilibres multiples de la circulation thermohaline a débuté avec le travail de **Bryan (1986)**. Utilisant le modèle de circulation générale océanique du *GFDL*\* soumis à un forçage de surface thermohalin et dynamique symétrique par rapport à l'équateur, il a mis en évidence le phénomène de *catastrophe halocline polaire*, qui peut se produire quand l'équilibre thermique obtenu sous *double condition de relaxation* est soumis aux *conditions de surface diagnostiquées mixtes*. Après passage aux *conditions de surface mixtes*, une anomalie négative de salinité apparaît dans les régions polaires et se répand en surface jusqu'à l'équateur. L'extension de cette masse d'eau adoucie, et donc relativement légère, réussit en quelques décennies à stopper la convection profonde dans l'ensemble du bassin. Le flux de surface diagnostiqué étant censé maintenir l'équilibre, ce phénomène est étonnant mais peu s'expliquer comme suit. Quand on modifie les conditions de surface, l'évolution du champ de salinité devient bien plus libre, une condition de flux imposé étant beaucoup moins contraignante qu'une condition de rappel newtonien. Le champ de salinité peut donc adopter une structure différente, mais compatible avec la dynamique interne du modèle.

En ajoutant une anomalie positive de sel aux hautes latitudes de chaque hémisphère, Bryan réussit à éviter l'extension des haloclines polaires et à observer un équilibre symétrique de type thermique sous *conditions de surface diagnostiquées mixtes*. De plus des expériences de perturbation lui permettent d'obtenir deux circulations pôle-à-pôle inverses l'une de l'autre. Les deux mécanismes de transition déjà décrits en II.2.3(b) présentent des échelles de temps très différentes pour une même amplitude de l'anomalie appliquée. Quand l'anomalie de salinité aux hautes latitudes est négative, le processus

---

\*Geophysical Fluid Dynamics Laboratory à Princeton (USA)

de *rétroaction positive d'origine convective* induit en 50 ans environ une transition entre état symétrique et état asymétrique. Le processus de *rétroaction positive d'origine advective*, qui agit en cas d'anomalie de salinité négative, occasionne une transition en quelque 500 ans.

Les résultats de cette étude furent importants à double titre puisqu'ils mirent en évidence la possibilité d'obtenir des équilibres asymétriques sous un forçage de surface symétrique par rapport à l'équateur et l'existence d'équilibres multiples de la circulation thermohaline sous les mêmes *conditions de surface diagnostiquées mixtes*.

La sensibilité de la *catastrophe halocline polaire* a ensuite été éprouvée par différents auteurs. **Marotzke (1991)** a réussi à éviter le développement de la halocline polaire en utilisant un schéma d'*ajustement convectif* plus efficient, celui initialement utilisé par Bryan ne permettant pas d'éliminer toute instabilité statique. **Weaver & Sarachik (1991a)** ont, eux, observé ce phénomène quelle que soit la paramétrisation adoptée pour l'*ajustement convectif*. **Weaver et al. (1993)** ont conclu qu'une meilleure paramétrisation de la convection permet d'éviter l'extension de la halocline polaire quand le forçage de surface est thermiquement dominé et non quand il est halinement dominé. En effet, le passage d'une condition de relaxation à une condition de flux imposé pour la salinité a un effet d'autant plus grand que le forçage salin est influent.

**Marotzke et Willebrand (1991)** ont réalisé des expériences numériques analogues à celles de Bryan, mais dans une configuration différente. Le modèle comprend deux bassins similaires reliés au sud par un canal dont le transport est imposé. Cette géographie représente de façon simplifiée les océans Atlantique et Pacifique, connectés par l'océan circumpolaire. La présence d'une connexion entre bassins au sud induit une asymétrie dans le modèle. L'équilibre obtenu sous des conditions de relaxation symétriques par rapport à l'équateur et identiques dans les deux bassins n'est pas symétrique : la convection profonde est intense au nord de chaque bassin, elle est peu intense et de faible profondeur dans l'hémisphère Sud. Le flux de sel diagnostiqué est donc asymétrique. Mais les auteurs le corrigent légèrement afin d'étudier les équilibres sous *conditions de surface mixtes* symétriques. Des expériences de perturbation permettent d'obtenir quatre équilibres stables :

- une circulation avec formation d'eau profonde au nord de chaque océan, qui constitue l'équilibre préféré du modèle sous les *conditions de surface mixtes* appliquées.
- une circulation de type *conveyor belt*.
- une circulation de type *conveyor belt* inverse.
- une circulation avec formation d'eau profonde au sud de chaque bassin, mais au nord du canal circumpolaire.

Tous ces équilibres présentent une asymétrie dans chacun des bassins. Ceci est certainement lié à la géométrie asymétrique du modèle. D'autre part, les lieux de convection profonde ne sont jamais situés aux basses latitudes, car le forçage de vent transporte l'excès de sel vers les hautes latitudes. La densité des eaux équatoriales reste donc toujours trop faible pour déclencher le processus convectif.



Quand le flux diagnostiqué asymétrique est appliqué sans correction, tous les états d'équilibre cités ci-dessus sont retrouvés, excepté le premier (formation d'eau profonde au nord de chaque bassin). En effet le flux asymétrique présente un excès de précipitations dans l'hémisphère Nord, qui adoucit suffisamment les eaux de surface pour y empêcher la convection profonde. L'équilibre préféré du modèle est alors celui avec formation d'eau profonde au sud de chaque bassin. Ce changement de comportement du modèle souligne sa forte sensibilité aux variations de forçage salin.

**Hughes & Weaver (1994)** ont amélioré la géographie du modèle de Marotzke et Willebrand (1991) en considérant deux bassins d'extension différente et un canal de communication pronostique. L'océan Pacifique est nettement plus large que le bassin Atlantique, mais s'étend moins au nord. Les conditions de relaxation sont issues d'observations et diffèrent d'un bassin à l'autre. Les états d'équilibre obtenus avec les *conditions de surface diagnostiquées mixtes* sont une circulation avec plongée d'eau au sud de chaque bassin et plusieurs circulations de type *conveyor belt* d'intensité variable. Le mode opératoire préféré du modèle est de type *conveyor belt*.

De nombreux autres auteurs ont retrouvé l'existence d'équilibres multiples de la circulation thermohaline dans des modèles de circulation générale océanique. Même si les conditions initiales de relaxation en surface sont réalistes, l'état d'équilibre obtenu peut être déstabilisé par passage aux *conditions de surface diagnostiquées mixtes*, et plusieurs états d'équilibre peuvent exister. Une telle instabilité du modèle océanique est dangereuse si on souhaite l'utiliser comme composante d'un modèle climatique couplé. Dans ce cas, le modèle océanique est généralement intégré seul sous *double condition de relaxation* jusqu'à obtenir un équilibre, puis couplé au modèle atmosphérique. Le flux d'eau calculé par le modèle atmosphérique est alors imposé au modèle d'océan et une *catastrophe halocline polaire* peut s'initier dès le début de la simulation couplée. Il est alors impossible de déterminer l'évolution du climat sous l'impact de tel ou tel facteur, comme par exemple l'augmentation des gaz à effet de serre.

**Tziperman et al. (1994)** stipulèrent qu'un modèle de circulation générale océanique, comme les modèles plus simples, possède des régimes stables et instables selon la valeur des paramètres appliqués. Si l'état d'équilibre obtenu sous *double condition de relaxation* est proche d'un point de transition entre régime stable et régime instable, il sera très facilement déstabilisé, notamment par un changement de conditions aux limites. Les auteurs observent qu'un modèle océanique de circulation générale à géométrie réaliste soumis à un forçage climatologique atteint un état d'équilibre stable, mais peu éloigné d'un point de transition. L'analyse du comportement d'un modèle à quatre boîtes indique qu'augmenter la constante de temps de relaxation pour la salinité permet d'obtenir un état d'équilibre moins proche du régime instable. En effet, dans le modèle tridimensionnel, l'état d'équilibre obtenu sous *double condition de relaxation* avec un temps de relaxation long pour la salinité ( $1/\lambda_S = 120$  jours) est stable lors du passage aux *conditions de surface diagnostiquées mixtes*, alors que l'état équivalent obtenu avec un temps de relaxation court ( $1/\lambda_S = 30$  jours) était instable. Par ailleurs, les deux états d'équilibre obtenus sous *double condition de relaxation* sont très proches. Rappeler moins fortement la salinité du modèle vers les salinités climatologiques semble

raisonnable si l'on considère que, d'une part, ces observations sont entachées d'erreur et que, d'autre part, la dynamique du modèle diffère de celle de l'océan réel.

Les auteurs montrèrent qu'un équilibre stable au changement de conditions de surface peut également être obtenu par augmentation de la constante de temps de rappel pour la température. Ce résultat est en accord avec plusieurs autres études (**Power & Kleeman (1994)**, **Moore & Reason (1993)**). La stabilité de l'équilibre sous *conditions de surface diagnostiquées mixtes* dépend fortement de la condition thermique de surface. **Rahmstorf & Willebrand (1995)** proposent une nouvelle formulation de cette condition. Elle est issue de l'analyse d'un modèle atmosphérique simple de bilan énergétique (*Energy Balance Model*) et permet une diffusion latérale de chaleur au dessus de la surface océanique. Avec cette condition de surface pour la température, le modèle est nettement plus stable quand on modifie la condition de salinité. En particulier, le phénomène de *catastrophe halocline polaire* peut être évité à des régimes de paramètres où il se produit sous *conditions aux limites mixtes* classiques.

#### (d) Modèles couplés

L'existence d'équilibres multiples de la circulation thermohaline a été établie dans tous les types de modèles océaniques, des plus simples (modèles de boîtes) aux plus complexes (modèles de circulation générale tridimensionnels à géographie et topographie réalistes). Mais tous les modèles océaniques souffrent d'une absence de représentation des interactions entre océan et atmosphère. Et leur forte sensibilité à de très faibles anomalies de salinité n'est pas compatible avec la stabilité relative de l'océan réel depuis plusieurs milliers d'années. Il est donc nécessaire d'étudier à l'aide de modèles couplés océan–glace de mer–atmosphère les interactions existant entre les différents milieux et leurs effets, probablement stabilisateurs, sur la circulation thermohaline. Si plusieurs états d'équilibre existent dans les modèles couplés, il est intéressant d'étudier les possibilités de transition entre ces états et le comportement de l'ensemble du modèle climatique.

**Birchfield (1989)** étudia un modèle couplé océan–atmosphère très simplifié. L'océan y est représenté par un modèle de boîtes comportant une boîte basses latitudes, une boîte hautes latitudes et une boîte profonde ; l'atmosphère par le bilan énergétique entre deux boîtes situées au dessus des deux boîtes de surface océanique. Les échanges de chaleur sont déterminés par ce modèle couplé, mais le cycle hydrologique est régi par un paramètre externe. Pour certaines valeurs du flux d'eau douce à l'interface, deux équilibres de la circulation thermohaline sont observés. L'un d'eux est de type thermique, l'autre salin.

Une configuration étendue de ce modèle, développée par **Wang & Birchfield (1992)**, représente de façon très simple les différents bassins océaniques avec six boîtes. Les deux modes dominants de circulation sont une circulation de type *conveyor belt* et une circulation avec plongée d'eau dans l'océan Austral.

**Stocker et al. (1992)** ont couplé le modèle océanique en moyenne zonale de Wright

& Stocker (1991) dans une configuration trois bassins avec un modèle atmosphérique de bilan énergétique à cycle hydrologique imposé. Selon la paramétrisation adoptée pour les précipitations en moyenne zonale, le modèle présente quatre états d'équilibre différents : un régime de type *conveyor belt*, un de type *conveyor belt* inverse, un état de convection profonde aux hautes latitudes nord des bassins Atlantique et Pacifique et un état de convection profonde dans l'océan Austral. Les deux états les plus stables sont le *conveyor belt* et l'état de plongée d'eau dans l'océan Austral.

Ces premiers couplages s'apparentent encore à des modèles forcés puisque le cycle hydrologique, composante essentielle du forçage thermohalin, est imposé et non déterminé par le modèle. La composante atmosphérique fait en quelque sorte office de condition de surface sophistiquée.

**Manabe & Stouffer (1988)** présentèrent une étude conduite à l'aide d'un modèle couplé océan–glace de mer–atmosphère de géographie et topographie réalistes. Les échanges de chaleur et d'eau douce entre les différents milieux sont calculés par le modèle couplé. Néanmoins une correction de flux est imposée à l'interface océan–atmosphère afin de réduire certains biais du modèle, en particulier un fort adoucissement des eaux superficielles de l'océan Atlantique et une extinction de la circulation thermohaline. Avec cette correction de flux, deux équilibres sont observés : l'un est de type *conveyor belt*, l'autre de type convection profonde dans l'océan Austral.

**Saravanan & McWilliams (1995)** ont étudié un modèle couplé dont la composante atmosphérique est un modèle en équations primitives à deux couches et la composante océanique un modèle en moyenne zonale dans un bassin rectangulaire. Les deux modèles échangent des flux de chaleur et d'eau douce, mais, là aussi, une correction de flux est imposée. Quatre équilibres du modèle couplé sont obtenus. Les quatre circulations océaniques correspondantes sont une circulation thermique avec plongée d'eau aux hautes latitudes nord et sud et remontée d'eau aux basses latitudes, une circulation symétrique saline avec plongée d'eau aux basses latitudes dans chacun des hémisphères et remontée d'eau aux hautes latitudes et deux circulations pôle-à-pôle avec plongée d'eau à un pôle et remontée d'eau à l'autre. Ces circulations sont très proches des équilibres multiples obtenus avec le modèle océanique seul et le *principe de superposition* (voir II.2.3.a) est respecté : les circulations pôle-à-pôle sont la composée d'un hémisphère de circulation thermique et d'un hémisphère de circulation saline.

Les auteurs ont d'autre part étudié les possibilités de déclenchement d'une *catastrophe halocline polaire* dans ce modèle couplé à partir des équilibres thermique et pôle-à-pôle. Une interruption de la plongée d'eau aux hautes latitudes peut survenir quand une anomalie positive du flux d'eau douce y est imposée. Plusieurs mécanismes entrent alors en jeu. En l'absence de transport méridien de chaleur par la circulation thermohaline, les eaux de surface des hautes latitudes se refroidissent, ce qui favorise une reprise de la convection profonde. Simultanément, l'interruption de la circulation thermohaline a plusieurs effets qui s'opposent à la formation d'eau profonde : une augmentation de l'apport atmosphérique de chaleur à l'océan, une suppression du transport méridien de sel vers les hautes latitudes et augmentation du flux d'eau douce reçu par l'océan. Dans

le cas du modèle couplé, l'effet dominant est le refroidissement aux hautes latitudes et la circulation thermohaline se rétablit. Une simulation de l'océan seul soumis à des *conditions de surface mixtes* et à une même anomalie du flux salin que le modèle couplé a été réalisée. Dans ce cas, la circulation thermohaline s'interrompt également, mais ne reprend jamais. En effet, les *conditions mixtes* tendent à surestimer le flux de chaleur reçu par l'océan. Celui-ci augmente alors suffisamment pour empêcher le rétablissement de la circulation méridienne.

Dans les deux dernières études, les échanges de chaleur et d'eau douce à l'interface océan-atmosphère sont calculés par le modèle couplé. Mais la présence d'une correction de flux destinée à éviter une dérive du modèle fait encore intervenir un forçage externe. Néanmoins, la plupart des processus atmosphériques sont pris en compte et des boucles de rétroaction entre océan et atmosphère peuvent se mettre en place. Il est donc très intéressant d'observer que dans ce type de modèles plusieurs modes opératoires de la circulation thermohaline peuvent exister. Dans une configuration géographiquement réaliste, les deux états observés sont un *conveyor belt*, analogue à la circulation actuelle de l'océan réel, et un état de plongée d'eau australe, compatible avec les données paléoclimatologiques du Crétacé.

## II.2.4 Oscillations

Les *conditions de surface mixtes* d'un modèle océanique sont dites invariantes si la température de rappel, le flux d'eau douce imposé et le forçage dynamique (s'il existe) sont constants dans le temps. Néanmoins, le flux de chaleur reçu par l'océan est susceptible de varier dans le temps, tout comme le champ de salinité de surface. Ces fluctuations autorisent des comportements non stationnaires de l'océan et des oscillations de la circulation thermohaline ont pu être observées sur diverses échelles de temps.

En présence de *conditions de surface mixtes*, l'intensité relative du flux d'eau douce par rapport au forçage thermique à la surface de l'océan est le paramètre déterminant quant à la stabilité et la variabilité de la circulation thermohaline. L'influence relative de la tension de vent par rapport au flux d'eau douce de surface est un deuxième paramètre important. **Weaver et al. (1993)** ont déterminé le type de comportement de la circulation thermohaline selon l'intensité relative des forçages thermodynamiques de surface. Quand le forçage thermique est "dominant" un seul équilibre existe : l'état obtenu sous *double condition de relaxation* n'est pas déstabilisé par passage aux *conditions mixtes de surface*. Si le forçage salin est "important", le changement de conditions aux limites peut occasionner une déstabilisation de cet état et plusieurs équilibres peuvent être observés sous *conditions mixtes de surface*. Si le forçage salin devient "dominant", une variabilité du modèle peut se développer sur des échelles de temps décennales et interdécennales (voir II.2.4.b). Le mécanisme invoqué est basé sur l'advection d'anomalies de salinité et de température par les gyres horizontales de surface. C'est un mécanisme tridimensionnel dans lequel l'intensité du forçage dynamique intervient. Une nouvelle

augmentation du forçage salin permet d'observer des *catastrophes haloclines polaires* et, éventuellement, l'occurrence de variabilité sur des échelles de temps diffusives (voir II.2.4.d). Là encore, le forçage dynamique entre en jeu puisqu'un vent suffisamment fort peut empêcher l'extension vers l'équateur de la halocline polaire. Des oscillations ayant pour échelle de temps caractéristique celle de la circulation thermohaline peuvent être excitées si on ajoute un terme stochastique au forçage d'eau douce, quand celui-ci est "non dominant" ou "important" (voir II.2.4.c).

### (a) Modèles de boîtes

Des oscillations peuvent être obtenues avec les modèles de boîtes, si l'on considère les processus convectifs entre réservoirs superposés. Il est difficile de préciser les temps caractéristiques de ces oscillations, car ils dépendent grandement de la paramétrisation adoptée pour représenter l'advection entre boîtes.

**Welander (1982)** conçoit un modèle de boîtes très simple susceptible de présenter des oscillations dites oscillations *flip-flop*. Il s'agit de deux réservoirs superposés, homogènes en température et salinité. La boîte du haut est forcée par des conditions de relaxation pour la température et la salinité, le temps de rappel étant plus court pour la température. La couche inférieure a une température et une salinité fixées. Le mélange entre les deux couches est représenté par un coefficient d'échange qui est de faible valeur quand la colonne d'eau est stable statiquement (mélange diffusif) et de valeur élevée en cas contraire (mélange convectif).

Un cycle oscillatoire se déroule comme suit. Les conditions aux limites sont telles que l'océan de surface est salé et chauffé, l'effet thermique dominant l'effet salin sur le champ de densité. La couche supérieure de l'océan se réchauffe et devient donc plus légère. Quand la température océanique devient proche de la température de rappel, le flux de chaleur à l'interface devient très faible. L'influence de la salinité devient alors importante. Sous l'effet du forçage salin, la densité augmente et peut éventuellement dépasser celle de la couche inférieure. Le processus convectif se déclenche alors : l'eau froide et relativement douce de la boîte inférieure est mélangée très rapidement à celle de la boîte supérieure. La stabilité statique est rétablie. Le mélange par convection cesse et le cycle peut recommencer. La phase diffusive de l'oscillation est bien sûr beaucoup plus longue que la phase convective.

Ces oscillations existent parce que le modèle possède deux états d'équilibre (l'un convectif, l'autre diffusif) qui, pour certaines valeurs des paramètres, ne peuvent pas être atteints. La solution oscille alors entre ces deux attracteurs, en décrivant un cycle limite. Comme dans le modèle de Stommel, les deux paramètres déterminants sont le rapport des temps de relaxation salin et thermique et le rapport des contributions saline et thermique sur le champ de densité.

La fonction représentant la transition entre mélange diffusif et mélange convectif est, dans le modèle de Welander (1982), un échelon imposant une forte différence entre les deux coefficients d'échange. En considérant une évolution plus progressive du coefficient

de mélange, les oscillations ont pu être supprimées (Ruddick et Zhang (1989), Zhang (1991)).

**Zhang (1991)** développa un modèle à quatre boîtes composé de deux colonnes d’eau, l’une polaire et l’autre équatoriale. Les deux boîtes de fond, comme les deux boîtes de surface, sont connectées par des tubes de volume négligeable. Le système peut présenter des oscillations de type *flip-flop* sur chacune des deux colonnes. De plus la convection dans une colonne d’eau et l’advection entre les deux colonnes peuvent interagir de telle sorte que le système se maintienne longtemps dans un état oscillant. En faisant varier le temps de parcours des tubes de connexions, on peut influencer sur la durée des oscillations.

En ajoutant une composante stochastique au flux d’eau douce imposé, **Cessi (1994)** a pu exciter des oscillations entre les deux états d’équilibre stable d’un modèle à deux boîtes de type modèle de Stommel. Le gradient de salinité se comporte comme une particule visqueuse soumise à l’agitation brownienne dans un double puits de potentiel. La solution oscille autour de chacun des deux états d’équilibre, la fréquence de transition entre les deux états dépendant de l’intensité du forçage. Le spectre de l’oscillation ne comporte pas de fréquence propre, puisque le modèle de boîtes ne présente pas d’oscillations spontanées sous un forçage constant.

Les oscillations de la circulation thermohaline présentes dans les modèles de boîtes ne sont pas directement comparables à celles observées dans des modèles plus réalistes. En particulier, les temps caractéristiques de ces oscillations sont peu significatifs en raison du haut degré de simplification des paramétrisations adoptées. Néanmoins, ces modèles très simples permettent de mieux appréhender certains mécanismes de base des oscillations. On citera par exemple l’étude de Yin (1995) qui retrouve dans un modèle de boîtes le mécanisme à l’œuvre dans les oscillations interdécennales d’un modèle de circulation générale océanique tridimensionnel (voir II.2.4.b).

## (b) Variabilité décennale et interdécennale

En utilisant un modèle de circulation générale océanique tridimensionnel dans une configuration géométrique d’un seul hémisphère rectangulaire, **Weaver & Sarachik (1991b)** et **Weaver et al. (1993)** observent des oscillations autoentretenues de la circulation thermohaline sur une période de l’ordre de la décennie. Ces oscillations se développent quand le forçage salin est “dominant” (selon la terminologie introduite par Weaver et al. (1993)) et qu’une région fortement évaporative existe au milieu de l’océan entre la gyre anticyclonique subpolaire et la gyre cyclonique subéquatoriale. Une telle région génère des eaux de surface anormalement salines, dont l’advection zonale est une composante du mécanisme explicatif proposé.

Dans **Weaver & Sarachik (1991b)**, la circulation oscille entre un régime actif avec formation d’eau profonde au pôle et un régime inactif sans aucune convection profonde. Quand la circulation est interrompue, des eaux chaudes provenant d’un courant de subsurface de bord ouest passent lentement sur la zone évaporative située entre les deux

gyres horizontales et deviennent fortement salines. Ces eaux anormalement chaudes et salines sont advectées par le courant moyen vers le bord est, où elles coulent en raison de leur forte salinité. Le gradient de pression créé par cette convection induit un courant de bord, qui les entraîne vers le pôle. L'eau environnante devenant de plus en plus froide, ces eaux chaudes tendent à s'élever au fur et à mesure qu'elles se rapprochent du pôle. Aux hautes latitudes elles gagnent par convection la surface, où elles relâchent leur excès de chaleur au profit de l'atmosphère, puis coulent à nouveau en raison de leur forte salinité. Ainsi la plongée d'eau aux hautes latitudes redémarre. Dès lors, les eaux de surface passent rapidement sur la zone fortement évaporative. L'anomalie de salinité ne peut plus se développer et l'effet adoucissant du forçage salin aux hautes latitude domine la circulation. Celle-ci diminue alors nettement ou s'interrompt, et le cycle peut se répéter.

L'échelle de temps de cette oscillation correspond au temps nécessaire pour qu'une anomalie de salinité et de température soit advectée en surface du milieu de l'océan à la frontière est, puis en subsurface jusqu'au pôle le long de cette frontière. Dans le cas d'un tracé des côtes réaliste, le temps du trajet serait certainement plus long que pour un bassin rectangulaire.

Notons que les états extrêmes de l'oscillation sont différents dans **Weaver et al. (1993)**. Dans un régime la formation d'eau profonde a lieu au pôle, dans le second elle a lieu à la latitude de la zone fortement évaporative. Le processus invoqué est néanmoins qualitativement le même.

**Weaver et al. (1993)** ont montré la robustesse de cette oscillation. Elle n'est supprimée ni par un changement d'état initial, ni par l'ajout d'un terme stochastique au flux salin de surface, ni par une augmentation du coefficient de viscosité verticale. Dans un bassin symétrique par rapport à l'équateur, elle peut se produire indépendamment dans l'un ou l'autre des deux hémisphères. Dans les expériences en configuration deux bassins réalisées par **Hughes & Weaver (1994)**, une telle variabilité peut se produire dans l'Atlantique Nord ou dans l'océan Austral.

Le lien entre présence d'une zone de forte évaporation et variabilité décennale de la circulation méridienne apparaît déjà dans le travail de **Marotzke (1990)**. Si une telle zone existe, Marotzke enregistre des fluctuations dans l'activité convective des régions du courant circumpolaire Antarctique. En l'absence d'une telle zone, aucune variabilité n'est simulée.

Avec un modèle bidimensionnel en moyenne zonale incluant un forçage dynamique en surface, **Hovine & Fichefet (1994)** obtiennent un état de quasi-équilibre présentant des oscillations sur une période de 8.5 années. L'existence de cette variabilité est là aussi liée à la présence d'une zone d'évaporation nette vers 55 – 65° Nord qui engendre l'apparition d'une cellule de circulation inverse dans l'Atlantique Nord. L'amplitude des oscillations observées est nettement moindre que dans les simulations tridimensionnelles citées précédemment. Cela peut être imputé au fort coefficient de diffusivité verticale employé. L'ajout d'une composante stochastique au flux salin permet d'amplifier ces oscillations internes.

**Yin & Sarachik (1995)** ont proposé un mécanisme différent pour expliquer les oscillations interdécennales qu'ils observent dans une version monohémisphérique d'un modèle de circulation générale tridimensionnel. Le cycle observé possède une période d'environ 14 ans et correspond à des fluctuations de l'activité convective à l'est du bassin. Il est modulé par un cycle secondaire de 26 ans, correspondant à des fluctuations de l'activité convective à l'intérieur du bassin. Seul le cycle à 14 ans est étudié. Deux mécanismes concurrents entrent en jeu : l'adoucissement des régions subpolaires par advection horizontale de surface (gyre subpolaire) et diffusion favorise la constitution d'une halocline polaire et l'extinction de la convection profonde, tandis que le réchauffement de la subsurface polaire par les courants provenant des régions subéquatoriales tend à déclencher la convection.

Le cycle oscillatoire se déroule selon le scénario qui suit. Initialement, la circulation est faible ou interrompue. L'advection d'eau chaude en subsurface dans les régions subpolaires initie la convection profonde, qui homogénéise la colonne d'eau : les eaux de surface deviennent plus chaudes et salées et les eaux de subsurface plus froides et douces. La convection s'accompagne d'un courant de surface cyclonique, qui transporte de l'eau douce polaire dans les zones convectives. Cette advection de surface et la diffusion induisent un affaiblissement ou une extinction de la convection. Le cycle peut alors se répéter.

**Yin (1995)** construit un modèle de deux boîtes empilées susceptible de reproduire ce mécanisme oscillatoire. Les deux processus horizontaux d'advection sont paramétrés en terme de relaxation, le temps de rappel étant plus court pour la salinité de surface que pour l'échauffement de subsurface. Des oscillations de type *flip-flop* sont obtenues. Selon les intensités respectives des forçages salin et thermique dans chacune des boîtes, la période des oscillations varie.

**Delworth et al. (1993)** observèrent des oscillations irrégulières d'une période d'environ 50 ans dans un modèle de circulation générale couplé océan-atmosphère analogue à celui utilisé par Manabe & Stouffer (1988). Cette variabilité découle de la présence d'anomalies du champ de densité dans les zones de convection profonde de l'Atlantique Nord. Ces anomalies sont elles-mêmes affectées par les variations de la circulation thermohaline et par le transport de sel et de chaleur par les gyres horizontales.

**Saravanan & McWilliams (1995)** ont observé des oscillations à l'aide d'un modèle couplé simplifié comprenant un modèle atmosphérique à deux couches et un modèle océanique en moyenne zonale. La variabilité de la composante océanique se caractérise par un signal interdécennal, modulé par une oscillation séculaire. Les oscillations dominantes sont associées à l'advection par la circulation méridienne d'anomalies de température, qui influent sur son intensité quand elles se trouvent dans les zones de convection profonde. La variabilité séculaire est détectée en considérant séparément les évolutions de la température et de la salinité. En effet ces deux champs oscillent en phase et avec des amplitudes respectives telles que le champ de densité n'en est pas affecté. Le modèle étant couplé, l'atmosphère devrait réagir à cette oscillation par des flux susceptibles de la limiter. Cette rétroaction n'est peut être pas observée en raison de la correction



de flux appliquée. Dans les modèles océaniques forcés en surface, l'usage de conditions aux limites de relaxation ou mixtes empêchent le développement de tels modes.

Notons qu'une variabilité décennale se développe également dans des modèles couplés océan–glace de mer. **Yang & Neelin (1993)** utilisent un modèle comprenant un océan en moyenne zonale et un modèle de glace de mer thermodynamique. Les oscillations obtenues sont attribuées au couplage entre le cycle fonte/formation de glace et les variations d'intensité de la circulation thermohaline. Quand la glace se forme, la saumure rejetée tend à fortifier la circulation thermohaline. Plus d'eau chaude est alors transportée vers les hautes latitudes et la glace se met à fondre. L'anomalie d'eau douce résultante entraîne un affaiblissement de la circulation thermohaline. L'eau des hautes latitudes se refroidit et la glace peut se former à nouveau. **Zhang et al. (1995)** ont couplé un modèle d'océan géostrophique tridimensionnel avec un modèle thermodynamique de glace de mer. Les oscillations qu'ils observent sont essentiellement attribuées à l'effet isolant de la couverture de glace de mer. La glace de mer se forme dans des régions où l'océan perd beaucoup de chaleur au profit de l'atmosphère. Une fois formée, elle isole les deux milieux l'un de l'autre et l'océan peut se réchauffer. La circulation thermohaline transporte des eaux chaudes vers les pôles entraînant une fonte de la glace de mer. Les zones dégagées recommencent à perdre beaucoup de chaleur au profit de l'atmosphère et la glace se forme à nouveau. Ce mécanisme domine celui proposé par Yang & Neelin (1993).

De nombreux auteurs ont observé dans des modèles océaniques ou couplés de circulation générale des oscillations décennales ou interdécennales de la circulation thermohaline. Cette échelle de temps indique que l'oscillation provient d'une rétroaction entre processus advectifs et convectifs. La plupart des mécanismes invoqués font intervenir le transport en surface ou en subsurface par les courants. Ces processus ne sont généralement pas représentés dans les modèles bidimensionnels. Ce type d'oscillations y est donc difficilement observable.

### (c) Variabilité séculaire

Un autre type d'oscillations, dont l'échelle de temps caractéristique est celle de la circulation thermohaline, est observée dans de nombreux modèles. L'origine de ces fluctuations tient à l'advection d'anomalies de salinité par la circulation thermohaline. Ces anomalies ralentissent ou accélèrent la circulation, de façon à être amplifiées par l'action du forçage d'eau douce de surface ou à se maintenir malgré lui.

Prenons le cas d'une propagation d'anomalie de salinité positive par une circulation de type thermique avec plongée d'eau aux pôles et remontée d'eau à l'équateur. Une anomalie positive de salinité située en surface aux basses latitudes tend à réduire la circulation thermohaline. Elle reste donc plus longtemps soumise à l'effet de l'évaporation qui y règne et s'en trouve amplifiée. Elle est advectée par la circulation ralentie vers les hautes latitudes, où elle induit une intensification de la convection profonde et donc

une accélération de la circulation. Elle est donc peu longtemps soumise à l'effet adoucissant du flux salin aux hautes latitudes. Puis elle est transportée en profondeur par la circulation jusqu'aux basses latitudes, où elle refait surface. Le cycle oscillatoire peut alors se répéter.

**Winton & Sarachik (1993)** ont obtenu une oscillation de ce type dans des modèles bi- et tridimensionnels, dont l'équation dynamique repose sur un équilibre géostrophique modifié par un frottement de Rayleigh et un forçage dynamique. Dans les simulations bidimensionnelles, la période de l'oscillation est très proche de l'échelle de temps de la circulation thermohaline. Elle est un peu plus courte lors des simulations tridimensionnelles et l'anomalie de salinité a tendance à disparaître dans la phase de circulation ralentie de l'oscillation. Ces auteurs ont montré que l'essentiel de ce mécanisme est présent dans un *modèle de boucle* extrêmement simple, constitué d'un anneau de fluide soumis à un forçage thermique et salin adapté et dont la vitesse angulaire est liée à la densité.

Avec le modèle tridimensionnel HLSG (Hamburg Large-Scale Geostrophic ocean general circulation model), **Mikolajewicz & Maier-Reimer (1990)** observent une oscillation de même nature, quand le flux d'eau douce de surface comprend une composante stochastique. Un dipôle d'anomalies de salinité est transporté dans l'océan Atlantique par la circulation thermohaline et interagit avec elle. La variabilité présente une période dominante de 320 ans, très proche de la période de retournement de la circulation. Avec le même modèle, **Pierce et al. (1995)** ont simulé des oscillations similaires en utilisant un flux salin de surface constant.

En utilisant le modèle bidimensionnel développé par Wright & Stocker (1991) dans la configuration un seul bassin à fond plat, **Mysak et al. (1993)** observent une oscillation analogue d'une période de 200 à 300 années quand le forçage en eau douce inclut un terme stochastique. Les auteurs ont effectué plusieurs expériences de sensibilité pour tester la robustesse de cette oscillation. En augmentant la diffusivité verticale on obtient une solution stable et non plus périodique. En diminuant la diffusivité verticale ou en augmentant la diffusivité horizontale, on observe des oscillations de nature totalement différente : la circulation oscille entre trois modes sur une période de plusieurs dizaines de milliers d'années. De même, avec un modèle en moyenne zonale à trois bassins de géographie réaliste, **Hovine (1993)** observe une variabilité à l'échelle de temps de la circulation thermohaline si le flux d'eau douce en surface comprend un terme stochastique.

Notons que **Weaver et al. (1993)** obtiennent des oscillations séculaires pour seul type de variabilité quand ils ajoutent une composante stochastique au flux d'eau douce et utilisent des paramètres qui ne permettaient pas de simuler des oscillations avec un forçage constant.

Des oscillations séculaires de la circulation thermohaline ont été observées dans tous les types de modèles océaniques. Leur source est l'advection d'anomalies de salinité par la circulation elle-même. Leur échelle de temps caractéristique est donc proche du

temps de retournement de la circulation. En outre, elles sont facilement excitées par l'ajout d'un terme stochastique au forçage salin de surface.

#### (d) Variabilité millénaire

**Marotzke (1990)** et **Weaver et Sarachik (1991b)** ont observé des phénomènes dits *flushes* en imposant un flux d'eau douce en surface très important aux hautes latitudes. Il s'agit de périodes courtes pendant lesquelles la circulation est très intense et qui se produisent régulièrement, la circulation étant quasi nulle le reste du temps. Le mécanisme explicatif proposé est essentiellement diffusif.

Après passage d'une *double condition de relaxation* aux *conditions diagnostiquées mixtes*, une *catastrophe halocline polaire* a lieu et la circulation thermohaline de type thermique (plongée d'eau aux pôles) est interrompue (**Weaver et Sarachik (1991b)**) ou adopte un mode inverse avec plongée d'eau équatoriale de faible amplitude durant plusieurs milliers d'années (**Marotzke (1990)**). Pendant cette période il n'y a donc pas, ou presque pas, de transport convectif de chaleur. En revanche, l'océan continue à recevoir de la chaleur aux basses latitudes par échange avec l'atmosphère. Par diffusion verticale et horizontale, les colonnes d'eau des basses latitudes puis l'ensemble de l'océan profond se réchauffent. Les eaux de surface aux hautes latitudes restent froides en raison du forçage thermique appliqué. Eventuellement, les eaux profondes des hautes latitudes peuvent devenir suffisamment chaudes pour que la stabilité statique soit violée et que la convection se déclenche. La circulation résultante est si violente que l'océan relâche dans l'atmosphère en quelques décennies toute la chaleur emmagasinée pendant des milliers d'années. Après cet événement extrêmement énergétique, la circulation oscille pendant quelques dizaines d'années avant de s'interrompre sous l'effet du forçage d'eau douce. Le scénario peut se répéter.

Ce mécanisme diffusif explique l'occurrence de *flushes* dans les modèles bidimensionnels (**Marotzke et al. (1988)**, **Wright & Stocker (1991)**). Il reste à l'œuvre dans les modèles tridimensionnels, où d'autres processus peuvent entrer en jeu. En particulier, le transport de sel vers les hautes latitudes par les gyres horizontales de surface s'oppose à l'extension de la halocline polaire vers l'équateur.

Dans les simulations tridimensionnelles effectuées par **Marotzke (1990)**, l'application d'un forçage dynamique empêche l'apparition de *flushes*. A la suite d'une *catastrophe halocline polaire*, l'apport de sel par la circulation due au vent est suffisant pour rétablir la convection profonde aux hautes latitudes, et par suite la circulation thermique. Dans **Weaver et Sarachik (1991b)**, des *flushes* sont observés en présence de forçage dynamique. Celui-ci n'est pas suffisamment intense pour lutter contre l'action du flux net d'eau douce aux hautes latitudes. L'intensité relative du forçage salin par rapport au forçage dynamique est donc déterminante quant à la persistance d'un mode opératoire peu ou pas convectif, qui permet à l'océan de stocker suffisamment de chaleur et crée les conditions favorables à l'occurrence de *flushes*. L'ajout d'un terme stochastique au flux salin ne supprime pas les *flushes*, mais les rend plus fréquents et moins intenses

(Weaver *et al.* (1993)).

**Winton & Sarachik (1993)** ont également observé une oscillation millénaire incluant une phase de type *flush*. Leur *deep-decoupling oscillation* présente trois phases : une période découplée où la circulation est de faible profondeur et peu intense, un *flush* et une période couplée où la circulation est profonde et intense. Quand on augmente l'intensité du forçage salin, la phase découplée devient plus longue, le *flush* plus énergétique et la phase couplée plus courte. Cette constatation laisse penser que les oscillations observées dans les études décrites précédemment correspondent à un forçage salin si intense que la troisième phase est totalement supprimée.

Trois processus de rétablissement de la convection profonde sont proposés par Winton & Sarachik (1993) et **Winton(1993)**. Le premier fait intervenir une interaction entre accumulation de chaleur par diffusion et processus convectif. La cellule convective de faible profondeur qui subsiste pendant la phase découplée est intensifiée par l'instabilité de la colonne d'eau due au chauffage diffusif. Le transport de surface entre l'équateur et le pôle est intensifié et l'apport de sel subséquent aux hautes latitudes permet de briser la halocline polaire. On peut parler de *catastrophe halocline* inverse. En second lieu, la gyre subpolaire transporte en subsurface de la chaleur aux hautes latitudes, ce qui tend à déstabiliser la colonne d'eau et à rompre la halocline polaire par convection. Notons que cet effet déstabilisant est d'autant plus important que l'équation d'état est non-linéaire. Enfin, la propagation de tourbillons cycloniques détachés des courants de bord ouest transporte des eaux chaudes et salées vers l'est puis vers le pôle, ce qui s'oppose à la stabilité de la halocline polaire. Cette activité tourbillonnaire est d'autant plus intense que l'océan est chaud. Par une étude énergétique des différentes phases de l'oscillation, **Winton (1995a)** conclut que la phase couplée de l'oscillation est une réponse au stockage de chaleur par l'océan pendant la phase découplée, plus que le résultat d'une brisure de la halocline polaire par tel ou tel mécanisme.

L'occurrence de *flushes* est également simulée par **Harvey (1992)** à l'aide d'un modèle couplé océan–glace de mer–atmosphère. La composante océanique est un modèle en moyenne zonale, le modèle de glace de mer est thermodynamique et l'atmosphère est représentée par un modèle sophistiqué de bilan énergétique.

Des oscillations à l'échelle du millier d'années sont simulées par tous les types de modèles. Un mécanisme diffusif bidimensionnel suffit à les expliquer : en l'absence de convection thermohaline, l'ensemble de l'océan se réchauffe par diffusion, jusqu'à ce que la stabilité statique soit brisée aux hautes latitudes et la convection profonde déclenchée. L'excès de chaleur emmagasiné par l'océan est rapidement libéré au profit de l'atmosphère et la convection ne tarde pas à s'interrompre. Dans les modèles complexes, d'autres mécanismes entrent en jeu, qui luttent contre cette variabilité ou la favorisent.

## (e) Sensibilités

Les études citées précédemment ont mis en évidence l'extrême sensibilité de la circulation thermohaline au flux d'eau douce de surface. Or les observations disponibles de ce flux sont beaucoup trop partielles pour être utilisées comme condition de surface des modèles océaniques. Les flux utilisés actuellement pour forcer ces modèles sont en général diagnostiqués de simulations effectuées avec une condition de relaxation pour la salinité de surface. Il est très difficile d'estimer si ces flux sont ou non raisonnables. Cela est très gênant puisqu'une faible variation de ce flux peut induire un changement radical de la circulation thermohaline. De plus, les structures locales de ce flux (la présence d'une zone fortement évaporative par exemple) peuvent induire un comportement oscillatoire de la circulation.

De plus, les oscillations de la circulation thermohaline sont sensibles à la valeur du coefficient de diffusivité verticale. De nombreux auteurs parviennent à stabiliser une solution périodique par simple augmentation de ce paramètre. Or les phénomènes diffusifs ne sont pas très bien représentés dans les modèles océaniques actuels et la marge d'incertitude sur la valeur du coefficient de diffusivité verticale est très grande.

Quelques auteurs ont récemment associé les différents modes opératoires de la circulation thermohaline à des oscillations locales de type *flip-flop* du schéma d'*ajustement convectif*. **Lenderick & Haarsma (1994)** montrent qu'un modèle à deux boîtes superposées, analogue à celui de Welander, exhibe quatre régimes selon les valeurs des paramètres : convectif, non-convectif, périodique et un dernier régime double où les comportements convectifs et non convectifs sont tous deux possibles. Les auteurs appliquent les résultats de ce modèle de boîtes aux points de grille d'un modèle océanique géostrophique à trois niveaux. Quand un point se trouve dans le régime double, une transition entre convection et absence de convection est susceptible de se produire en réponse à une faible perturbation. La transition peut se produire en un point seulement ou se propager aux points environnants. Si seule une faible aire du domaine est susceptible de connaître les deux états et qu'elle a une faible influence spatiale, la circulation thermohaline sera probablement stable. Si au contraire la zone est étendue ou très influente, la circulation sera facilement déstabilisée. **Rahmstorf (1995)** a appliqué les résultats de cette étude à un modèle océanique tridimensionnel à deux bassins. Sous des *conditions de surface mixtes*, plusieurs circulations de type *conveyor belt* sont possibles. Elles correspondent à des distributions convectives différentes, i.e. les points de convection profonde ne sont pas les mêmes. La structure locale convective dans l'Atlantique Nord a des répercussions globales. Quand un forçage de chaleur tenant compte des transports latéraux par l'atmosphère est appliqué, diverses structures convectives existent toujours, mais l'intensité de la circulation reste la même.

**Cessi (1996a)** étudie les caractéristiques communes des oscillations de type *flip-flop* du modèle de Welander et d'un schéma d'*ajustement convectif*. Le modèle oscille ou non en fonction de l'intensité du flux d'eau douce. Une fois la valeur seuil franchie, les oscillations ont une amplitude quasi constante, mais une période variant continûment avec l'intensité du flux d'eau douce. Pour certains jeux de paramètres, la solution

est stable si le forçage est constant, mais oscillante si le forçage salin comprend un terme stochastique. La circulation thermohaline simulée par les modèles de circulation générale océanique présente les mêmes caractéristiques : les oscillations séculaires et millénaires observées sont associées à une succession d'activations et d'interruptions de l'*ajustement convectif*.

L'utilisation de modèles plus réalistes permet néanmoins d'obtenir des circulations plus stables. Citons par exemple l'étude de **Moore & Reason (1993)** qui observent dans un modèle océanique de circulation générale des oscillations interdécennales quand le fond océanique est plat, mais une circulation stationnaire quand une bathymétrie réaliste est prise en compte.

Dans les études menées à l'aide de modèles couplés océan-atmosphère, des boucles de rétroaction se mettent en place, qui contribuent à stabiliser la circulation. De tels processus de stabilisation existent certainement dans l'océan réel, dont la circulation thermohaline semble quasi stable depuis des millénaires.

La présence d'équilibres multiples et la variabilité de la circulation thermohaline ont été observées dans tous les types de modèles océaniques et climatiques, des modèles de boîtes aux modèles couplés de circulation générale. Ces observations numériques corroborent les hypothèses qui invoquent des changements de mode opératoire ou des oscillations de la circulation thermohaline pour expliquer les nombreux événements climatiques décelables dans les enregistrements paléoclimatiques.

Le point de vue de notre étude est une approche simplifiée visant à mieux comprendre certains mécanismes de base des phénomènes décrits ci-dessus. Elle se situe dans une lignée de travaux conduits avec des modèles bidimensionnels de Boussinesq de la circulation thermohaline. Ces diverses études mères sont présentées au chapitre III.

## CHAPITRE III

# Modèle bidimensionnel de Boussinesq

### III.1 Modèle de l'étude

Le modèle considéré ici est analogue à celui déjà étudié par **Thual & McWilliams (1992)**, **Quon & Ghil (1992 et 1995)**, **Cessi & Young (1992)** et **Dijkstra & Molemaker (1997)**. Mais le choix des grandeurs d'adimensionnement varie selon les auteurs (voir Annexe B - tableau 1). La formulation des paramètres adimensionnels dans ces différentes études est présentée en Annexe B - tableau 2, ainsi que les relations permettant de passer d'un jeu de paramètres à un autre.

#### III.1.1 Equations

On considère un bassin rectangulaire à fond plat de largeur  $L$  et de profondeur  $d$ . Les équations régissant la couche de fluide sont formulées dans un repère cartésien non-tournant ( $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ ). Les variables de position sont  $y$  pour l'horizontale (la "latitude") et  $z$  pour la verticale et leurs domaines de variation sont  $-L/2 \leq y \leq L/2$  et  $-d \leq z \leq 0$ .

Le modèle se compose d'une équation de Navier-Stokes simplifiée par l'approximation de Boussinesq pour le mouvement et de deux équations d'advection-diffusion pour la température et la salinité. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= - \frac{\nabla p}{\rho_0} + B(T, S) \mathbf{e}_z + \nu^{(H)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{u} + \nu^{(V)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} T + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \kappa_T^{(H)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} T + \kappa_T^{(V)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} T \\ \frac{\partial}{\partial t} S + \mathbf{u} \cdot \nabla S &= \kappa_S^{(H)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} S + \kappa_S^{(V)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} S, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{u}(v, w)$  symbolise le vecteur vitesse,  $p$  le champ de pression,  $\rho_0$  la valeur moyenne du champ de densité  $\rho$ ,  $T$  le champ de température et  $S$  celui de salinité. Les coefficients de

dissipation sont la viscosité horizontale  $\nu^{(H)}$ , la viscosité verticale  $\nu^{(V)}$ , les diffusivités thermiques horizontale  $\kappa_T^{(H)}$  et verticale  $\kappa_T^{(V)}$  et les diffusivités salines horizontale  $\kappa_S^{(H)}$  et verticale  $\kappa_S^{(V)}$ . L'équation d'état du fluide est linéaire et le terme de flottabilité s'écrit  $B(T, S) = -g \rho / \rho_0 = g (\gamma_T T - \gamma_S S)$ , où  $g$  est l'accélération gravitationnelle,  $\gamma_T$  le coefficient de dilatation thermique et  $\gamma_S$  celui de contraction saline.

### III.1.2 Conditions aux limites

Le modèle est forcé en surface par des conditions aux limites de température et de salinité symétriques par rapport à l'équateur ( $y = 0$ ).

Elles peuvent être de type *double condition de Dirichlet* :

$$T = \Delta T \mathcal{F}_T(y) \quad \text{et} \quad S = \Delta S \mathcal{F}_S(y) \quad \text{en} \quad z = 0 ,$$

mais sont plus souvent de type *mixte* :

$$T = \Delta T \mathcal{F}_T(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} S = \frac{\Delta S}{d} \mathcal{F}_S(y) \quad \text{en} \quad z = 0 .$$

$\Delta T$  et  $\Delta S$  sont les intensités dimensionnelles des forçages.  $\mathcal{F}_T(y)$  and  $\mathcal{F}_S(y)$  sont les profils de forçage, d'amplitude unitaire. La formulation *double condition de Dirichlet* peut être utilisée afin d'obtenir un état d'équilibre compatible avec des températures et des salinités de surface réalistes, mais elle ne représente pas correctement l'action de l'atmosphère sur la salinité océanique. Les *conditions mixtes* traduisent bien mieux la physique des interactions océan-atmosphère à l'interface (voir II.2.2).

Au fond et sur les parois verticales du domaine, on applique une condition de type *flux nul* pour la température et la salinité :

$$\frac{\partial}{\partial n} T = \frac{\partial}{\partial n} S = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm L/2 \quad \text{et} \quad z = -d ,$$

où  $\frac{\partial}{\partial n}$  est la dérivée normale à la paroi considérée.

Une condition de *glissement sans frottement* est imposée au champ de vitesse sur les quatre parois du domaine :

$$\begin{aligned} v = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} w = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm L/2 . \\ w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} v = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = -d . \end{aligned}$$

### III.1.3 Adimensionnement

Dans cette étude, les facteurs d'échelle choisis sont :  $d$  pour les longueurs horizontales et verticales,  $2\pi d^3 / L \kappa_T^{(H)}$  pour le temps,  $\nu^{(H)} \kappa_T^{(H)} L^2 / (4\pi^2 d^5 g \gamma_T)$  pour la température et  $\nu^{(H)} \kappa_T^{(H)} L^2 / (4\pi^2 d^5 g \gamma_S)$  pour la salinité.



De façon classique, on définit la fonction de courant  $\Psi$  dans le plan  $(y, z)$  par :

$$v = -\frac{\partial}{\partial z}\Psi \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial}{\partial y}\Psi .$$

Ainsi, on peut éliminer les termes de pression de l'équation du mouvement.

En notant  $J(f, g) = \frac{\partial}{\partial y}f \frac{\partial}{\partial z}g - \frac{\partial}{\partial z}f \frac{\partial}{\partial y}g$  l'opérateur Jacobien, les équations adimensionnées écrites en terme de fonction de courant sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k \sigma_P} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + J(\Psi, \nabla^2 \Psi) \right] &= \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial y} (T - S) + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \delta_\nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi \\ \frac{1}{k} \left[ \frac{\partial}{\partial t} T + J(\Psi, T) \right] &= \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \delta_{\kappa_T} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T \\ \frac{1}{k} \left[ \frac{\partial}{\partial t} S + J(\Psi, S) \right] &= Le \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \delta_{\kappa_S} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) S , \end{aligned}$$

où  $k$ ,  $\sigma_P$ ,  $\delta_\nu$ ,  $\delta_{\kappa_T}$ ,  $\delta_{\kappa_S}$  et  $Le$  sont les paramètres adimensionnels explicités plus bas.

Les domaines de variation des deux variables d'espace adimensionnées sont :

$$-\pi/k \leq y \leq \pi/k \quad \text{et} \quad -1 \leq z \leq 0 .$$

Sous forme adimensionnelle, le forçage de surface s'écrit :

$$T = a F_T(ky) \quad \text{et} \quad S = b F_S(ky) \quad \text{en} \quad z = 0 ,$$

dans le cas d'une *double condition de Dirichlet* ou :

$$T = a F_T(ky) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} S = b F_S(ky) \quad \text{en} \quad z = 0 ,$$

dans le cas de *conditions mixtes*.  $a$  et  $b$  sont les amplitudes des forçages et les fonctions  $F_T$  et  $F_S$  sont telles que :  $F_T(ky) = \mathcal{F}_T(y_{\text{dim}})$  et  $F_S(ky) = \mathcal{F}_S(y_{\text{dim}})$ , où  $y_{\text{dim}}$  représente la latitude non adimensionnée.

Les autres conditions aux limites s'expriment :

$$\begin{aligned} \Psi = \partial^2 \Psi / \partial z^2 &= 0 & \text{en} \quad z &= 0 \\ \partial T / \partial z = \partial S / \partial z &= 0 & \text{et} \quad \Psi = \partial^2 \Psi / \partial z^2 &= 0 & \text{en} \quad z &= -1 \\ \partial T / \partial y = \partial S / \partial y &= 0 & \text{et} \quad \Psi = \partial^2 \Psi / \partial y^2 &= 0 & \text{en} \quad y &= \pm \pi/k . \end{aligned}$$

Les paramètres adimensionnels contrôlant ce système sont les suivants :

- le nombre d'onde fondamental :  $k = 2\pi d/L$ , qui est égal à  $2\pi$  près au rapport d'aspect du bassin considéré. Par abus de langage, nous appellerons  $k$  rapport d'aspect du bassin.
- l'intensité du forçage thermique :  $a = 4\pi^2 d^5 g \gamma_T \Delta T / (\nu^{(H)} \kappa_T^{(H)} L^2)$ .

- l'intensité du forçage salin :  $b = 4\pi^2 d^5 g \gamma_S \Delta S / (\nu^{(H)} \kappa_S^{(H)} L^2)$ .
- le nombre de Prandtl :  $\sigma_P = \nu^{(H)} / \kappa_T^{(H)}$ .
- le nombre de Lewis :  $Le = \kappa_S^{(H)} / \kappa_T^{(H)}$ .
- le rapport d'anisotropie des viscosités :  $\delta_\nu = \nu^{(V)} / \nu^{(H)}$ .
- les rapports d'anisotropie des diffusivités :  $\delta_{\kappa_T} = \kappa_T^{(V)} / \kappa_T^{(H)}$  et  $\delta_{\kappa_S} = \kappa_S^{(V)} / \kappa_S^{(H)}$ .

Le modèle dépend donc de huit paramètres adimensionnels et des deux profils de forçage  $F_T$  et  $F_S$ .

### III.1.4 Hypothèses de l'étude

Dans le modèle considéré ici, les effets de la rotation ne sont pas pris en compte. D'autres auteurs - notamment **Wright & Stocker (1991)** - considèrent des modèles bidimensionnels de la circulation thermohaline incluant une paramétrisation de la rotation. Ces modèles sont dérivés des équations tridimensionnelles par moyenne zonale. **Vellinga (1996)** a comparé les comportements dynamique du modèle de Wright & Stocker et d'un modèle analogue à celui considéré ici. Il a conclu que les deux modèles étaient qualitativement similaires. Le comportement du modèle est principalement déterminé par les équations d'évolution thermique et saline, et n'est que peu sensible aux différences de formulation de l'équation de mouvement. Négliger les effets rotatifs semble donc raisonnable.

De plus, aucune paramétrisation du type *ajustement convectif*, forçant le mélange vertical de la colonne d'eau en cas d'instabilité statique, n'est utilisée ici. Réalisant des expériences de transition entre *double condition de Dirichlet* et *conditions diagnostiquées mixtes* avec un modèle hydrostatique bidimensionnel, Marotzke *et al.* (1988) concluent que la présence ou l'absence d'*ajustement convectif* n'influence pas qualitativement les résultats du modèle. Le mécanisme de déstabilisation de l'équilibre symétrique est essentiellement advectif et la transition entre équilibres symétrique et asymétrique est observée dans les deux cas. Mais, en présence d'*ajustement convectif*, les transports sont plus forts (+ 15% pour le transport de chaleur), la réponse à une perturbation plus rapide et violente et le comportement oscillatoire plus prononcé. Dans le cas d'une perturbation d'amplitude finie, la présence d'un *ajustement convectif* permet d'observer l'occurrence de *flushes* (voir II.2.4(d)).

Le nombre de paramètres de contrôle du modèle est trop grand pour permettre une étude paramétrique complète. Nous allons donc fixer certains de ces paramètres et nous concentrer sur un espace de contrôle réduit.

Les paramètres de dissipation sont isotropes :  $\delta_\nu = \delta_{\kappa_T} = \delta_{\kappa_S} = 1$ . Le rapport d'aspect du domaine étant petit, les effets de la dissipation sont néanmoins beaucoup plus

intenses sur l'horizontale que sur la verticale, comme c'est le cas dans les modèles de circulation générale océanique.

Le nombre de Lewis est fixé :  $Le = 1$ . Selon Quon & Ghil (1992), les variations de ce nombre n'affectent pas qualitativement le comportement du modèle.

La limite  $\sigma_P \rightarrow \infty$  est considérée. Ici, les seuls termes non-linéaires du modèle sont les termes d'advection de température et de salinité. Dans les études citées ci-après, les auteurs notent la relative insensibilité du modèle à la valeur du nombre de Prandtl.

Notre champ d'investigation sera donc limité au triplet de paramètres  $(k, a, b)$  et aux deux profils de forçage  $F_T$  et  $F_S$ .

Dans les travaux présentés en III.3, les gammes de paramètres considérées diffèrent. En particulier, Quon & Ghil (1995) considèrent des coefficients de dissipation anisotropes. Le tableau 3 en Annexe B récapitule les valeurs des paramètres fixés et les domaines d'investigation des paramètres libres pour chacune de ces études.

## III.2 Glossaire de la théorie des bifurcations

La description des équilibres multiples de la circulation thermohaline requiert l'emploi d'un vocabulaire issu de la théorie des bifurcations et de la théorie des catastrophes des systèmes dynamiques dissipatifs. Nous rappelons ici les définitions "qualitatives" des principaux concepts utilisés dans ce manuscrit.

**Système dynamique :** On appelle système dynamique un ensemble d'équations différentielles ordinaires à  $N$  degrés de liberté du type :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{X} = \vec{F}_\mu(\vec{X}) \quad \text{où} \quad \vec{X}(t) \in \mathbb{R}^N ,$$

$t$  symbolisant le temps. Le comportement du système dynamique est contrôlé par un ensemble de  $m$  paramètres, symbolisé par la lettre  $\mu$ . Etudier un tel système consiste essentiellement à déterminer la structure qualitative (ou topologique) de l'ensemble de ses solutions.

L'état du système à un moment  $t_0$  donné peut être représenté dans l'**espace des phases** de dimension  $N$  par un point dont les coordonnées sont les  $N$  composantes de  $\vec{X}$ . L'évolution du système se traduit par une trajectoire dans l'espace des phases. Une solution stationnaire du système physique associé au système dynamique est représentée par un point fixe dans l'espace des phases. A une solution physique périodique correspond une orbite périodique dans l'espace des phases.

**Stabilité linéaire d'un point fixe :** Un point fixe  $\vec{X}_0$  du système dynamique satisfait l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{X}_0 = \vec{F}_\mu(\vec{X}_0) = 0 .$$

Afin de déterminer si le point fixe est stable ou non, on applique une perturbation  $\vec{\epsilon}$  et on linéarise le système  $\vec{F}_\mu(\vec{X}_0 + \vec{\epsilon})$ . Si la réponse du système linéarisé à la perturbation  $\vec{\epsilon}$  est un retour au point fixe  $\vec{X}_0$ , celui-ci est dit linéairement stable. Si la perturbation est amplifiée par le système, le point fixe est linéairement instable. Mathématiquement, on étudie les valeurs propres de l'opérateur linéaire  $D\vec{F}_\mu$  (différentielle de  $\vec{F}_\mu$ ) en  $\vec{X}_0$ . Si la partie réelle de chacune des valeurs propres est négative, le point fixe est stable. Sinon, il est instable.

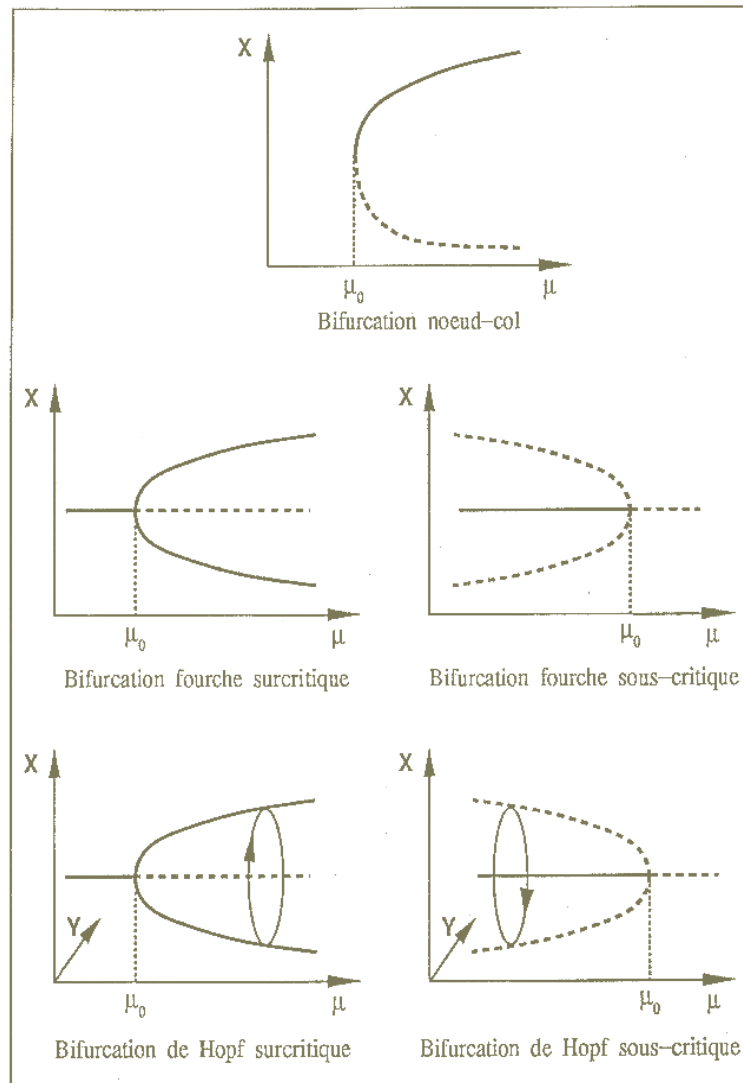
**Bifurcation :** Quand un paramètre de contrôle varie, la réponse du système est en général régulière, c'est-à-dire que sa (ou ses) solution(s) évoluent de façon continue. Mais pour certaines valeurs, dites valeurs critiques, d'un paramètre de contrôle le système adopte un nouveau comportement topologique : le nombre de ses solutions et leur stabilité changent. On parle alors de bifurcation. Le point de l'espace des paramètres où ce changement apparaît est dit **point de bifurcation**.

Les cas typiques de bifurcation ont été étudiés mathématiquement sous l'écriture la plus simple possible dite **forme normale** de la bifurcation. Par un changement de coordonnées adapté, on peut généralement ramener le problème particulier considéré à l'un des cas déjà répertoriés. On dispose ainsi immédiatement de sa théorie locale complète.

Les trois bifurcations les plus couramment observées dans les systèmes dynamiques dissipatifs sont la *bifurcation nœud-col*, la *bifurcation fourche* et la *bifurcation de Hopf*, qui sont décrites plus bas.

**Diagramme de bifurcation :** La représentation d'une propriété quelconque caractéristique de la (ou des) branche(s) de solutions du système dynamique en fonction d'un paramètre de contrôle constitue un diagramme de bifurcation (voir figure III.1).

**Codimension :** La notion de codimension permet de s'affranchir de la dimension  $m$  de l'espace des paramètres de contrôle, qui est propre au problème physique étudié, et de donner une description générale des différents types de bifurcation. La codimension d'une bifurcation est le nombre minimal de paramètres qu'il faut faire varier pour l'atteindre. Si une condition de bifurcation se présente sous la forme d'une seule relation du type  $f(\mu_1, \dots, \mu_m) = 0$ , elle sera vérifiée sur une hypersurface de dimension  $m - 1$  dans l'espace  $\mathbb{R}^m$  des paramètres. En se déplaçant sur une courbe de dimension 1 de  $\mathbb{R}^m$ , il n'est pas exceptionnel de couper l'hypersurface  $f(\mu_1, \dots, \mu_m) = 0$ . La bifurcation est dite de codimension 1. Si  $l$  relations entre les  $m$  paramètres sont nécessaires à la définition de la bifurcation, l'hypersurface sera de dimension  $m - l$  et la bifurcation de codimension  $l$ . Les trois bifurcations décrites ci-dessous sont de codimension 1.



**Figure III.1** : Diagrammes des bifurcations décrites en III.2.

**Bifurcation Nœud-Col ou Point Limite (Saddle-Node bifurcation)** : Dans une telle bifurcation, deux branches de solutions – l’une stable, l’autre instable – se rejoignent et disparaissent au point de bifurcation. Son diagramme de bifurcation est représenté figure III.1.

**Bifurcation fourche (Pitchfork bifurcation)** : C’est la bifurcation la plus fréquente dans les problèmes physiques possédant une symétrie. Au point de bifurcation, un équilibre invariant par symétrie devient instable et deux branches de solutions asymétri-

ques apparaissent, qui sont les transformées l'une de l'autre par symétrie. On parle de **brisure de symétrie** du système. Deux cas topologiquement distincts existent :

Situation surcritique ou normale : Une *bifurcation fourche* est dite surcritique si, pour des paramètres de contrôle de même valeur, les deux branches asymétriques sont stables et la branche symétrique est instable (voir figure III.1).

Situation sous-critique ou inverse : Une *bifurcation fourche* est dite sous-critique si, pour les valeurs des paramètres de contrôle où les trois solutions sont définies, les deux branches asymétriques sont instables et la branche symétrique est stable (voir figure III.1).

**Bifurcation de Hopf** : Dans ce cas, un point donne naissance à un cycle limite par franchissement d'une valeur critique d'un paramètre de contrôle. Cette bifurcation est l'équivalent en nombres complexes de la *bifurcation fourche*. Son diagramme de bifurcation est analogue à celui de la *bifurcation fourche*, si ce n'est qu'il comporte une dimension supplémentaire. Ici aussi, deux configurations existent selon que la bifurcation soit surcritique ou sous-critique (voir figure III.1).

**Théorie des catastrophes** : Cette théorie étudie la structure topologique des ensembles de solutions de l'équation implicite  $\vec{F}_\mu(\vec{X}) = 0$  lorsque les paramètres de contrôle  $\mu$  varient. Une catastrophe est observée quand, sur une surface de l'espace des solutions, les hypothèses du théorème des fonctions implicites ne sont plus vérifiées, ce qui entraîne un changement du nombre de solutions. La catastrophe de codimension 1 est appelée **pli (fold)**. L'intersection de deux plis est une catastrophe de codimension 2, dite **fronce (cusp)**. La terminologie des catastrophes de codimension supérieure ne sera pas utilisée ici.

### III.3 Comportement dynamique du modèle 2D de Boussinesq

Rechercher systématiquement les états d'équilibre d'un modèle et déterminer dans l'espace des paramètres les courbes séparant ses différents comportements permet de mieux comprendre les mécanismes qui interviennent dans le problème physique associé. Cette démarche issue de la théorie des systèmes dynamiques a été employée dès les débuts de l'étude de la circulation thermohaline (Stommel, 1961). L'usage de modèles de boîtes très simples a permis de mettre en évidence les principaux paramètres de bifurcation régissant les équilibres de la circulation thermohaline. Ce sont les intensités respectives des forçages salin et thermique et un paramètre traduisant la différence de nature entre ces forçages comme, par exemple, le rapport des temps de relaxation thermique et salin. Néanmoins les modèles de boîtes semblent trop simples pour représenter un phénomène tel que la circulation thermohaline dans toute sa complexité, et leurs

résultats demandent à être validés par confrontation avec ceux de modèles plus réalistes.

Entreprendre des études paramétriques précises avec des modèles tridimensionnels de circulation générale océanique serait extrêmement coûteux en raison des temps d'intégration numérique qu'ils requièrent et laborieux en raison du nombre très élevé de paramètres qu'ils comprennent. D'autre part certains de leurs paramètres sont ajustés selon des raisons numériques et non physiques, notamment ceux concernant la représentation des phénomènes sous-maille. Etudier le comportement du système en fonction d'un tel paramètre semble non fondé.

En revanche, étudier la structure bifurcatoire de modèles bidimensionnels de la circulation thermohaline semble une voie d'investigation judicieuse. Ces modèles comptent en effet relativement peu de paramètres et requièrent des moyens informatiques réduits. De plus, les expériences numériques conduites à l'aide de modèles bi- et tridimensionnels ont permis de montrer de grandes similitudes de comportement entre les deux types de modèles. Et, hormis pour la variabilité décennale, les mécanismes invoqués pour expliquer les phénomènes observés dans les modèles tridimensionnels sont essentiellement bidimensionnels.

Plusieurs auteurs se sont donc attachés à déterminer la structure catastrophique de modèles bidimensionnels de la circulation thermohaline. Le travail décrit dans ce manuscrit utilisant ces études à titre de bases de travail ou de points de comparaison, nous avons choisi d'en donner un résumé détaillé. Précisons que l'étude de **Cessi & Young (1992)**, fondement de notre travail, est présentée au chapitre suivant (IV.1.2).

### III.3.1 Thual & McWilliams (1992)

Le modèle de cette étude est exactement celui présenté en III.1. Seuls les profils de forçage  $F_T(ky) = F_S(ky) = \cos(ky)$  sont considérés. Viscosité et diffusivités sont isotropes. Le nombre de Lewis est égal à 1. La limite nombre de Prandtl infini est considérée. Les paramètres de contrôle du modèle sont le rapport d'aspect du domaine  $k$  et les intensités des forçages thermique  $a$  et salin  $b$ .

Notons d'abord que ce travail a mis en évidence la présence d'équilibres multiples de la circulation thermohaline en imposant directement une température et un flux de sel en surface. Jusque là, des équilibres multiples avaient été obtenus dans les études numériques en utilisant un procédé en deux étapes. Une première simulation était effectuée en imposant une température et une salinité de surface. Elle était conduite jusqu'à l'obtention d'un équilibre, dont on diagnostiquait le flux de sel en surface. On imposait ensuite comme conditions de surface ce flux salin diagnostiqué et la température initiale. L'équilibre était alors susceptible de se déstabiliser et on pouvait obtenir des équilibres multiples en le perturbant légèrement. Le travail de Thual & McWilliams (1992) a permis de montrer que l'existence d'équilibres multiples ne dépend pas de la transition entre *double condition de surface de Dirichlet* et *conditions de surface mixtes*. Elle n'est pas non plus tributaire du type d'équilibre obtenu

en imposant température et salinité de surface.

En maintenant l'amplitude  $a$  du forçage thermique constant et en augmentant l'intensité  $b$  du forçage salin, les auteurs observent des équilibres multiples. Pour les mêmes valeurs des paramètres  $k$ ,  $a$  et  $b$ , quatre équilibres peuvent être simulés :

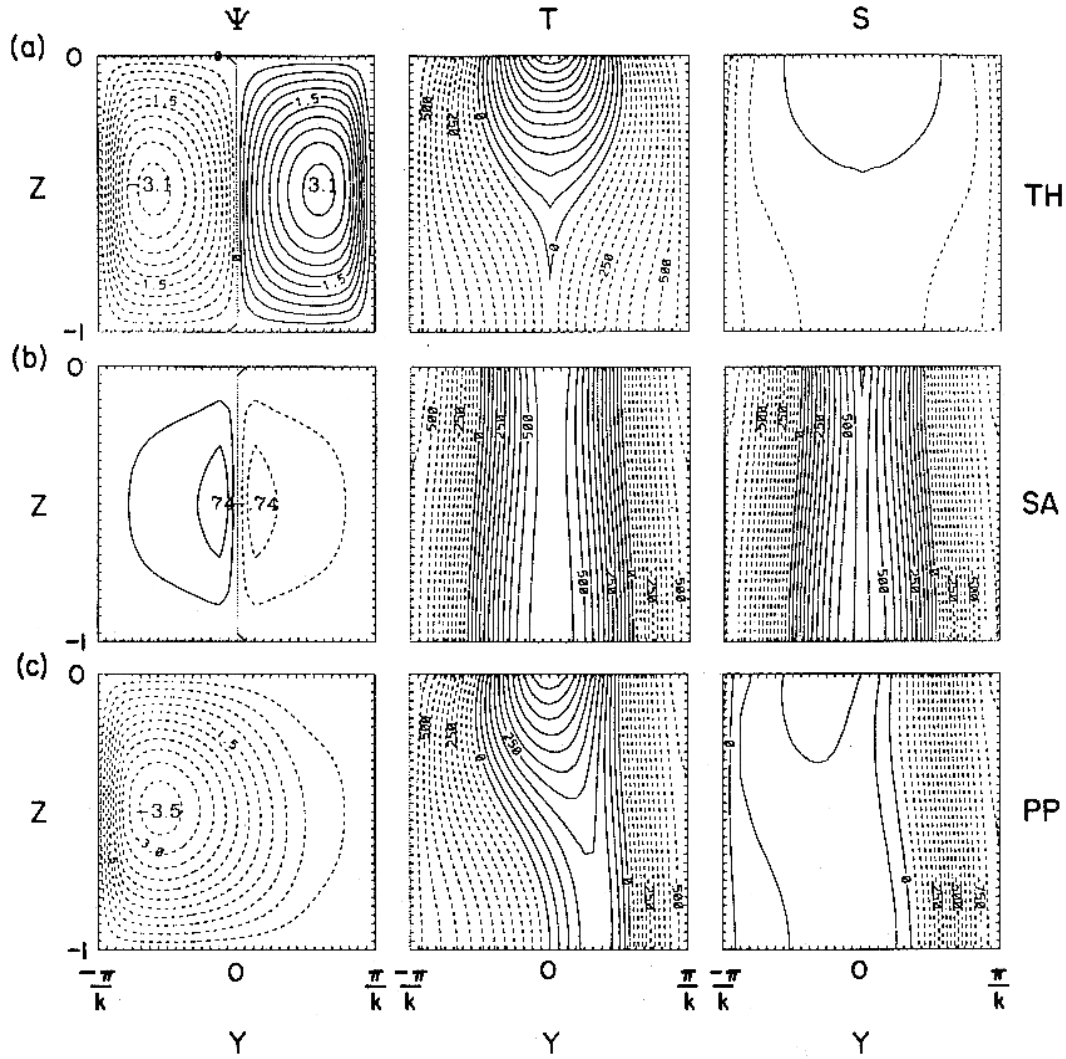
- **TH** : Un équilibre symétrique par rapport à l'équateur et dominé par le forçage thermique. La circulation présente une plongée d'eau aux deux pôles et une remontée d'eau à l'équateur (voir figure III.2.a).
- **SA** : Un équilibre symétrique par rapport à l'équateur et dominé par la salinité. La circulation présente une plongée d'eau équatoriale et une remontée d'eau aux pôles (voir figure III.2.b).
- **PP** : Deux équilibres asymétriques à une seule cellule, où la circulation est descendante à un pôle et ascendante à l'autre. Les deux équilibres sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'équateur. Ils sont la juxtaposition d'un hémisphère de circulation **TH** et d'un hémisphère de circulation **SA** (voir figure III.2.c).

Les auteurs ont proposé un diagramme de bifurcation pour expliquer l'apparition des équilibres multiples quand le paramètre  $b$  augmente. Il est reproduit en figure III.3. Notons qu'un code numérique d'intégration temporelle des équations a été utilisé. Les états instables du système n'ont donc pu être déterminés expérimentalement. Ils ont été suggérés par les auteurs comme susceptibles de connecter les différentes branches stables et vraisemblables au vu des systèmes dynamiques classiques de mécanique des fluides.

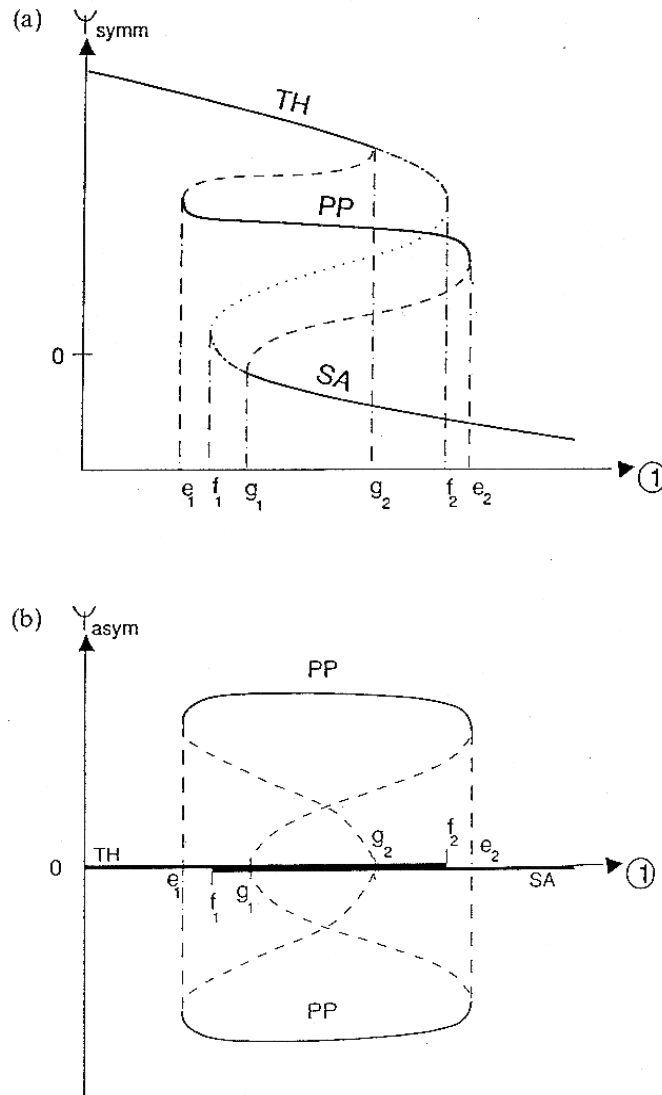
Si la symétrie équatoriale est imposée, les deux branches de solutions symétriques **SA** et **TH** disparaissent aux *points limites*  $f1$  et  $f2$  respectivement et sont reliées par une solution instable symétrique tracée en pointillés sur la figure III.3.a. Quand aucune symétrie n'est imposée chacune des solutions symétriques est déstabilisée par franchissement d'un point de *bifurcation fourche* ( $g1$  pour **SA** et  $g2$  pour **TH**). La situation est sous-critique et deux branches de solutions asymétriques instables apparaissent (tracées en tirets sur la figure III.3, elles sont confondues en III.3.a, mais distinctes en III.3.b). Ces solutions asymétriques se stabilisent par franchissement des *points limites*  $e1$  et  $e2$  au profit des solutions **PP**.

Grâce à une exploration intensive de l'espace des amplitudes des forçages à  $k$  fixé, les auteurs ont représenté la structure catastrophique du modèle dans le plan  $(a, b)$  (voir figure III.4). Les *points limites*  $e1$ ,  $e2$ ,  $f1$  et  $f2$  décrivent des courbes correspondant à des catastrophes de type pli. Les courbes de points  $f1$  et  $f2$  délimitent le domaine où plusieurs équilibres symétriques stables existent. L'intersection  $p = f1 \cap f2$  forme une *fronce*, c'est-à-dire une catastrophe de codimension 2 dans le plan  $(a, b)$ .  $p$  sera dite *fronce symétrique*. Le domaine d'existence des équilibres asymétriques stables est situé entre les courbes  $e1$  et  $e2$ . L'intersection  $q = e1 \cap e2$  sera dite *fronce asymétrique*. La courbe représentative des points de *bifurcation fourche*  $g1$  et  $g2$  (en tirets sur la figure



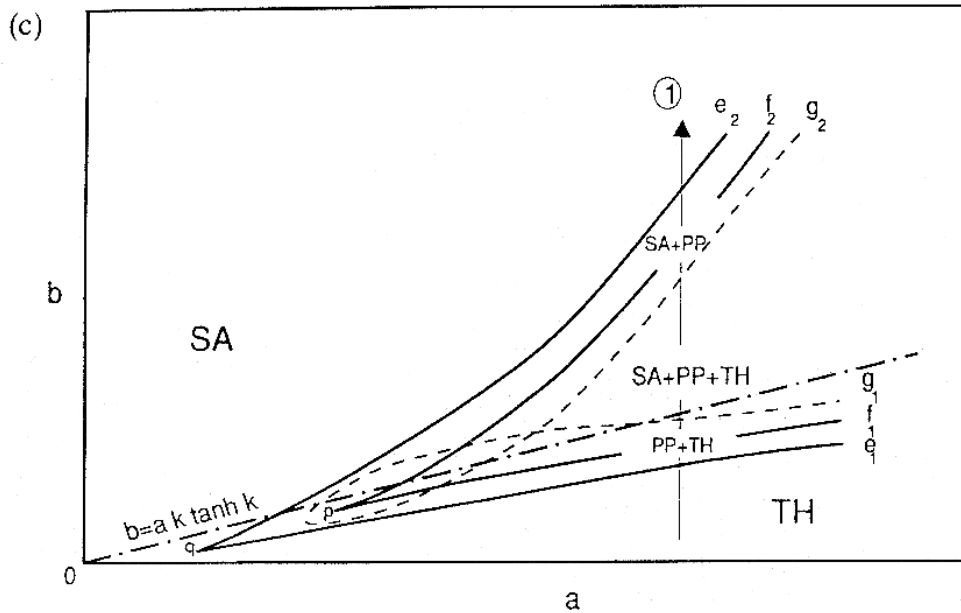


**Figure III.2 :** Trois équilibres numériques stables obtenus pour les mêmes valeurs des paramètres  $a = 600$ ,  $b = 160$  et  $k = 0.4$ . L'intervalle entre deux isocontours est 0.3 pour la fonction de courant méridienne  $\Psi$  et 50 pour les champs de température  $T$  et de salinité  $S$ . Le sens de circulation est indiqué par les flèches. En **a** : Circulation de type thermique notée **TH**. En **b** : Circulation de type salin notée **SA**. En **c** : Circulation pôle-à-pôle notée **PP**. Un second équilibre pôle-à-pôle symétrique de celui-ci par rapport à l'équateur est également obtenu. (d'après Thual & McWilliams (1992)).



**Figure III.3** : Diagramme de bifurcation des solutions du modèle bidimensionnel de Boussinesq pour un chemin de l'espace des paramètres porté en figure III.4 (d'après Thual & McWilliams (1992)). — : états stables. — — — : états instables. - · - : états instables aux perturbations asymétriques. · · · · : états instables aux perturbations asymétriques et symétriques. En **a** :  $\Psi_{\text{symm}}$  : composante symétrique de la fonction de courant. En **b** :  $\Psi_{\text{asym}}$  : composante asymétrique de la fonction de courant.

III.4) a été approximativement positionnée, ces points étant plus coûteux à déterminer numériquement. Elle se trouve à l'intérieur des domaines  $(e1, e2)$  et  $(f1, f2)$  quand le forçage thermique est grand, entre ces deux domaines à proximité de  $p$  et  $q$ . Une autre courbe importante dans ce plan est la ligne de circulation nulle (en trait mixte sur la figure III.4). Elle correspond à la relation  $b = ak \tanh k$  entre les paramètres de forçage, telle que effets thermiques et salins se compensent exactement et que la circulation soit uniformément nulle dans le domaine.



**Figure III.4** : Positions des plis symétriques  $(f1, f2)$  et asymétriques  $(e1, e2)$  et des fronces  $p$  et  $q$  dans le plan  $(a, b)$ . La courbe  $g1 \cup g2$  situe le lieu des bifurcations fourche. (d'après Thual & McWilliams (1992)).

Les auteurs ont positionné les *fronces* *symétrique* et *asymétrique* pour deux valeurs du rapport d'aspect  $k = 1.0$  et  $k = 0.4$ . Quand  $k$  décroît, les deux branches basses des *fronces*  $e1$  et  $f1$  convergent vers la ligne de circulation nulle, qui elle-même tend vers l'axe horizontal  $b = 0$ . Les deux autres plis  $e2$  et  $f2$  convergent l'un vers l'autre. Les deux points  $p$  et  $q$  se rapprochent et tendent tous deux vers le point  $(0, 0)$ . On peut extrapoler qu'à la limite  $k \rightarrow 0$ , les deux *fronces* sont confondues et le *principe de juxtaposition* est exactement vérifié (voir paragraphe II.2.3.a). Si deux circulations symétriques stables **SA** et **TH** existent pour des paramètres de contrôle de même valeur, deux circulations asymétriques **PP** formées par juxtaposition d'une demi-**SA** et d'une demi-**TH** sont aussi des solutions stables.

Dans une seconde partie, cet article établit une connexion entre les comportements de divers modèles de boîtes et celui du modèle bidimensionnel. Le modèle à 2 boîtes de Stommel (1961) reproduit remarquablement bien la *fronce*  $p$  relative aux équilibres multiples symétriques du modèle fluide. Le modèle à trois boîtes de Welander fournit une justification analytique de l'existence d'un équilibre asymétrique par juxtaposition de deux moitiés d'équilibres symétriques, mais ne permet pas de reproduire la *fronce asymétrique*  $q$  du modèle fluide. Le modèle de boîtes le plus simple reproduisant le comportement bifurcatoire relatif aux états asymétriques est déterminé. Il s'agit d'un modèle à quatre boîtes : trois selon la "latitude" et une boîte profonde.

### III.3.2 Quon & Ghil (1992 et 1995)

Le modèle utilisé par Quon & Ghil est proche de celui décrit en III.1. Les notations utilisées dans ces articles sont détaillées en Annexe B - tableau 2. En particulier,  $Ra$  symbolise le nombre de Rayleigh thermique et correspond à l'intensité du forçage thermique.

Les auteurs souhaitent appliquer la méthode de diagnostic du flux salin à partir d'un état d'équilibre obtenu sous *double condition de Dirichlet* (salinité et température imposées). Mais leur façon de procéder ne correspond pas tout à fait à ce but. En effet, ils diagnostiquent le flux salin  $F_S$  pour une valeur particulière des forçages thermique et salin puis effectuent une série de simulations avec ce flux diagnostiqué multiplié par un coefficient  $\gamma$ , qualifié d'intensité du flux salin. Si pour  $\gamma = 1$ , nous avons bien affaire à une transition entre *double condition de Dirichlet* et conditions diagnostiquées mixtes, ce n'est plus du tout le cas quand  $\gamma \neq 1$ . En raison de la non-linéarité du système, un changement d'intensité de la condition initiale de Dirichlet sur la salinité implique un changement de forme du flux salin à l'équilibre. Rien ne permet donc de relier le flux  $\gamma F_S$  à une condition de Dirichlet pour la salinité. En revanche, considérer le flux  $F_S$  comme un profil a priori du flux de sel en surface, dont on peut faire varier l'intensité, s'inscrit bien dans le cadre des études théoriques que nous présentons ici.

Dans ces études, l'indépendance des paramètres n'est pas assurée avec les facteurs d'adimensionnement choisis (voir Annexe B - tableau 1). Un paramètre supplémentaire  $\lambda = \gamma_S \Delta S / \gamma_T \Delta T$  est introduit, tel que le produit  $\gamma \lambda$  soit indépendant. Ce paramètre  $\lambda$  étant choisi constant, cette formulation reste recevable. De plus, le terme de flottabilité de l'équation de mouvement s'écrit ici  $Ra (T - \lambda S)$  de telle sorte que l'intensité effective du forçage salin sur la circulation est donnée par le produit  $\gamma \lambda Ra$ . Tracer des courbes de stabilité dans le plan  $(Ra, \gamma)$  n'est donc que peu représentatif des intensités respectives des deux forçages. Et il est impossible de ne faire varier que l'intensité du forçage thermique avec cette formulation du modèle.

Dans l'article **Quon & Ghil (1992)**, les auteurs décrivent les solutions obtenues sous *double condition de Dirichlet* et les solutions asymétriques observées sous *conditions de surface mixtes* pour différentes valeurs des paramètres. Le domaine des paramètres considéré est le suivant :  $d = 0.2$ ,  $10^3 \leq Ra \leq 2.10^8$ ,  $\sigma_P = 2.25$ ,  $Le = 1$  et  $\lambda = 0.32$ .

Quand le modèle est forcé par une *double condition de Dirichlet* symétrique par rapport à l'équateur, l'unique solution se compose de deux cellules miroirs l'une de l'autre par rapport à l'équateur. Selon les valeurs des paramètres, la solution est de type circulation thermique (**TH**) ou de type circulation saline (**SA**). A faible nombre de Rayleigh, le transport est essentiellement conductif. Les isolignes de température et de salinité sont essentiellement verticales et les maxima d'intensité des cellules de circulation se situent au milieu de chaque hémisphère. A fort nombre de Rayleigh, les gradients verticaux de température et de salinité sont très forts à proximité de la limite où le forçage est appliqué, et quasi nuls à l'intérieur de la boîte. En revanche, la circulation se fait dans la totalité du domaine.

Avec des *conditions de surface mixtes*, on peut obtenir deux équilibres asymétriques reflétés l'un de l'autre par rapport à l'équateur. Cette caractéristique indique que la transition entre circulation symétrique et circulation asymétrique s'effectue par franchissement d'une *bifurcation fourche*. Les auteurs pensent que cette transition est sur-critique : les branches de solutions asymétriques issues de la bifurcation sont stables. Le degré d'asymétrie des solutions par rapport à l'équateur varie continûment avec les paramètres de forçage, de la solution stationnaire composée de deux cellules de tailles légèrement différentes à la solution unicellulaire de type pôle-à-pôle (**PP**). A proximité du point de bifurcation l'asymétrie est faible, elle s'amplifie si on augmente l'intensité de l'un des paramètres de forçage  $Ra$  ou  $\gamma$ .

Quand l'équilibre symétrique à partir duquel on applique les *conditions mixtes* est de type **SA**, la circulation peut devenir faiblement asymétrique, mais aucun réel équilibre n'est observé. La solution oscille lentement entre des circulations à deux, quatre et six cellules. Si l'équilibre initial est de type **TH**, il peut persister un temps sous les *conditions mixtes*, puis l'asymétrie éventuelle se développe exponentiellement, avec un taux de croissance d'autant plus fort que  $Ra$  est grand.

Déduite des simulations effectuées, une courbe de stabilité neutre séparant le domaine des équilibres symétriques de celui des équilibres asymétriques est tracée dans la plan  $(\gamma, Ra)$ . De même, un diagramme présentant une *bifurcation fourche* a été extrait des simulations réalisées par régression non-linéaire. Il est à noter que les auteurs n'ont pas observé la coexistence d'équilibres symétriques et asymétriques pour les mêmes valeurs des paramètres.

Les effets des variations des autres paramètres du système sont étudiés. Varier le nombre de Prandtl (de 2.24 à 7.1) a peu d'influence sur les résultats. L'influence du nombre de Lewis (augmenté ici d'un facteur 10) peut être importante quantitativement, mais n'affecte pas qualitativement les résultats obtenus. Augmenter le rapport d'aspect (de 0.2 à 1) correspond à un déplacement de la courbe de stabilité neutre dans la plan  $(\gamma, Ra)$  et n'implique pas de changements qualitatifs quant à l'existence des équilibres asymétriques.

Dans un second article (**Quon & Ghil (1995)**), les auteurs se sont intéressés à l'occurrence d'oscillations de la circulation thermohaline quand le rapport d'aspect  $\delta$  – hauteur sur largeur – du domaine considéré est faible. Ils étudient également l'influence

d'une non-monotonie des profils de forçage entre le pôle et l'équateur sur le comportement du modèle.

Le système d'équations étudié est analogue au précédent si ce n'est qu'un nouvel adimensionnement permet de faire apparaître  $\delta$  explicitement dans les équations. La viscosité et la diffusivité considérées dans cet article sont anisotropes, le rapport de la composante verticale à la composante horizontale étant petit. Rappelons les notations introduites en III.1 pour ces rapports :  $\delta_\nu = \nu^{(V)}/\nu^{(H)}$  et  $\delta_\kappa = \kappa_T^{(V)}/\kappa_T^{(H)} = \kappa_S^{(V)}/\kappa_S^{(H)}$ . Quand le rapport d'aspect est petit et que  $\delta_\nu$  et  $\delta_\kappa$  sont de l'ordre de l'unité, le transport est dominé par la diffusion verticale et les courbes isothermes et isohalines des équilibres obtenus sont quasi verticales. Dans les fluides géophysiques au contraire, l'advection domine la diffusion. Les rapports  $\delta_\nu$  et  $\delta_\kappa$  sont donc choisis inférieurs à l'unité afin d'observer un transport dominé par la convection.

Des simulations effectuées sous *double condition de Dirichlet* confirment que l'influence de l'advection est d'autant plus importante que  $\delta_\nu$  et  $\delta_\kappa$  diminuent. Et les effets non linéaires s'amplifient quand le nombre de Rayleigh augmente. Les investigations numériques conduites ici concernent le domaine de paramètres suivant :  $\delta = 0.01$ ,  $10^{10} \leq Ra \leq 10^{12}$ ,  $\delta_\nu = \delta_\kappa = 0.01$  et, comme dans l'étude précédente,  $\sigma_P = 2.25$ ,  $Le = 1$  et  $\lambda = 0.32$ .

Les forçages considérés sont symétriques par rapport au milieu du bassin ("l'équateur"). Un profil de forçage est dit monotone, s'il évolue de façon monotone avec la distance à l'équateur. En utilisant des conditions de surface de Dirichlet monotones et identiques à celles employées dans leur article précédent, les auteurs obtiennent un équilibre dont le flux salin diagnostiqué est également monotone, alors qu'à plus fort rapport d'aspect le flux diagnostiqué était non-monotone. Quand une condition de Dirichlet au moins est non-monotone, le flux diagnostiqué l'est également. Les auteurs présentent trois types de *conditions mixtes* : température et flux salin monotones, température et flux salin non-monotones (Type A) et température monotone et flux salin non-monotone (Type B).

Dans les trois cas, les auteurs augmentent l'intensité du forçage salin et observent une déstabilisation de l'équilibre symétrique par franchissement d'un point de *bifurcation fourche*. L'équilibre asymétrique résultant se compose essentiellement d'une cellule pôle-à-pôle. Contrairement à ceux obtenus à plus fort rapport d'aspect, cet équilibre présente une oscillation de petite échelle spatiale près du maximum d'intensité de la fonction de courant. Une contre-cellule intense et fine se développe contre l'une des parois verticales. Quand les profils de forçage sont monotones, cette cellule est incluse dans la couche limite verticale et, à l'intérieur du bassin, le flot est laminaire. Quand les profils appliqués sont tous deux non-monotones (Type A), une couche limite interne, ou plume, se détache et la contre-cellule se développe entre celle-ci et la paroi. De plus les oscillations internes sont nettement plus importantes. Les conditions de type B produisent une circulation proche de celle obtenue avec des conditions monotones, mais plus intense.

Avec les trois types de conditions aux limites, l'apparition d'oscillations par fran-

chissement d'une *bifurcation de Hopf* est observée. Le mécanisme de ces oscillations est détaillé dans l'article. Il fait intervenir la propagation d'un front à partir du paquet d'ondes internes présent dans l'équilibre asymétrique et la formation de plusieurs cellules. Dans les cas où une plume existe dans l'équilibre asymétrique, sa position par rapport à la paroi fluctue pendant le cycle oscillatoire. La plus grande amplitude d'oscillation est observée quand les deux profils appliqués sont non-monotones. L'oscillation principale est alors modulée par une seconde oscillation de faible amplitude et de période sept à huit fois plus longue. Cette seconde oscillation est susceptible de devenir plus importante si l'on continue à augmenter l'intensité du flux salin.

Le diagramme de bifurcation reste donc qualitativement le même pour les différents types de forçage appliqués : déstabilisation de l'équilibre symétrique au profit d'un équilibre asymétrique via une *bifurcation fourche*, puis comportement oscillatoire après franchissement d'une *bifurcation de Hopf*. La non-monotonie du flux salin n'est donc ni nécessaire, ni suffisante quant à l'occurrence d'oscillations. Le paramètre déterminant est l'intensité du forçage salin. Dans tous les cas, une augmentation du nombre de Rayleigh thermique permet d'obtenir ces bifurcations à plus faible amplitude du flux salin.

### III.3.3 Dijkstra & Molemaker (1997)

Dans cette étude les auteurs utilisent une méthode de suivi des paramètres afin de déterminer les branches de solutions stationnaires stables et instables du système. Les points de bifurcation peuvent être calculés précisément et, contrairement aux études précédentes où seules les branches de solutions stables pouvaient être simulées, des diagrammes de bifurcation complets sont présentés. Les auteurs s'intéressent à l'apparition de solutions asymétriques, à l'occurrence d'oscillations et à la sensibilité des bifurcations correspondantes à un changement de forçage de surface.

Un exemple de diagramme de bifurcation obtenu est présenté en figure III.5. Les solutions sont caractérisées par  $\Psi_{RM}$ , valeur de la fonction de courant en un point particulier de la boîte. Le paramètre de bifurcation est  $\sigma = \gamma\lambda$ , l'intensité relative du flux salin par rapport au forçage thermique. Les autres paramètres sont fixés :  $A = 10$ ,  $Ra_T = 4.10^4$ ,  $Le = 1$  et  $\sigma_P = 2.25$  (voir Annexe B - tableau 2). Le forçage de surface se compose d'une température imposée ayant pour profil un cosinus de la latitude et le flux salin imposé est soit non-monotone entre l'équateur et chacun des pôles avec un minimum dans la région subpolaire, soit monotone hémisphère par hémisphère de même profil que le forçage thermique. La solution initiale (à  $\gamma\lambda = 0$ ) est de type **TH**. Les points de *bifurcation fourche* (P1 et P2) sont indiqués par des rectangles, les points de *bifurcation de Hopf* (H1 et H2) par des triangles et les *points limites* (L1, L2 et L3) sont visibles comme points de terminaison des différentes branches de solutions. Les caractéristiques de ce diagramme sont qualitativement robustes à des changements de forçage.

La solution **TH** initiale est déstabilisée par franchissement de la *bifurcation fourche sur-critique* P1. Les deux branches asymétriques apparaissant au point de bifurcation sont stables. Le degré d'asymétrie est faible à proximité du point de bifurcation et s'amplifie quand l'intensité du flux salin augmente. Chacune des deux solutions asymétriques **PP** est à son tour déstabilisée au profit d'une solution oscillante par franchissement de la *bifurcation de Hopf* H1 et restabilisée par franchissement de la *bifurcation de Hopf inverse* H2. Elle est à nouveau déstabilisée au *point limite* L3. Le long de la branche instable partant de L3, la solution passe continûment d'une solution unicellulaire à une solution de type **SA**, laquelle se stabilise au point de *bifurcation fourche sous-critique* P2. Une autre branche de solutions symétriques instables relie directement P1 à P2. Des équilibres multiples peuvent être observés. Dans le cas particulier représenté en figure III.5, il n'existe pas d'équilibre multiples symétriques.

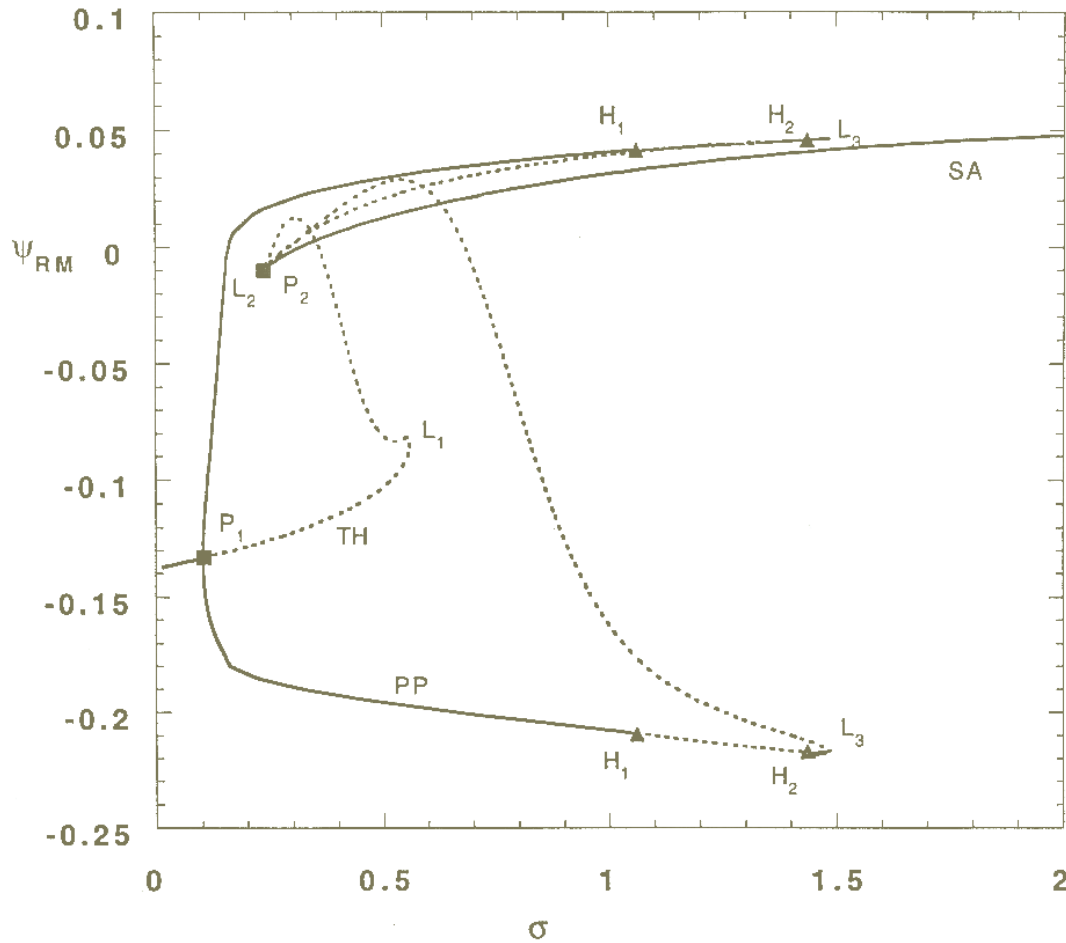
En effectuant l'étude de la stabilité linéaire en un point de bifurcation, il est possible de déterminer le mode perturbateur le plus déstabilisant. Il s'agit du vecteur propre associé à la valeur propre qui franchit l'axe réel au point de bifurcation. On peut alors déduire le mécanisme physique associé à l'instabilité. En P1, comme en P2, la perturbation dominante est d'origine saline. La perturbation de circulation résultante est transéquatoriale et contribue à renforcer l'une des deux cellules de l'état symétrique au détriment de l'autre, de telle sorte que la perturbation de salinité soit amplifiée. La perturbation de température s'oppose à la déstabilisation de l'équilibre symétrique, qu'il soit de type **TH** ou **SA**.

La solution oscillante qui se développe entre H1 et H2 présente un temps caractéristique comparable au temps de retournement de la circulation. Le mécanisme physique à l'origine des oscillations provient des effets combinés du transport advectif de sel et du transport diffusif de température. La perturbation de salinité domine le comportement oscillatoire, mais la perturbation de température induit un déphasage entre salinité et flottabilité qui le maintient.

Une modification du profil du flux de sel imposé en surface induit un simple déplacement des points de *bifurcation fourche*. Les points de *bifurcation de Hopf* sont plus sensibles à la forme du forçage salin. Quand on passe continûment d'un profil non-monotone à un profil monotone, ils peuvent disparaître, leur fusion ayant lieu pour un forçage salin encore non-monotone. Une augmentation du nombre de Rayleigh permet de retrouver les points de *bifurcation de Hopf*. Afin de mieux rendre compte des interactions océan-atmosphère à l'interface, la condition de Dirichlet de température est remplacée par une loi de relaxation newtonienne. Le seul changement observé est un déplacement des points de *bifurcation fourche* sur le diagramme de bifurcation. Modifier les conditions de surface n'induit donc pas de modification structurelle dans le comportement du modèle, mais provoque des changements quantitatifs.

Considérer le comportement bifurcatoire du modèle à faible rapport d'aspect (i.e. grand  $A$ ) permet de comprendre l'origine des équilibres multiples. Les conditions de surface sont toutes deux monotones et analogues à celles considérées par Thual & McWilliams (1992). A faible nombre de Rayleigh, une seule branche de solutions existe. La transi-





**Figure III.5** : Diagramme de bifurcation dans le plan  $(\sigma = \gamma\lambda, \Psi_{RM})$  pour les paramètres  $A = 10$ ,  $Ra_T = 4.10^4$ ,  $Le = 1$  et  $\sigma_P = 2.25$ . (d'après Dijkstra & Molemaker (1997)). — : branches de solutions stables. . . . : branches de solutions instables. Les points de *bifurcation fourche* sont signalés par des carrés noirs, les points de *bifurcation de Hopf* par des triangles noirs.

tion entre les solutions **TH** et **SA** s'effectue de façon continue quand le forçage salin augmente, le point de transition étant de circulation nulle. Quand le nombre de Rayleigh augmente, deux points de *bifurcation fourche* P1 et P2 apparaissent sur cette courbe et permettent d'observer deux équilibres asymétriques pour les mêmes valeurs des paramètres. L'origine des équilibres multiples est donc liée à la fusion des deux points de *bifurcation fourche*. C'est une catastrophe de codimension 1. Quand on augmente encore le nombre de Rayleigh, les branches se déforment et on obtient une structure proche de celle présentée figure III.5. Selon les positions respectives de P1 et de P2 on peut, ou non, observer des équilibres multiples symétriques. La catastrophe à l'origine

des équilibres multiples symétriques est l'émergence des deux *points limites* L1 et L2, qui constitue une *fronce*, catastrophe de codimension 2.

Quand le rapport d'aspect devient très faible, les points P1 et L1 d'une part, et les points P2 et L2 d'autre part, tendent à fusionner. L'origine d'équilibres multiples symétriques et asymétriques est alors une même catastrophe de codimension 2.

### III.3.4 Synthèse

Selon les quatre études résumées ci-dessus, l'apparition d'équilibres asymétriques de la circulation sous un forçage symétrique a lieu par franchissement d'une *bifurcation de type fourche*.

L'utilisation d'une méthode de calcul des branches de solutions stationnaires stables et instables a permis à Dijkstra & Molemaker (1997) de calculer la position exacte des points de *bifurcation fourche*, que Thual et McWilliams (1992) avaient approximativement déterminée. L'émergence des points de *bifurcation fourche* a lieu à plus faible forçage thermique que la *fronce* associée à l'émergence des *points limites* des branches symétriques. Donc dans le plan des intensités de forçage (figure III.4) l'intersection des points  $e1$  et  $e2$  devrait se trouver à l'intérieur du domaine défini par  $g1$  et  $g2$  et non l'inverse. Comme prévu par Thual & McWilliams (1992), les catastrophes à l'origine des équilibres multiples symétriques et des équilibres multiples asymétriques fusionnent à très faible rapport d'aspect et la singularité associée est de codimension 2.

D'autre part, Dijkstra & Molemaker (1997) ont exhibé un comportement oscillatoire de la circulation thermohaline dans un tout autre régime de paramètres que Quon & Ghil (1995), montrant ainsi que l'anisotropie des paramètres de dissipation n'est nullement nécessaire à l'obtention de solutions oscillantes.

## CHAPITRE IV

# Modèle asymptotique

### IV.1 Théorie asymptotique

Un développement asymptotique du modèle bidimensionnel de Boussinesq (rappelé en IV.1.1) a été écrit par **Cessi & Young (1992)**. Il est repris en IV.1.2 avec des notations différentes. En IV.1.5, nous proposons une variante de ce développement asymptotique.

#### IV.1.1 Modèle 2D

Le modèle bidimensionnel considéré a été présenté au sous-chapitre III.1, ainsi que les facteurs d'échelle présidant à son adimensionnement.

Les facteurs d'anisotropie des paramètres de dissipation étant choisis égaux à 1, les équations adimensionnées s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k\sigma_P} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + J(\Psi, \nabla^2 \Psi) \right] &= \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial y} (T - S) + \nabla^4 \Psi \\ \frac{1}{k} \left[ \frac{\partial}{\partial t} T + J(\Psi, T) \right] &= \nabla^2 T \\ \frac{1}{k} \left[ \frac{\partial}{\partial t} S + J(\Psi, S) \right] &= Le \nabla^2 S, \end{aligned}$$

où  $\Psi(y, z)$  désigne la fonction méridienne de courant,  $T(y, z)$  le champ de température et  $S(y, z)$  celui de salinité.  $J(., .)$  et  $\nabla^2$  sont les opérateurs Jacobien et Laplacien. Les trois nombres adimensionnels  $k$ ,  $\sigma_P$  et  $Le$  explicités en III.1.3 sont, respectivement, le rapport d'aspect du domaine considéré, le nombre de Prandtl et le nombre de Lewis.

Les domaines de variation des deux variables d'espace sont :

$$-\pi/k \leq y \leq \pi/k \quad \text{et} \quad -1 \leq z \leq 0.$$

Les *conditions mixtes* imposées à la surface s'expriment par :

$$T = a F_T(ky) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} S = b F_S(ky) \quad \text{en} \quad z = 0,$$

où  $a$  et  $b$  sont les amplitudes des forçages.  $F_T(ky)$  et  $F_S(ky)$  sont deux fonctions normées et symétriques par rapport à  $y = 0$ .

Les autres conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Psi = \partial^2 \Psi / \partial z^2 &= 0 & \text{en } z &= 0 \\ \partial T / \partial z = \partial S / \partial z &= 0 & \text{et } \Psi = \partial^2 \Psi / \partial z^2 &= 0 & \text{en } z &= -1 \\ \partial T / \partial y = \partial S / \partial y &= 0 & \text{et } \Psi = \partial^2 \Psi / \partial y^2 &= 0 & \text{en } y &= \pm \pi/k . \end{aligned}$$

## IV.1.2 Développement asymptotique

### (a) Chemin asymptotique

Soit  $\epsilon$  un infiniment petit, les paramètres  $(a, b, k)$  du modèle évoluent selon :

$$\begin{aligned} a &= \epsilon a_{(1)} \\ b &= \epsilon^3 b_{(3)} \\ k &= \epsilon k_{(1)} \end{aligned}$$

Le choix de ce chemin découle de l'étude conduite par **Thual & McWilliams (1992)**. Dans le cas d'un forçage de surface simple du type  $F_T(ky) = F_S(ky) = \cos(ky)$ , ces auteurs montrent que la droite  $b = ak \tanh k$  représente le lieu où les forçages salin et thermique se compensent l'un l'autre sur le champ de densité et donc sur la circulation résultante. Si le rapport d'aspect  $k$  est d'ordre  $\epsilon$ , la relation  $b \sim \epsilon^2 a$  permet donc de considérer des régimes de circulation où les contributions saline et thermique sont de même ordre.

Les solutions du modèle sont recherchées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Psi(y, z, t) &= \epsilon \Psi_{(1)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \epsilon^2 \Psi_{(2)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \dots \\ T(y, z, t) &= \epsilon T_{(1)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \epsilon^2 T_{(2)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \dots \\ S(y, z, t) &= \epsilon S_{(1)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \epsilon^2 S_{(2)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \dots \end{aligned}$$

Afin d'accroître la lisibilité du développement, on adopte les notations  $\mathcal{Y} = ky$  et  $\mathcal{T} = \epsilon^2 kt$ . Avec ce changement de variables, les opérateurs Jacobien et Laplacien s'expriment par :  $J(f, g) = k (\partial f / \partial \mathcal{Y} \partial g / \partial z - \partial f / \partial z \partial g / \partial \mathcal{Y}) = k J_{\mathcal{Y}}(f, g)$  et  $\nabla^2 f = (k^2 \partial^2 f / \partial \mathcal{Y}^2 + \partial^2 f / \partial z^2)$ .

Dans ces notations, les équations du modèle s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_P} \left[ \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} \nabla^2 \Psi + J_{\mathcal{Y}}(\Psi, \nabla^2 \Psi) \right] &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} (T - S) + \nabla^4 \Psi \\ \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} T + J_{\mathcal{Y}}(\Psi, T) &= \nabla^2 T \\ \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} S + J_{\mathcal{Y}}(\Psi, S) &= Le \nabla^2 S , \end{aligned}$$

### (b) Résolution au premier ordre

Le modèle 2D restreint aux termes d'ordre  $\epsilon$  s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} (T_{(1)} - S_{(1)}) + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \Psi_{(1)} \\ 0 &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} T_{(1)} \\ 0 &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} S_{(1)} , \end{aligned}$$

avec pour conditions aux limites

$$\begin{aligned} T_{(1)} &= a_{(1)} F_T(\mathcal{Y}), & \partial S_{(1)}/\partial z &= 0 & \text{et} & \Psi_{(1)} = \partial^2 \Psi_{(1)}/\partial z^2 = 0 & \text{en} & z = 0 \\ \partial T_{(1)}/\partial z &= 0, & \partial S_{(1)}/\partial z &= 0 & \text{et} & \Psi_{(1)} = \partial^2 \Psi_{(1)}/\partial z^2 = 0 & \text{en} & z = -1 . \end{aligned}$$

La condition de température imposée à la surface permet de résoudre l'équation de température :

$$T_{(1)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) = a_{(1)} F_T(\mathcal{Y}) .$$

La température au premier ordre est homogène verticalement et égale au forçage de surface.

La condition de flux salin imposé en surface ne suffit pas à résoudre explicitement la salinité au premier ordre. Mais elle permet d'affirmer son indépendance vis à vis de la profondeur. On notera :

$$S_{(1)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) = s_{(1)}(\mathcal{Y}, \mathcal{T}) .$$

La salinité est définie à une constante près à tous les ordres puisque les conditions aux limites imposées sont de type Neumann. A partir du second ordre, on pourra toujours choisir cette constante de telle sorte que l'intégrale de la salinité selon la profondeur soit nulle. Ainsi  $S_{(1)}$  correspond à la moyenne verticale du champ de salinité.

$T_{(1)}$  et  $S_{(1)}$  étant indépendantes de la profondeur, l'équation de mouvement est une équation à variables séparées, dont la solution est

$$\Psi_{(1)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) = - \left[ a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)}(\mathcal{Y}, \mathcal{T}) \right] P(z) ,$$

où  $P(z) = (z^4 + 2z^3 - z)/24$  est le polynôme satisfaisant  $d^4 P/dz^4 = 1$  et les conditions aux limites  $P = d^2 P/dz^2 = 0$  en  $z = 0$  et  $z = -1$ .

### (c) Résolution au second ordre

Les termes d'ordre  $\epsilon^2$  du modèle forment le système suivant :

$$\frac{1}{\sigma_P} J_{\mathcal{Y}}(\Psi_{(1)}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi_{(1)}) = \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} (T_{(2)} - S_{(2)}) + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \Psi_{(2)}$$

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{Y}}(\Psi_{(1)}, T_{(1)}) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} T_{(2)} \\ J_{\mathcal{Y}}(\Psi_{(1)}, S_{(1)}) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} S_{(2)} , \end{aligned}$$

avec pour conditions aux limites

$$\begin{aligned} T_{(2)} = 0, \quad \partial S_{(2)}/\partial z = 0 \quad \text{et} \quad \Psi_{(2)} = \partial^2 \Psi_{(2)}/\partial z^2 = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \\ \partial T_{(2)}/\partial z = 0, \quad \partial S_{(2)}/\partial z = 0 \quad \text{et} \quad \Psi_{(2)} = \partial^2 \Psi_{(2)}/\partial z^2 = 0 \quad \text{en} \quad z = -1 . \end{aligned}$$

$T_{(1)}$  ne dépendant pas de  $z$ , l'équation de température se réduit à

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} T_{(2)} = -\frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} T_{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \Psi_{(1)} = a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) \left[ a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)}(\mathcal{Y}, T) \right] \frac{\partial}{\partial z} P(z) .$$

Une simple intégration du polynôme  $P(z)$  suffit à déterminer  $T_{(2)}$ . On obtient :

$$T_{(2)}(\mathcal{Y}, z, T) = a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) \left[ a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)}(\mathcal{Y}, T) \right] Q(z) ,$$

où  $Q(z) = (2z^5 + 5z^4 - 5z^2)/240$  satisfait les conditions aux limites de température en surface et au fond.

L'équation de salinité est résolue de façon analogue :

$$S_{(2)}(\mathcal{Y}, z, T) = \frac{1}{Le} \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)}(\mathcal{Y}, T) \left[ a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)}(\mathcal{Y}, T) \right] [Q(z) + C_Q] .$$

La salinité est définie à une constante près, puisque les deux conditions aux limites sont de type flux imposés. On choisit la constante  $C_Q$  telle que la moyenne verticale de  $S_{(2)}$  soit nulle :  $C_Q = 1/240$  .

Notons que température et salinité ont la même structure verticale au second ordre.

La fonction de courant à l'ordre deux peut être calculée par quadruple intégration verticale de l'équation de mouvement. Son expression n'est pas utile à la suite des calculs.

#### (d) Equation de compatibilité au troisième ordre

Au troisième ordre en  $\epsilon$ , un flux salin non nul est imposé en surface et la salinité doit satisfaire une équation de compatibilité.

L'équation de salinité s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial T} S_{(1)} + J_{\mathcal{Y}}(\Psi_{(1)}, S_{(2)}) + J_{\mathcal{Y}}(\Psi_{(2)}, S_{(1)}) = Le \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} S_{(3)} + k_{(1)}^2 \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{Y}^2} S_{(1)} \right]$$

avec pour conditions aux limites

$$\frac{\partial}{\partial z} S_{(3)} = b_{(3)} F_S(\mathcal{Y}) \quad \text{en } z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} S_{(3)} = 0 \quad \text{en } z = -1 .$$

On obtient la condition de compatibilité en intégrant verticalement cette équation entre  $-1$  et  $0$ , sachant que  $S_{(1)}$  ne dépend que de  $\mathcal{Y}$ .

Le terme  $J_{\mathcal{Y}}(\Psi_{(1)}, S_{(2)})$  peut se simplifier. On a en effet

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \Psi_1 \frac{\partial}{\partial z} S_2 - \frac{\partial}{\partial z} \Psi_1 \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} S_2 = \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \left[ \Psi_1 \frac{\partial}{\partial z} S_2 \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \Psi_1 \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} S_2 \right] ,$$

le terme  $\frac{\partial}{\partial z} [\Psi_1 \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} S_2]$  s'annulant par intégration verticale puisque  $\Psi_1 = 0$  en  $z = 0$  et en  $z = -1$ .

Le terme  $J_{\mathcal{Y}}(\Psi_{(2)}, S_{(1)}) = -\frac{\partial}{\partial z} \Psi_2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} S_1$  disparaît par intégration verticale en raison de la nullité de  $\Psi_2$  en  $z = 0$  et en  $z = -1$ .

La condition de compatibilité s'écrit donc simplement :

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} S_{(1)} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \int_{-1}^0 \Psi_1 \frac{\partial}{\partial z} S_2 dz = Le \left[ b_{(3)} F_S + k_{(1)}^2 \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{Y}^2} S_{(1)} \right] .$$

En substituant les expressions de  $\Psi_1$  et  $S_2$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} s_{(1)} &= Le \left[ b_{(3)} F_S + k_{(1)}^2 \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{Y}^2} s_{(1)} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \left[ \left( a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right] \frac{1}{Le} \int_{-1}^0 P^2(z) dz , \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{Le} \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} s_{(1)} &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \left[ b_{(3)} \int F_S d\mathcal{Y} \right] + \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \left[ k_{(1)}^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \left[ C^2 \left( a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right] , \end{aligned}$$

où  $C^2$  est définie par :  $C^2 = \frac{1}{Le^2} \int_{-1}^0 P^2(z) dz = \frac{1}{Le^2} \frac{31}{24^2 \times 630} \sim \frac{1}{Le^2} 8.5 \cdot 10^{-5}$ .

Cette dernière formulation traduit que l'évolution de la salinité moyennée verticalement dépend de trois flux horizontaux de sel :

- un flux induit par le forçage :  $b_{(3)} \int F_S d\mathcal{Y}$ .
- un flux diffusif :  $k_{(1)}^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)}$ .
- un flux advectif :  $C^2 \left[ \left( a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right]$ .

Le flux de forçage, calculé par intégrale de  $F_S$ , ne peut en aucun cas induire un transport de sel à travers les limites du domaine. La constante d'intégration doit donc être choisie de façon à ce que ce flux s'annule en  $\mathcal{Y} = \pm\pi/k$ .

### IV.1.3 Equations asymptotiques

Les deux équations obtenues en dérivant par rapport à la latitude  $\mathcal{Y}$  l'équation de température au premier ordre et l'équation de compatibilité pour la salinité au troisième ordre constituent le modèle asymptotique étudié ici.

De nouvelles notations sont introduites pour les gradients de température et de salinité.

$$\begin{aligned}\Theta(y, t) &= \epsilon \Theta_{(1)}(ky, \epsilon^2 kt) = \epsilon \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} T_{(1)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) , \\ \Sigma(y, t) &= \epsilon \Sigma_{(1)}(ky, \epsilon^2 kt) = \epsilon \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} S_{(1)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) .\end{aligned}$$

Et de nouvelles grandeurs liées au forçage de surface sont définies :

$$\begin{aligned}B(y) \quad \text{tel que} \quad \frac{d}{dy} B(y) &= \epsilon^3 \frac{d}{d\mathcal{Y}} B_{(3)}(ky) = \epsilon^3 b_{(3)} F_S(\mathcal{Y}) \\ \text{et} \quad \alpha(y) &= \epsilon \alpha_{(1)}(ky) = \epsilon a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) .\end{aligned}$$

Le calcul de  $B(y)$  à partir du forçage salin de surface fait apparaître une constante d'intégration. Elle est déterminée par la condition  $B = 0$  aux limites  $y = \pm\pi/k$ , comme justifié au paragraphe précédent.

Les notations introduites ci-dessus permettent d'écrire le système sous la forme :

$$\begin{aligned}\Theta_{(1)} &= \alpha_{(1)} \\ \frac{1}{Le} \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} \Sigma_{(1)} &= \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{Y}^2} \left\{ B_{(3)} + k_{(1)}^2 \Sigma_{(1)} + C^2 \left[ (\Theta_{(1)} - \Sigma_{(1)})^2 \Sigma_{(1)} \right] \right\} ,\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}\Theta(y) &= \alpha(y) \\ \frac{k}{Le} \frac{\partial}{\partial t} \Sigma(y, t) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ B(y) + k^2 \Sigma(y, t) + C^2 \left[ \Theta(y) - \Sigma(y, t) \right]^2 \Sigma(y, t) \right\}\end{aligned}$$

Ce système peut se réduire à la seule équation :

$$\frac{k}{Le} \frac{\partial}{\partial t} \Sigma(y, t) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ B(y) + G[\alpha(y), \Sigma(y, t)] \right\} ,$$

avec  $G(\alpha, \Sigma) = [k^2 \Sigma + C^2 (\alpha - \Sigma)^2 \Sigma]$ .

D'autre part, l'équation de fonction de courant obtenue au premier ordre s'exprime :

$$\Psi(y, z, t) = [\Sigma(y, t) - \Theta(y)] P(z) .$$



### IV.1.4 Solutions asymptotiques

Les solutions stationnaires de l'équation asymptotique vérifient :

$$B(y) + G[\alpha(y), \Sigma(y, t)] = 0 .$$

Cette équation du troisième degré en  $\Sigma$  a une ou trois solutions selon les valeurs de  $k$ ,  $\alpha$  et  $B$ . Ces deux dernières grandeurs dépendant de la latitude, il apparaît clairement que le nombre de solutions asymptotiques varie selon la latitude. Les solutions définies dans tout le domaine seront dites *globales* ou *globalement définies*. Les autres solutions, définies sur seulement certaines bandes de latitudes du domaine seront appelées *branches locales de solutions* ou *solutions localement définies*.

En particulier, dans un voisinage de  $y = 0$  (équateur), une seule solution asymptotique est définie quels que soient les profils  $F_T$  et  $F_S$  de forçage choisis. En effet,  $B$  et  $\alpha$  s'annulent en  $y = 0$  puisqu'elles sont antisymétriques en tant que, respectivement, intégrale et dérivée d'une fonction de forçage symétrique. L'équation asymptotique s'écrit alors  $(k^2 + C^2\Sigma^2)\Sigma = 0$  et admet pour seule solution réelle  $\Sigma = 0$ .

L'équation asymptotique ne permet donc pas de décrire des équilibres multiples *globalement définis* dans le domaine. Néanmoins étudier ses solutions permet de mieux comprendre la topologie des équilibres multiples obtenus avec le modèle 2D de Boussinesq. Cette étude fera l'objet du chapitre V de ce manuscrit.

Un autre traitement de l'équation asymptotique consiste à la modifier de façon à prolonger les *branches de solutions* et à observer des équilibres multiples *globalement définis*. On peut par exemple ajouter un terme régulateur d'hyperdiffusivité du type  $\gamma^2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} \Sigma$  au second membre de l'équation asymptotique. Des couches limites sont alors susceptibles de se développer pour prolonger les solutions *localement définies*. Le comportement dynamique de l'équation ainsi régularisée est présentée section IV.3.

### IV.1.5 Une variante du développement asymptotique

Le choix d'un autre chemin asymptotique permet d'obtenir une équation asymptotique susceptible de présenter plusieurs solutions définies sur l'ensemble du domaine.

Le chemin considéré ici représente la limite  $k \rightarrow 0$  du chemin précédent. Il s'écrit :

$$\begin{aligned} a &= \epsilon a_{(1)} \\ b &= \epsilon^3 b_{(3)} \\ k &= \epsilon^2 k_{(2)} \end{aligned}$$

La dérivation du développement asymptotique correspondant est analogue à celle qui vient d'être présentée.

L'équation asymptotique résultante s'écrit :

$$\frac{k}{Le} \frac{\partial}{\partial t} \Sigma(y, t) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ B(y) + H[\alpha(y), \Sigma(y, t)] \right\} ,$$

avec  $H(\alpha, \Sigma) = [C^2(\alpha - \Sigma)^2 \Sigma]$ .

Cette équation est identique à celle précédemment obtenue, si ce n'est qu'ici le terme diffusif n'apparaît plus. Seuls les effets advectifs et de forçage sont pris en compte. Cette simplification permet pour certains forçages d'obtenir des équilibres multiples *globalement définis* dans le domaine.

En effet, si on pose comme variable  $X = \Sigma/\alpha$ , les solutions de l'équation asymptotique ci-dessus vérifient :

$$-\frac{B(y)}{\alpha^3(y)} = C^2 (1 - X(y))^2 X(y) .$$

Le second membre de cette équation est un polynôme du troisième degré en  $X$ . L'équation a trois solutions si la quantité  $-B/\alpha^3$  est comprise entre les valeurs du minimum local et du maximum local de cette fonction, c'est-à-dire :

$$0 \leq -\frac{B(y)}{\alpha^3(y)} \leq \frac{4C^2}{27} .$$

Si on choisit des profils de forçages tels que  $-B/\alpha^3$  soit indépendant de  $y$  et des amplitudes ad hoc, cette double inégalité sera vérifiée dans tout le domaine.

Dans ce but, on considérera les profils de forçage suivants :

$$\begin{aligned} F_T(ky) &= -\frac{2 \int_{-\pi/k}^y k \sin^{1/3}(ks) ds}{\int_{-\pi/k}^0 k \sin^{1/3}(ks) ds} \\ F_S(ky) &= \cos ky \end{aligned}$$

La relation entre  $B$  et  $\alpha$  s'exprime alors par :

$$-\frac{B}{\alpha^3} = C_1 \frac{b}{a^3} \quad \text{avec} \quad C_1 = \frac{1}{8} \left( \int_{-\pi/k}^0 k \sin^{1/3}(ks) ds \right)^3 \sim 2.1180 .$$

En raison de cette relation de linéarité entre  $B$  et  $\alpha^3$ , ce forçage sera dénommé *forçage cubique*.

Avec ces profils, l'équation asymptotique admet trois solutions *globalement définies* si les amplitudes des forçages sont telles que :

$$0 \leq C_1 \frac{b}{a^3} \leq \frac{4C^2}{27} .$$

C'est dire que, dans le plan  $(a, b)$  des amplitudes de forçage, le domaine des équilibres multiples est délimité par les deux courbes  $b = 0$  et  $b = (4C^2/27C_1) a^3 \sim 5.95 \cdot 10^{-6} a^3$ . Ces deux courbes se coupent au point origine.

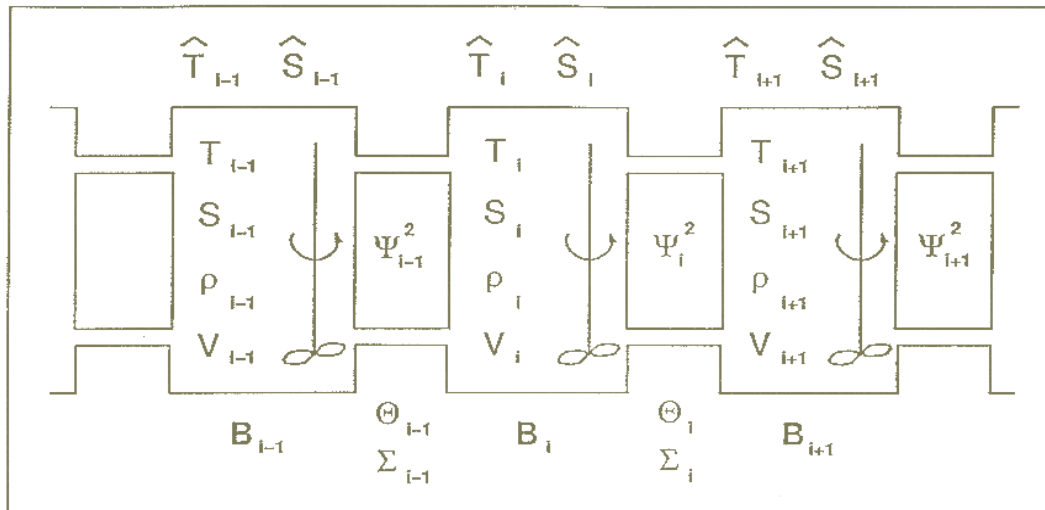
Notons que ce forçage est très proche du forçage dit *linéaire* utilisé dans les études précédentes de Thual & McWilliams (1992) et Cessi & Young (1992) :  $F_T(ky) = F_S(ky) = \cos ky$  (voir la figure 7.a de l'article présenté au chapitre V). Mais lors des simulations numériques on a constaté que les états obtenus sous un *forçage cubique* sont plus stables que ceux obtenus avec un *forçage linéaire*. Le *forçage cubique* a donc permis d'obtenir des résultats numériques à plus faible rapport d'aspect que le *forçage linéaire*.

## IV.2 Analogie avec les modèles de boîtes

Il est possible d'établir une connexion entre modèles de boîtes et modèles bidimensionnels. Nous présentons ici un modèle de boîtes dont la formulation, dans la limite d'un temps de rappel court pour la température, est la discrétisation des équations asymptotiques formulées ci-dessus. Ceci explique que les modèles de boîtes parviennent à reproduire le comportement de modèles plus complexes.

### IV.2.1 Formulation d'un modèle à $N$ boîtes

On considère un modèle composé de  $N$  boîtes homogènes alignées et connectées deux à deux par un tube capillaire de surface et un tube capillaire de fond (voir figure IV.1). Les  $N$  réservoirs constituent une discrétisation latitudinale grossière d'un bassin océanique. Chacune des boîtes  $B_i$  est caractérisée par sa température  $T_i$ , sa salinité  $S_i$ , sa densité  $\rho_i$  et son volume  $V_i$ . L'évolution de la température et de la salinité dans chacune des boîtes est contrôlée par un forçage imposé et par les transports entre boîtes.



**Figure IV.1** : Modèles à  $N$  boîtes. Notations précisées sur trois boîtes quelconques  $i - 1$ ,  $i$  et  $i + 1$ .

La température  $T_i$  et la salinité  $S_i$  sont rappelées vers des valeurs de référence constantes  $\hat{T}_i$  et  $\hat{S}_i$  selon une loi de relaxation newtonienne.

Le débit  $\Psi_i^2$  entre deux boîtes voisines  $B_i$  et  $B_{i+1}$  est proportionnel au carré de la

différence de densité entre ces deux boîtes, laquelle s'exprime par :

$$\Delta\rho_i = -\gamma_T (T_{i+1} - T_i) + \gamma_S (S_{i+1} - S_i)$$

où  $\gamma_T$  et  $\gamma_S$  sont, respectivement, les coefficients de dilatation thermique et de contraction saline.

Pendant un temps  $\delta t$ , le volume échangé par advection entre les boîtes  $B_i$  et  $B_{i+1}$  s'écrit :

$$\delta V_i = u_i A \delta t$$

où  $u_i$  désigne la vitesse du fluide dans les tubes et  $A$  leur section. On suppose que les tubes sont élastiques et que leur section varie linéairement avec la vitesse du fluide qui les parcourt. Si  $A_0$  est la section initiale des tubes, l'expression précédente s'écrit alors :

$$\delta V_i = u_i^2 \lambda A_0 \delta t = \Psi_i^2 \delta t .$$

L'advection entre les deux boîtes induit une différence de température pour la boîte  $B_i$  exprimée par :

$$V_i \frac{\delta T_i}{\delta t} = \frac{\delta V_i}{\delta t} T_{i+1} - \frac{\delta V_i}{\delta t} T_i .$$

Les équations d'évolution des température et salinité d'une boîte  $B_i$  du modèle s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T_i &= R_T (\hat{T}_i - T_i) + \frac{\Psi_i^2}{V_i} (T_{i+1} - T_i) + \frac{\Psi_{i-1}^2}{V_i} (T_{i-1} - T_i) \\ \frac{\partial}{\partial t} S_i &= R_S (\hat{S}_i - S_i) + \frac{\Psi_i^2}{V_i} (S_{i+1} - S_i) + \frac{\Psi_{i-1}^2}{V_i} (S_{i-1} - S_i) \\ \Psi_i &= C (-\gamma_T (T_{i+1} - T_i) + \gamma_S (S_{i+1} - S_i)) \end{aligned}$$

où les coefficients  $R_T$  et  $R_S$  de relaxation sont inversement proportionnels aux temps caractéristiques de rappel.

Le modèle ci-dessus a été écrit en tenant compte seulement des effets de forçage et d'advection. Il convient de noter qu'introduire un terme de diffusion en Laplacien revient simplement à remplacer  $\Psi_i^2$  par  $\Psi_i^2 + \kappa$  dans les équations ci-dessus, le coefficient  $\kappa$  étant le coefficient de diffusion horizontale pour la température et la salinité. La prise en compte des effets diffusifs ne modifie donc pas qualitativement la formulation du modèle de boîtes.

## IV.2.2 Modèle adimensionné

Le modèle ci-dessus est adimensionné en choisissant les unités suivantes :  $1/R_T$  pour le temps,  $\sum_{n=1}^N V_i/N$  pour le volume,  $(R_T \sum_{n=1}^N V_i/N)^{1/2}/C\gamma_T$  pour la température,  $(R_T \sum_{n=1}^N V_i/N)^{1/2}/C\gamma_S$  pour la salinité et  $R_T \sum_{n=1}^N V_i/N$  pour le débit.

Dans un but de simplification de l'écriture, on supposera que toutes les boîtes ont le même volume, égal à l'unité adimensionnelle de volume.

Le modèle adimensionné s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} T_i &= (\hat{T}_i - T_i) + \Psi_i^2 (T_{i+1} - T_i) + \Psi_{i-1}^2 (T_{i-1} - T_i) \\ \frac{\partial}{\partial t} S_i &= \xi (\hat{S}_i - S_i) + \Psi_i^2 (S_{i+1} - S_i) + \Psi_{i-1}^2 (S_{i-1} - S_i) \\ \Psi_i &= -(T_{i+1} - T_i) + (S_{i+1} - S_i)\end{aligned}$$

où  $\xi = R_S/R_T$  est un paramètre adimensionnel proportionnel au rapport des temps de relaxation thermique et salin.

Les grandeurs déterminantes des modèles de boîtes sont les différences de température et de salinité entre deux boîtes adjacentes. On introduit donc les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\Theta(i, t) &= (T_{i+1} - T_i) := \frac{\partial}{\partial i} T_i \\ \Sigma(i, t) &= (S_{i+1} - S_i) := \frac{\partial}{\partial i} S_i.\end{aligned}$$

L'indice  $i$  de la boîte considérée est assimilable à une latitude. Les grandeurs  $\Theta$  et  $\Sigma$  représentent donc les gradients méridiens thermique et salin.

Dans le même esprit, de nouvelles notations sont adoptées pour les forçages :

$$\begin{aligned}\alpha(i) &= (\hat{T}_{i+1} - \hat{T}_i) := \frac{\partial}{\partial i} \hat{T}_i \\ \beta(i) &= \xi (\hat{S}_{i+1} - \hat{S}_i) := \xi \frac{\partial}{\partial i} \hat{S}_i.\end{aligned}$$

Le débit sera noté :  $\Psi(i, t) = \Psi_i(t)$ .

Les équations du modèle de boîtes sont les équations d'évolution des différences de température et de salinité entre deux boîtes adjacentes. Par exemple, l'équation de température devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \Theta(i, t) &= \alpha(i) - \Theta(i, t) \\ &\quad + \left( \Psi(i+1, t)^2 \Theta(i+1, t) - 2\Psi(i, t)^2 \Theta(i, t) + \Psi(i-1, t)^2 \Theta(i-1, t) \right) \\ &= \alpha(i) - \Theta(i, t) + \frac{\partial^2}{\partial i^2} (\Psi(i, t)^2 \Theta(i, t))\end{aligned}$$

Le modèle de boîtes s'écrit donc enfin :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \Theta &= \alpha - \Theta + \frac{\partial^2}{\partial i^2} (\Psi^2 \Theta) \\ \frac{\partial}{\partial t} \Sigma &= \beta - \xi \Sigma + \frac{\partial^2}{\partial i^2} (\Psi^2 \Sigma) \\ \Psi &= -\Theta + \Sigma\end{aligned}$$

### IV.2.3 Equations asymptotiques du modèle

On considère un développement asymptotique du modèle à  $N$  boîtes. Le paramètre  $\xi$  est proportionnel au rapport du temps de relaxation pour le forçage thermique au temps de relaxation pour le forçage salin. La réponse océanique au forçage thermique est nettement plus rapide et le paramètre  $\xi$  est donc petit.

Par analogie avec la théorie asymptotique développée dans le cas du modèle 2D de Boussinesq, on considérera le chemin asymptotique  $\epsilon \rightarrow 0$  suivant :

$$\begin{aligned}\xi &= \epsilon^2 \xi_2 \\ \alpha(i) &= \epsilon \alpha_1(i) \\ \beta(i) &= \epsilon^3 \beta_3(i) .\end{aligned}$$

Les solutions sont recherchées sous la forme :

$$\begin{aligned}\Psi(i, t) &= \epsilon \Psi_1(i, \epsilon^2 t) + \epsilon^2 \Psi_2(i, \epsilon^2 t) + \dots \\ \Theta(i, t) &= \epsilon \Theta_1(i, \epsilon^2 t) + \epsilon^2 \Theta_2(i, \epsilon^2 t) + \dots \\ \Sigma(i, t) &= \epsilon \Sigma_1(i, \epsilon^2 t) + \epsilon^2 \Sigma_2(i, \epsilon^2 t) + \dots\end{aligned}$$

Un nouveau temps d'évolution  $\tau = \epsilon^2 t$  est introduit.

Le développement asymptotique du modèle de boîtes est analogue à celui du modèle 2D de Boussinesq par les points suivants :

- Egalité entre la température au premier ordre et la température imposée par forçage.
- Solubilité de l'équation de température à chaque ordre.
- Relation de compatibilité pour la salinité obtenue au troisième ordre.

Le système d'équations asymptotiques s'écrit :

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \alpha_1 \\ \Psi_1 &= -\Theta_1 + \Sigma_1 \\ \partial_\tau \Sigma_1 &= \beta_3 - \xi_2 \Sigma_1 + \frac{\partial^2}{\partial i^2} (\Psi_1^2 \Sigma_1)\end{aligned}$$

Le choix d'une intégrale  $B_3(i)$  du forçage salin telle que  $d^2 B_3(i)/di^2 = \beta_3(i) - \xi_2 \Sigma_1$  permet d'écrire l'équation de salinité sous la forme :

$$\partial_\tau \Sigma_1 = \frac{\partial^2}{\partial i^2} (B_3(i) + \Psi_1^2 \Sigma_1) .$$

On observe que les équations asymptotiques obtenues ici sont l'exacte discrétisation de celles issues du modèle 2D quant aux termes advectifs et de forçage (cf. paragraphe IV.1.3).

Comme signalé précédemment, prendre en compte les effets diffusifs entre boîtes revient simplement à remplacer  $\Psi_i^2$  par  $\Psi_i^2 + \kappa$ . Dans l'équation asymptotique, le terme diffusif s'écrirait donc  $\kappa \Sigma_1$  dans le terme de droite. Là encore, la formulation est la discrétisation de celle obtenue à partir du modèle fluide.

## IV.3 Structure bifurcatoire du modèle asymptotique

Nous avons étudié la structure bifurcatoire de l'équation asymptotique régularisée (voir paragraphe IV.1.4) en utilisant le code de résolution de systèmes différentiels AUTO (Doedel, 1980). Les diagrammes de bifurcation sont comparés d'un point de vue qualitatif à ceux obtenus précédemment avec le modèle fluide, notamment dans l'étude de Dijkstra & Molemaker (1997) présentée en III.3.3. Nous montrons que l'équation asymptotique régularisée est capable de reproduire la structure catastrophique du modèle bidimensionnel. L'ajout du terme d'hyperdiffusivité introduit un paramètre non physique dans le modèle et interdit toute comparaison quantitative. Il faut s'assurer qu'il n'intervient pas dans le comportement qualitatif du modèle.

### IV.3.1 Le code AUTO

La structure globale du code AUTO ne sera pas présentée ici. Nous nous bornerons à citer celles de ses potentialités que nous avons utilisées.

Le problème étudié est un système différentiel avec des valeurs imposées aux limites. Dans ce cadre le logiciel AUTO permet de :

- Calculer les branches de solutions et en déterminer la stabilité pour chaque valeur d'un paramètre de bifurcation.
- Positionner avec précision les points de bifurcation le long de ces branches.
- Calculer les branches émergeant d'un point de bifurcation.

### IV.3.2 Implantation de l'équation asymptotique

Les notations utilisées pour coder l'équation asymptotique dans le code AUTO diffèrent de celles présentées en IV.1 dans la dérivation du développement asymptotique.

Sous la formulation établie en IV.1, les solutions stationnaires de l'équation asymptotique régularisée satisfont :

$$B + \left[ k^2 \Sigma + C^2 (\alpha - \Sigma)^2 \Sigma \right] - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Sigma = 0 .$$

où  $B$  est l'intégrale du forçage salin tel que le flux de sel à travers les parois verticales soit nul,  $\alpha$  est la dérivée méridienne du forçage thermique et  $\Sigma$  est la dérivée méridienne de la salinité moyennée verticalement.

Le forçage salin s'exprimant par :  $\partial S(\mathcal{Y}, 0)/\partial z = b F_S(\mathcal{Y})$ , on a  $B(\mathcal{Y}) = b \int F_S(\mathcal{Y}) d\mathcal{Y}$ . De même le forçage thermique s'écrit  $T(\mathcal{Y}, 0) = a F_T(\mathcal{Y})$  et  $\alpha(\mathcal{Y}) = a dF_T(\mathcal{Y})/d\mathcal{Y}$ .

La variable considérée maintenant est la grandeur  $\sigma = \Sigma/a$ . Avec ces notations, l'équation asymptotique s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{Y}^2} \sigma = \frac{1}{\gamma_0^2} \left[ r \int F_S d\mathcal{Y} + k^2 \sigma + \mu^2 \left( \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T - \sigma \right)^2 \sigma \right],$$

où

$$\mu^2 = C^2 a^2, \quad r = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \gamma_0 = k\gamma.$$

Les deux conditions aux limites associées à cette équation sont :  $\sigma(-\pi) = \sigma(\pi) = 0$ .

On note que tous les termes de cette équation ont même parité. Les forçages de surface thermique et salin étant symétriques par rapport à l'équateur ( $\mathcal{Y} = 0$ ),  $B(\mathcal{Y})$  et  $\alpha(\mathcal{Y})$  sont des fonctions impaires. Réaliser la transformation  $\mathcal{Y} \rightarrow -\mathcal{Y}$  induit un changement de solution  $\sigma \rightarrow -\sigma$ . Le système est donc antisymétrique pour la variable  $\sigma$ , ce qui signifie qu'il est symétrique pour la salinité. Nous parlerons de branches d'équilibres symétriques quand la solution  $\sigma$  induit une circulation pour laquelle les deux hémisphères sont miroirs l'un de l'autre par rapport à l'équateur (par exemple une circulation de type **TH** ou **SA**). Bien que mathématiquement il s'agisse de solutions antisymétriques, l'usage a consacré l'appellation de solutions symétriques pour de telles circulations. Une branche est dite asymétrique si les cellules circulatoires n'ont pas même amplitude dans un hémisphère et dans l'autre (une circulation de type **PP** par exemple).

Les deux jeux de notations sont récapitulés ci-dessous dans le tableau 1.

| Paramètre ou variable                            | Notation IV.1 | Notation AUTO        |
|--------------------------------------------------|---------------|----------------------|
| forçage thermique                                | $a$           | $\mu^2 = C^2 a^2$    |
| forçage salin                                    | $b$           | $r = b/a$            |
| rapport d'aspect                                 | $k$           | $k$                  |
| coefficient d'hyperdiffusivité                   | $\gamma$      | $\gamma_0 = k\gamma$ |
| dérivée de la salinité<br>moyennée verticalement | $\Sigma$      | $\sigma = \Sigma/a$  |

**Tableau 1** : Equivalence entre les deux jeux de notations du développement asymptotique.

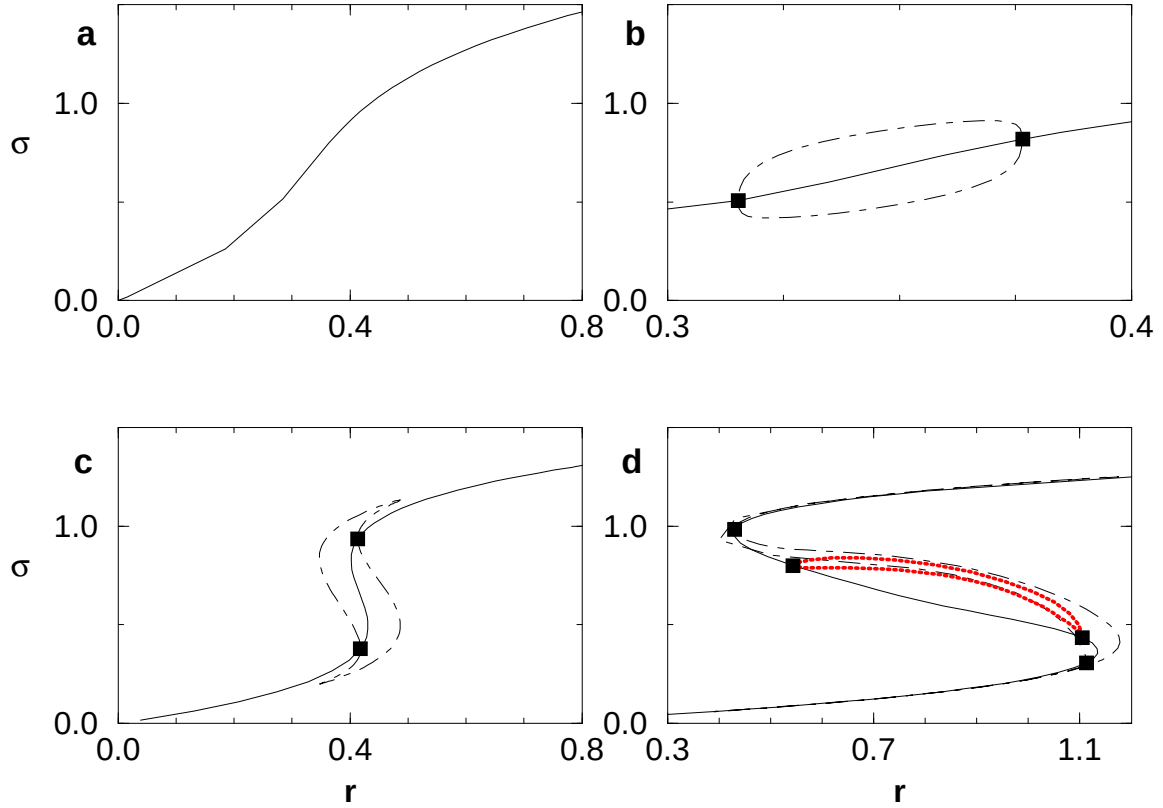
Pour coder cette équation, on utilise dans AUTO les trois variables  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$ .  $U_3$  représente la latitude  $\mathcal{Y}$  comprise dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .  $U_1$  est la solution  $\sigma$



recherchée.  $U_2$  est une variable intermédiaire égale à  $\partial\sigma/\partial\mathcal{Y}$ . Pour chaque valeur du paramètre, AUTO calcule  $U_1, U_2, U_3$  (cette dernière restant inchangée) et la norme  $L$  de la solution définie par  $L = \sqrt{\sum_{i=1}^n (U_1(i)^2 + U_2(i)^2 + U_3(i)^2)}$ , où l'indice  $i$  caractérise le point de discrétisation de l'intervalle.

### IV.3.3 Evolution de la structure bifurcatoire selon $\mu$

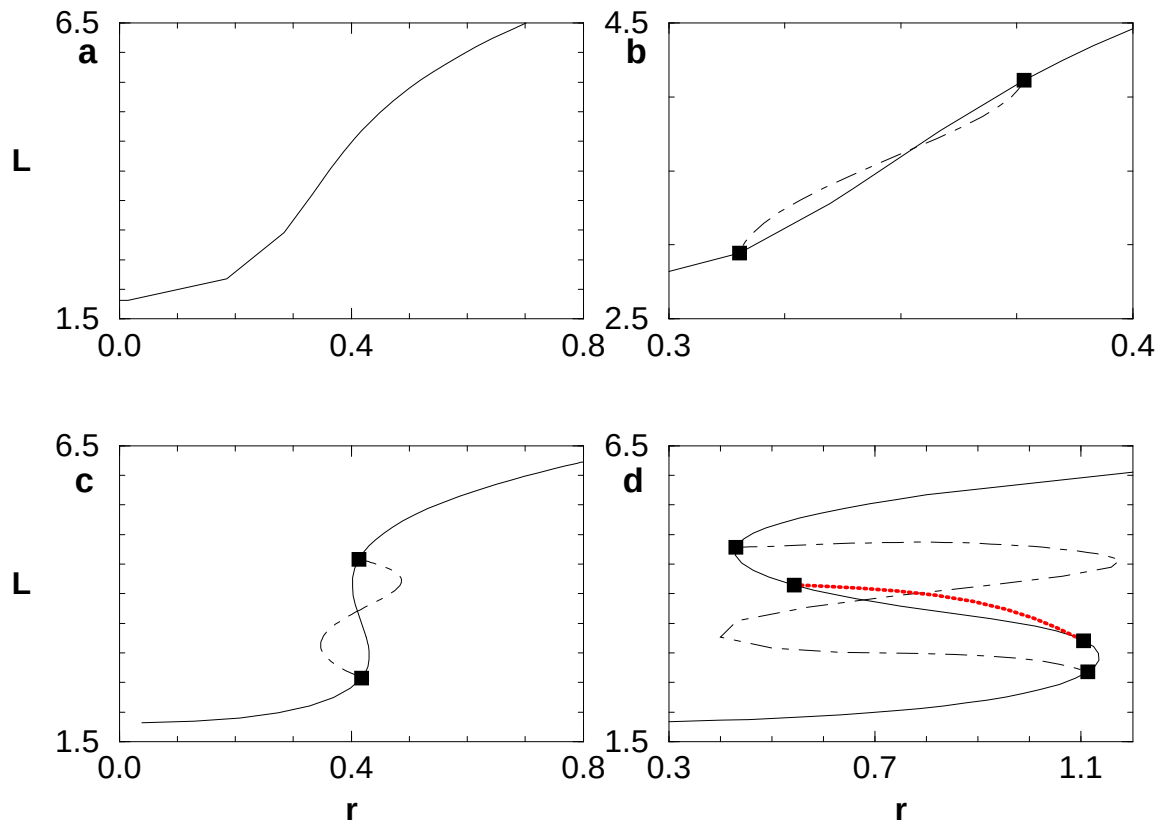
Pour différentes valeurs du forçage thermique, caractérisé par  $\mu$ , on calcule les branches de solutions du modèle selon l'intensité du forçage salin représenté par  $r$ . Les autres paramètres sont fixés respectivement à  $k = 0.2$  et  $\gamma_0 = 0.1$  et les profils de forçage sont  $F_S(\mathcal{Y}) = F_T(\mathcal{Y}) = \cos(\mathcal{Y})$ .



**Figure IV.2 :** Diagrammes de bifurcation en fonction de  $r$  de l'équation asymptotique régularisée pour les paramètres  $k = 0.2$ ,  $\gamma_0 = 0.1$  et différentes valeurs de  $\mu$ . En **a** :  $\mu = 0.8$ . En **b** :  $\mu = 1$ . En **c** :  $\mu = 1.5$ . En **d** :  $\mu = 3$ . La valeur maximale de la solution  $\sigma$  est portée en ordonnée. Les solutions symétriques sont tracées en trait plein, les branches asymétriques en trait mixte et en trait gras.

La figure IV.2 représente les diagrammes de bifurcation obtenus pour, successivement,  $\mu = 0.8$ ,  $\mu = 1$ ,  $\mu = 1.5$  et  $\mu = 3$ . Le paramètre de bifurcation est  $r$ . La valeur maximale de  $\sigma$  sur le domaine est portée en ordonnée. Les points de *bifurcation fourche* sont signalés par des carrés noirs.

La figure IV.3 représente des diagrammes équivalents, mais avec la norme  $L$  portée en ordonnée. Cette grandeur n'est pas physique, mais elle croît avec  $\sigma$ . Son intérêt réside dans le fait que les deux solutions asymétriques issues d'un point de *bifurcation fourche* ont même valeur de  $L$ . Ainsi, dans le plan  $(r, L)$  une seule courbe apparaît aux points de *bifurcation fourche*, ce qui accroît la lisibilité des figures. Par la suite, nous représenterons les diagrammes de bifurcation dans le plan  $(r, L)$ .



**Figure IV.3 :** Diagrammes de bifurcation en fonction de  $r$  de l'équation asymptotique régularisée pour les paramètres  $k = 0.2$ ,  $\gamma_0 = 0.1$  et différentes valeurs de  $\mu$ . En **a** :  $\mu = 0.8$ . En **b** :  $\mu = 1$ . En **c** :  $\mu = 1.5$ . En **d** :  $\mu = 3$ . La norme  $L$  de la solution  $\sigma$  est portée en ordonnée. Les solutions symétriques sont tracées en trait plein, les branches asymétriques en trait mixte et en trait gras.

Quand  $\mu$  est petit (figure IV.2.a ou IV.3.a), une seule branche de solutions existe. La circulation se déforme continûment d’une solution de type **TH** à une solution de type **SA**.

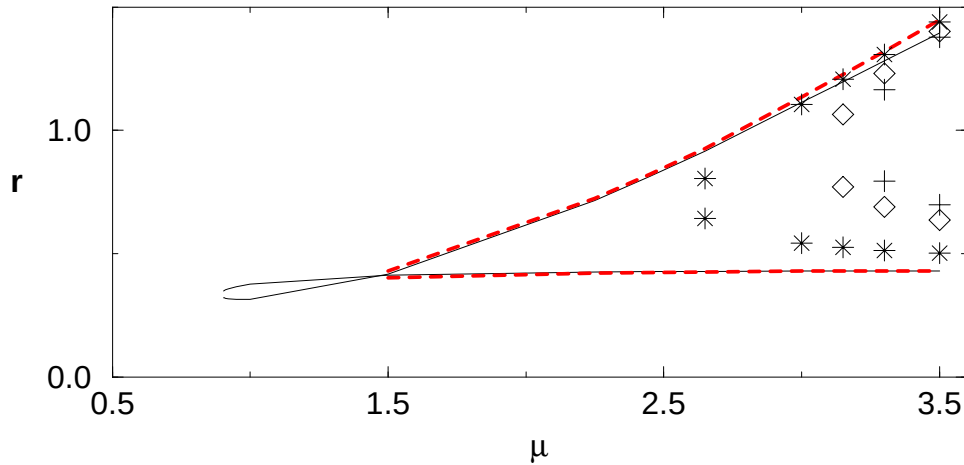
Quand  $\mu$  augmente (figure IV.2.b ou IV.3.b), deux points de *bifurcation fourche* apparaissent. La situation est surcritique : la branche initiale est instable entre les deux points de bifurcation, les deux solutions asymétriques émergeant de ces points sont stables.

Au fur et à mesure que  $\mu$  augmente, les deux points s’éloignent l’un de l’autre sur la branche de solutions initiale, qui elle-même change de forme (figure IV.2.c ou IV.3.c). Les *points limites* de la solution initiale sont presque confondus avec les points de *bifurcation fourche*. Sur l’intervalle de forçage salin compris entre les abscisses des deux points de bifurcation, deux équilibres symétriques sont stables.

Si  $\mu$  augmente encore (figure IV.2.d ou IV.3.d), la forme en  $S$  de la solution initiale s’accroît et le domaine sur lequel deux équilibres symétriques sont stables s’étend. Deux autres points de *bifurcation fourche* apparaissent qui donnent naissance à deux équilibres asymétriques instables. Pour de plus grandes valeurs de  $\mu$ , d’autres points de *bifurcation fourche* prennent naissance sur la branche de solutions initiale et même sur les branches de solutions asymétriques instables. Dès que deux points de *bifurcation fourche* sont “suffisamment” éloignés sur une branche, deux autres apparaissent entre eux. La structure devient horriblement compliquée et n’est pas intéressante d’un point de vue physique puisque les nouvelles branches asymétriques sont instables. En outre, le domaine des grandes valeurs de  $\mu$  sort du cadre de cette étude puisque le développement asymptotique concerne de petites valeurs de  $\mu$ .

Les diagrammes de bifurcation présentés ci-dessus nous permettent d’observer que la structure bifurcatoire de l’équation asymptotique est analogue à celle du modèle bidimensionnel à faible rapport d’aspect telle que décrite par Dijkstra & Molemaker (1997). En effet, la catastrophe génératrice d’équilibres multiples est dans les deux cas l’émergence de deux points de *bifurcation fourche*. C’est une catastrophe de codimension 1. A faible forçage thermique, une seule branche de solutions existe. Après apparition des points de *bifurcation fourche*, des équilibres multiples sont observables : ce sont deux solutions stables asymétriques. La catastrophe à l’origine de l’existence d’équilibres multiples symétriques est l’émergence de *points limites* sur la branche de solutions initiale. Il s’agit donc d’une *fronce*, de codimension 2.

En figure IV.4 nous avons représenté la position des points de bifurcation de l’équation asymptotique régularisée dans le plan  $(\mu, r)$ . Le code des traits est précisé dans la légende. La forme de la courbe représentative des positions des premiers points de *bifurcation fourche* est analogue à celle proposée par Thual & McWilliams (1992) (voir figure III.4). Mais ces points apparaissent à forçage thermique plus faible que les *points limites* de la branche de solutions initiale. Le rapport d’aspect du bassin étant petit, les *points limites*, quand ils existent, sont très proches des points de *bifurcation fourche*, ce qui est cohérent avec les études précédentes.



**Figure IV.4** : Positions des différents points de bifurcation dans le plan  $(\mu, r)$ . En trait plein : positions des points de *bifurcation fourche* correspondant à l'apparition de solutions asymétriques. En tirets gras : positions des *points limites* de la branche initiale. Les différents symboles (\*, ◇, +) localisent les points de *bifurcation fourche* à l'origine de nouvelles solutions asymétriques instables.

### IV.3.4 Evolution de la structure bifurcatoire selon $k$

On étudie la sensibilité de la structure catastrophique du modèle au paramètre  $k$ , rapport d'aspect du bassin.

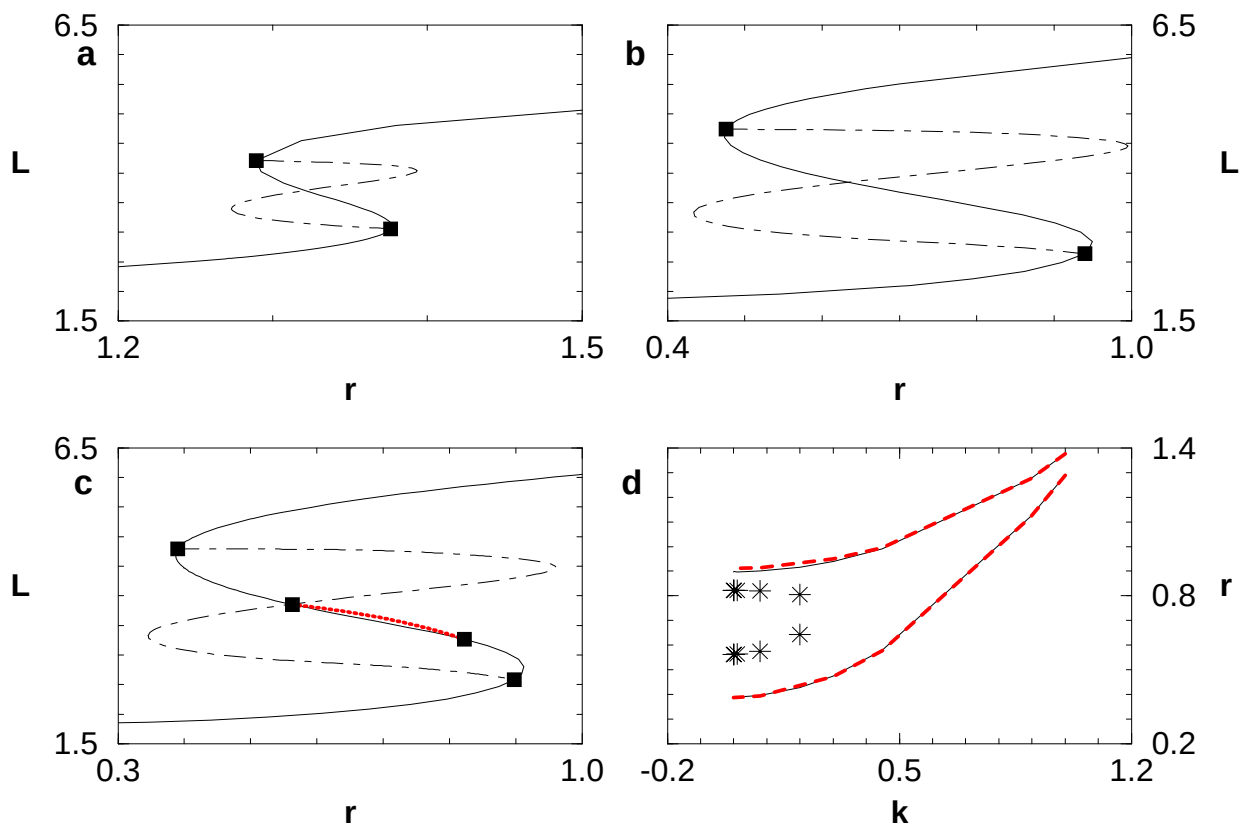
En figure IV.5, on a représenté les diagrammes de bifurcation obtenus dans le plan  $(r, L)$  pour  $\mu = \sqrt{7}$ ,  $\gamma_0 = 0.1$  et plusieurs valeurs de  $k$  :  $k = 1$ ,  $k = 0.3$  et  $k = 0$ , les profils de forçage étant toujours  $F_S(\mathcal{Y}) = F_T(\mathcal{Y}) = \cos(\mathcal{Y})$ . En figure IV.5.d, les positions des points de bifurcation sont indiquées dans le plan  $(k, r)$ . Les codes de traits et de symboles sont les mêmes qu'en figure IV.4.

Diminuer le paramètre  $k$  n'altère pas qualitativement le comportement du modèle. Quantitativement en revanche, la structure est déplacée. On observe facilement en figure IV.5.d, que les points de bifurcation apparaissent à plus faible valeur de  $r$  quand le rapport d'aspect du bassin diminue.

De plus, les points de bifurcations et les *points limites* de la solution initiale émergent à plus faible valeur de  $\mu$  quand  $k$  diminue. Par exemple, pour  $\mu = \sqrt{7}$ , une troisième branche de solutions existe en deçà d'une valeur de  $k$  comprise entre 0.2 et 0.3 (voir figure IV.5.d). De même, pour  $\mu = 0.8$ , deux branches de solutions existent quand  $k = 0$  alors qu'il n'en existe qu'une seule quand  $k = 0.2$ .

Ces déplacements des points de bifurcation dans l'espace  $(\mu, r)$  semblent physiquement

raisonnables. Le forçage de surface a d'autant plus d'influence que la couche de fluide est peu profonde. Le déplacement des points de bifurcation vers des valeurs plus faibles des intensités de forçage quand  $k$  diminue a déjà été constaté précédemment. Thual & McWilliams (1992) notamment ont observé que le point origine des équilibres multiples symétriques converge vers l'origine du plan des amplitudes des forçages quand le rapport d'aspect tend vers 0.



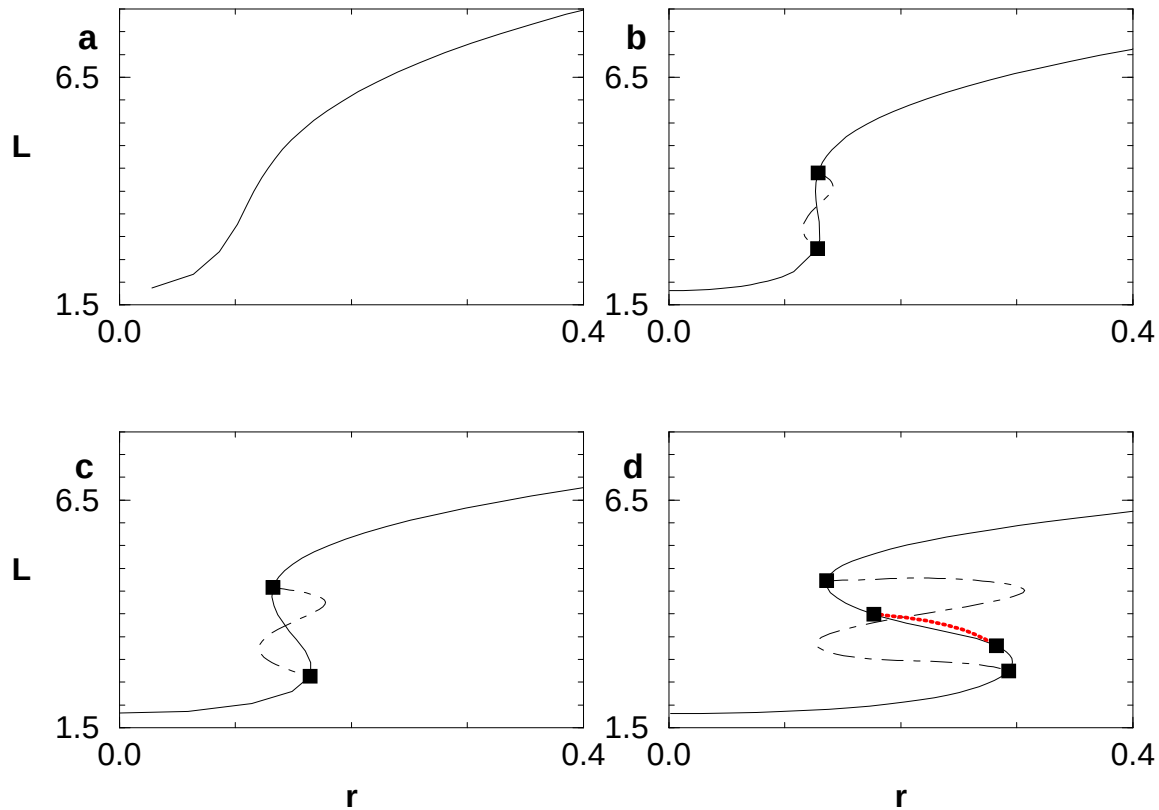
**Figure IV.5 :** Diagrammes de bifurcation en fonction de  $r$  de l'équation asymptotique régularisée pour les paramètres  $\mu^2 = 7$ ,  $\gamma_0 = 0.1$  et différentes valeurs de  $k$ . En **a** :  $k = 1.0$ . En **b** :  $k = 0.3$ . En **c** :  $k = 0.0$ . En **d** : positions des différents points de bifurcation dans le plan  $(k, r)$ .

### IV.3.5 Sensibilité au paramètre $\gamma_0$

Le paramètre  $\gamma_0$  introduit afin de régulariser l'équation asymptotique ne doit pas perturber sa structure catastrophique.

En figure IV.6, sont représentés les diagrammes de bifurcation obtenus dans le plan  $(r, L)$  pour  $k = 0.2$ ,  $\gamma_0 = 0.05$  et différentes valeurs de  $\mu$ . Les profils de forçage sont toujours  $F_S(\mathcal{Y}) = F_T(\mathcal{Y}) = \cos(\mathcal{Y})$ .

En comparant les figures IV.3 et IV.6 correspondant respectivement à  $\gamma_0 = 0.1$  et  $\gamma_0 = 0.05$ , on observe que le comportement du modèle n'est pas qualitativement modifié. En revanche, les transitions entre différents régimes du modèle se produisent à plus faibles valeurs des paramètres de forçage quand  $\gamma_0$  est plus petit. Les intensités des solutions observées à forçage égal sont nettement supérieures, ce qui est logique puisque le terme dissipatif d'hyperdiffusivité est alors moindre.



**Figure IV.6 :** Diagrammes de bifurcation en fonction de  $r$  de l'équation asymptotique régularisée pour les paramètres  $k = 0.2$ ,  $\gamma_0 = 0.05$  et différentes valeurs de  $\mu$ . En **a** :  $\mu = 0.5$ . En **b** :  $\mu = 0.8$ . En **c** :  $\mu = 1.0$ . En **d** :  $\mu = 1.5$ .

---

Pour des valeurs élevées de  $\gamma_0$ , la solution  $\sigma$  est d'amplitude très réduite et aucun point de bifurcation n'est apparu dans les calculs effectués, même pour de fortes amplitudes du forçage thermique ( $\mu = 100$ ). Dans ce cas le terme d'hyperdiffusivité domine l'équation et il est tout à fait possible que le comportement de l'équation asymptotique diverge de celui du modèle bidimensionnel. Il faut donc éviter de choisir de grandes valeurs de  $\gamma_0$ . A l'inverse, le choix d'une trop petite valeur de  $\gamma_0$  peut entraîner des problèmes numériques car alors l'équation se rapproche de sa formulation non régularisée. Dans les intervalles de paramètres que nous avons balayés, le comportement du modèle est inchangé pour des valeurs de  $\gamma_0$  comprises entre 0.03 et 0.1.

Nous verrons au chapitre suivant que l'équation non régularisée parvient à reproduire qualitativement bien les résultats simulés numériquement. Choisir une relativement faible valeur de  $\gamma_0$  peut permettre de préserver les qualités prédictives de l'équation asymptotique, tout en la régularisant.





## CHAPITRE V

# Interprétation géométrique et validation de l'approche asymptotique

### V.1 Introduction

Au chapitre IV, nous avons montré que l'équation asymptotique régularisée a un comportement bifurcatoire analogue à celui du modèle bidimensionnel de Boussinesq.

L'équation asymptotique originale, i.e. non régularisée, ne peut décrire des équilibres multiples *globalement définis* dans le bassin. Néanmoins plusieurs solutions peuvent exister localement. L'étude de la structure topologique des branches de solutions asymptotiques permet d'expliquer les résultats obtenus par intégration numérique du modèle bidimensionnel de Boussinesq.

Dans l'article inséré ci-dessous, une interprétation géométrique de l'équation asymptotique non régularisée est proposée. Les résultats numériques sont comparés aux prédictions asymptotiques dans trois cas distincts de forçage de surface. Les profils de forçage ont été sélectionnés pour leur capacité à induire des comportements dynamiquement intéressants de la circulation thermohaline, tels la présence d'équilibres multiples ou de fronts thermohalins. Au travers de cette comparaison, l'équation asymptotique s'avère être un outil très puissant et extrêmement économique de détermination a priori du comportement du modèle.

L'approche asymptotique rend possible une étude systématique des comportements observés en fonction des profils de forçage appliqués. Elle permet également de tester l'inclusion de nouvelles paramétrisations dans le modèle (différentes formulations des conditions de surface, représentation de la rotation, ...).

### V.2 Article Fleury & Thual (1997)

*Journal of Fluid Mechanics* (1997), vol. **349**, pp. 117-147

# Stationary fronts of the thermohaline circulation in the low-aspect-ratio limit

By **LAURENCE FLEURY**<sup>1</sup> AND **OLIVIER THUAL**<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CERFACS, 42 Av. Coriolis, 31057 Toulouse Cedex, FRANCE

<sup>2</sup>INPT/ENSEEIH/IMFT, Av. du Pr. Soula, 31400 Toulouse, FRANCE

(Received 12 March 1996 and in revised form 31 October 1996)

A two-dimensional Boussinesq model of the thermohaline convection in a rectangular domain is forced at the top by a prescribed temperature and a prescribed salinity flux. The two forcings have opposite effects on the density field, which leads to the formation of fronts and multiple equilibria. Numerical results are interpreted through a comparison with the solutions of an asymptotic equation, derived in the limit of a shallow basin by Cessi & Young (1992). In order to explain the discrepancies between the numerical and the asymptotic solutions, we extend this asymptotic approach through a geometrical representation and a topological classification of the surface forcings. By comparing three forcings, we propose a global picture which gives clues to interpret the numerical solutions.

## 1. Introduction

The motion of a fluid layer forced by temperature and salinity gradients is called thermohaline convection. Rich dynamical behaviours result from the competition of the two buoyancy effects, particularly in the case where normal gradients are specified at the boundaries. In the present study, horizontal and vertical gradients result from buoyancy contrasts imposed at the free surface of a fluid layer, such as the ones that drive the thermohaline ocean circulation. When the density of the ocean is increased at the surface, the water column eventually becomes gravitationally unstable and convective overturning sets in. The heat and freshwater forcings at the ocean surface have opposite effects on the density field and, thus, on the deep convection. Cooling at high latitudes and heating at low latitudes favour sinking at the poles and rising at the equator, together with a surface transport from the equator to the poles. Inversely, freshwater input, through precipitation at high latitudes and strong net evaporation at low latitudes (except in a small belt of latitudes corresponding to the intertropical convergence zone, where precipitation is important) induces downwelling at the equator, upwelling at the poles and a surface transport from the poles to the equator. The actual circulation results from the two competing influences.

At present, deep water is mainly formed in subpolar regions, mostly in the northern North Atlantic and the Weddell Sea. The thermohaline circulation exhibits an asymmetric pattern in the Atlantic basin, with cross-equatorial southward deep flow and northward surface

transport. In the North Pacific, no deep convection occurs. Paleoclimate records provide some evidence that, in the past, the thermohaline circulation has operated in another mode (Broecker, Peteet & Rind 1985) and that there have been very abrupt transitions between different regimes (Kennett & Stott 1991). Such changes in the thermohaline circulation would involve strong modifications in the latitudinal distribution of heat, water and chemical tracers, and they are believed to have a large influence on the variability of climate.

The existence of multiple stable equilibria of the thermohaline circulation is supported by studies based on a hierarchy of models. First, Stommel (1961) solved the circulation between two boxes linked by hydraulic pipes, when one box is heated and salted (equatorial box) and the other cooled and freshened (polar box). Two stable solutions are obtained under the same forcing in a certain range of parameters. With models composed of three boxes (one equatorial and two polar ones), Rooth (1982) and Welander (1986) showed the existence of stable asymmetric states, composed of only one cross-equatorial cell, when the forcing is equatorially symmetric.

Using a three-dimensional ocean circulation model in an idealized geometry, Bryan (1986) observed a similar behaviour of the thermohaline circulation. Imposing a forcing symmetrical about the equator, two stable steady states are obtained, one of them being an asymmetric pole-to-pole circulation. Many authors have also observed multiple equilibria with realistic ocean models (Weaver *et al.* 1993) or coupled ocean-atmosphere models (Manabe & Stouffer 1988). Moreover, oscillations of the thermohaline circulation have been simulated on decadal, secular and millennial timescales (for a review of such results, see Weaver & Hughes 1992).

The mechanisms proposed to explain these phenomena occur essentially in the latitude-depth plane, except for decadal/interdecadal variability. Thus, it makes sense to use a two-dimensional model to study the thermohaline circulation. Indeed, multiple steady states (Marotzke, Welander & Willebrand 1988), secular oscillations (Winton & Sarachik 1993) and millennial variability (Marotzke 1990) have been observed through two-dimensional simulations.

In all these studies, the imposition of ‘mixed boundary conditions’ at the ocean surface appears to be necessary in order to observe multiple equilibria and oscillations. This means that the temperature and the salinity surface conditions should differ, so that the model cannot be formulated in terms of a single tracer (Welander 1986). This difference in the boundary conditions is consistent with reality: there is a strong feedback between the sea surface temperature and the surface heat flux to the ocean, while the flux of freshwater is independent of the sea surface salinity. In the two-box model of Stommel (1961), salinities and temperatures are restored to prescribed values, but the relaxation time is longer for the salinity than for the temperature. In two-dimensional and three-dimensional models, a restoring boundary condition is used for the temperature (flux proportional to a temperature deviation), while a flux condition is applied for the salinity. Since observations of such a flux are lacking, the model is spun-up with restoring boundary conditions for temperature and salinity. When an equilibrium is reached, the salinity flux is diagnosed and used afterwards as the surface condition. In some idealized studies (Thual & McWilliams 1992; Cessi & Young 1992; Dijkstra & Molemaker 1997), the restoring temperature boundary condition is replaced

by a Dirichlet condition (prescribed temperature).

In box models (Stommel 1961), as in three-dimensional models (Weaver *et al.* 1993), the respective importance of the salinity and the temperature forcings has been pointed out as the controlling parameter in determining the existence of multiple regimes of the thermohaline circulation. The sensitivity to this parameter has been addressed precisely in some two-dimensional studies.

Thual & McWilliams (1992) studied a two-dimensional, non-rotating Boussinesq model in a rectangular pole-to-pole basin. The surface is forced by cosine salinity flux and cosine temperature. The control space is reduced to three parameters: the aspect ratio of the basin and the amplitudes of the surface forcings. For the same values of the control parameters, three numerical equilibria can be identified in the numerical solutions (see figure 3). The thermally driven one (TH) is a two-celled circulation, symmetric about the equator, and exhibiting sinking at both poles and rising at the equator. The salinity-driven solution (SA) is a symmetric, two-celled circulation with sinking at the equator, and rising at both poles. The two pole-to-pole circulations (PP) have only one transequatorial cell, with sinking at one pole and rising at the other. The authors explored the parameter space and documented the catastrophe structure of the model. In the forcing amplitude plane, two cusps delimiting the domain of existence of multiple equilibria were found and the small-aspect-ratio limit was investigated.

Quon & Ghil (1992) analysed the bifurcation structure of the same two-dimensional Boussinesq model, applying a diagnosed flux. Again, multiple equilibria are obtained. When the salinity flux strength increases, the thermally dominated circulation is destabilized through a pitchfork bifurcation and asymmetric solutions can exist. At small aspect ratio, Quon & Ghil (1995) found a second bifurcation of Hopf type, leading from asymmetric steady solutions to oscillatory solutions.

Dijkstra & Molemaker (1997) studied the same two-dimensional Boussinesq model, with several types of mixed boundary conditions, using a path following technique. This enables them to catch stable and unstable solutions. When the Rayleigh number is strong enough, the bifurcation diagram presents two pitchfork bifurcations, leading to asymmetric states from a TH circulation or a SA solution. At large salt flux, oscillations are found as Hopf bifurcation of the PP circulation.

In a different approach, Cessi & Young (1992) performed an asymptotic expansion of the fluid model used by Thual & McWilliams (1992) in the limit of a thin layer. At the first order, the temperature and salinity are found to be vertically homogeneous. The two-dimensional model is reduced to a one-dimensional evolution equation for the vertically averaged salinity. This equation supports multiple solutions, corresponding to the minima of a Lyapounov functional. Since only one of the asymptotic solutions is globally defined in the basin, the authors had to add a higher-order diffusivity term and were eventually able to explain the catastrophe structure of the fluid model.

In the present paper, an interpretation of the Cessi & Young (1992) asymptotic analysis is proposed and validated through a comparison with numerical results obtained using different surface forcings. We denote as the *loop* case, the *straight* case and the *cubic* case three surface

forcing functions inspired by physical considerations (warm and dry at the equator). These terms will be justified in § 4.

The numerical results show multiple equilibria of the classical type TH/SA/PP, but also solutions exhibiting more than two cells. Separating two counter-rotating cells, a front exists where the latitudinal gradients are sharp. Within the boundary layer surrounding the front, the asymptotic scaling is not valid anymore. The asymptotic equation enables us to determine whether fronts can exist and to predict the topological structure of the solutions, following the surface forcing. The results obtained with the three surface forcings considered, associated solutions of which have different topologies, can be seen as the unfoldings of the same degenerate situation.

The outline of this paper is as follows. Model and numerical results for the different surface forcing functions are described in § 2. The asymptotic expansion is recalled in § 3. In § 4, a geometric resolution of the asymptotic equation is explained and the topology of the asymptotic solutions is detailed for the three surface forcings studied. The comparison between numerical results and asymptotic predictions is presented in § 5 for the *loop* case, in § 6 for the *straight* case and in § 7 for the *cubic* case. The last section presents conclusions and future directions of this study.

## 2. The thermohaline fluid model

### 2.1. The two-dimensional Boussinesq model

We consider a two-dimensional  $(y, z)$  layer of fluid in a rectangular basin of width  $L$  and depth  $d$ . Formulated in a non-rotating Cartesian frame, its evolution is governed by the Navier-Stokes equation, simplified by the Boussinesq approximation and conservation laws for heat and salt. The equations read

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= - \frac{\nabla p}{\rho_0} + B(T, S) \mathbf{e}_z + \nu \nabla^2 \mathbf{u} , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 , \\ \frac{\partial}{\partial t} T + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \kappa_T \nabla^2 T , \\ \frac{\partial}{\partial t} S + \mathbf{u} \cdot \nabla S &= \kappa_S \nabla^2 S , \end{aligned} \tag{1}$$

where  $\mathbf{u} (v, w)$  is the velocity vector field,  $p$  is the pressure field,  $\rho_0$  is an average value of the density  $\rho$ ,  $T$  and  $S$  are the temperature and salinity scalar fields and  $\mathbf{e}_z$  is the vertical unit vector. The dissipation parameters are the viscosity  $\nu$  and the thermal and saline diffusivities  $\kappa_T$  and  $\kappa_S$ . The buoyancy  $B(T, S)$  is given by the linear equation of state  $B(T, S) = -g \rho / \rho_0 = g (\gamma_T T - \gamma_S S)$ , where  $g$  is the gravitational acceleration and  $\gamma_T$  and  $-\gamma_S$  are the thermal and saline expansion coefficients.  $\nabla^2$  is the Laplacian operator.

From a geophysical point of view, the model can be thought of as a zonally averaged model of the world ocean. The modelling of the rotation can be included in the magnitude of the viscosity and diffusivity terms, as discussed in Marotzke *et al.* (1988) and Thual &

McWilliams (1992). Moreover, Vellinga (1996) compared the dynamical behaviour of a two-dimensional non-rotating Boussinesq model with the zonally averaged model of Wright & Stocker (1991), which has a parametrization of rotation. He concluded that the two models are qualitatively similar. The transport equations for heat and salt seem to be more crucial in the understanding of thermohaline features, than the details of the momentum budget.

## 2.2. Surface forcing and boundary conditions

Following Bryan (1986), the ocean surface is forced by mixed boundary conditions, i.e. a fixed temperature and a fixed salinity flux. This qualitative difference between the thermal and the saline forcings is chosen to reproduce the atmospheric influence on the ocean. Indeed, the strong feedback between oceanic and atmospheric temperatures leads to an equilibrium sea surface temperature, while the ocean salinity is forced by the water budget, composed of precipitation plus runoff minus evaporation, which is completely independent of the sea surface salinity. The forcing is chosen to be equatorially symmetric (i.e. symmetric to  $y = 0$ ) and is expressed as

$$T = \Delta T \mathcal{F}_T(y) \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial z} S = \frac{\Delta S}{d} \mathcal{F}_S(y) \quad \text{at} \quad z = 0, \quad (2)$$

where  $\Delta T$  and  $\Delta S$  are dimensional constants characterizing the magnitude of the forcings.  $\mathcal{F}_T(y)$  and  $\mathcal{F}_S(y)$  are non-dimensional functions, whose maximum is normalized to unity.

On the lateral sides ( $y = \pm L/2$ ) and the bottom ( $z = -d$ ) of the domain, no-flux boundary conditions are applied for the scalar fields:  $\partial T / \partial n = \partial S / \partial n = 0$ , where  $\partial / \partial n$  is the derivative in the direction normal to the boundary. For the velocity field, free-slip boundary conditions are imposed on all the sides of the domain:  $w = 0$  and  $\partial v / \partial n = 0$  on horizontal boundaries ( $z = 0$  and  $z = -d$ ),  $v = 0$  and  $\partial w / \partial n = 0$  on vertical walls ( $y = \pm L/2$ ).

## 2.3. Dimensionless model

The model is non-dimensionalized using the following units:  $d$  for length in both spatial directions,  $2\pi d^3 / L\kappa_T$  for time,  $\nu\kappa_T L^2 / (4\pi^2 d^5 g\gamma_T)$  for temperature and  $\nu\kappa_T L^2 / (4\pi^2 d^5 g\gamma_S)$  for salinity. The pressure is eliminated by introducing the streamfunction  $\Psi$ , related to the velocity by  $v = -\partial\Psi/\partial z$  and  $w = \partial\Psi/\partial y$ . With the notation  $J(f, g) = (\partial f / \partial y)(\partial g / \partial z) - (\partial f / \partial z)(\partial g / \partial y)$  for the Jacobian operator, the dimensionless equations for the conservation of vorticity and scalars are

$$\begin{aligned} \frac{1}{k\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + J(\Psi, \nabla^2 \Psi) \right] &= \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial y} (T - S) + \nabla^4 \Psi, \\ \frac{1}{k} \left[ \frac{\partial}{\partial t} T + J(\Psi, T) \right] &= \nabla^2 T, \\ \frac{1}{k} \left[ \frac{\partial}{\partial t} S + J(\Psi, S) \right] &= Le \nabla^2 S, \end{aligned} \quad (3)$$

where  $\sigma = \nu / \kappa_T$  is the Prandtl number,  $Le = \kappa_S / \kappa_T$  is the Lewis number, and  $k = 2\pi d / L$  is the aspect ratio. The non-dimensional domain of motion is the box  $-\pi/k \leq y \leq \pi/k$  and  $-1 \leq z \leq 0$ .

In dimensionless form, the surface forcing is expressed as

$$T = a F_T(ky) \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial z} S = b F_S(ky) \quad \text{at} \quad z = 0, \quad (4)$$

where the non-dimensional magnitudes  $a = 4\pi^2 d^5 g \gamma_T \Delta T / (\nu \kappa_T L^2)$  and  $b = 4\pi^2 d^5 g \gamma_S \Delta S / (\nu \kappa_T L^2)$  are easily connectable to the thermal and saline Rayleigh numbers.  $F_T$  and  $F_S$  are such that  $F_T(ky) = \mathcal{F}_T(y)$  and  $F_S(ky) = \mathcal{F}_S(y)$ .

The streamfunction boundary conditions are  $\Psi = \partial^2 \Psi / \partial n^2 = 0$  on all the sides of the domain.

Thus, the model is controlled by five dimensionless parameters  $[a, b, k, \sigma, Le]$  and two non-dimensional functions  $[F_T(ky), F_S(ky)]$ . We will here consider the infinite Prandtl number limit  $\sigma \rightarrow \infty$  and the particular case  $Le = 1$ . Then, the model is only controlled by the aspect ratio and the surface forcing.

The choice  $\sigma \rightarrow \infty$  corresponds to an hypothesis in current use in climate studies (Maier-Reimer, Mikolajewicz & Hasselmann 1993). Indeed, for large-scale and long-term ocean studies, it is reasonable to linearize the momentum equation, and to diagnose the velocity field from the density field. The value  $Le = 1$  is chosen because there is no argument indicating why the large-scale heat and salt transports due to subgrid-scale processes should be different.

#### 2.4. Numerical simulations

The equations are solved with the numerical code developed by Thual & McWilliams (1992). A finite difference scheme is used in the vertical direction and a Fourier decomposition is applied in the horizontal direction. We approximate the free-slip and no-flux lateral boundary conditions by considering a box of length  $2L$  and imposing either symmetry or asymmetry for the different fields, according to their nature. For most of the results presented here, the resolution counts 129 points equidistributed from  $y = -\pi/k$  to  $y = \pi/k$  in the horizontal direction and 17 vertical levels. The temporal scheme is a predictor-corrector one.

In this study, we consider two different functions for the surface temperature field: either

$$\text{FT1 :} \quad F_T(ky) = \cos(ky), \quad (5)$$

or a slightly different forcing

$$\text{FT2 :} \quad F_T(ky) = -2 \int_{-\pi/k}^y k \sin^{1/3}(ks) ds / \int_{-\pi/k}^0 k \sin^{1/3}(ks) ds. \quad (6)$$

In FT2, the bounds of the integral has been chosen such that the average of  $F_T(ky)$  on the domain is zero.

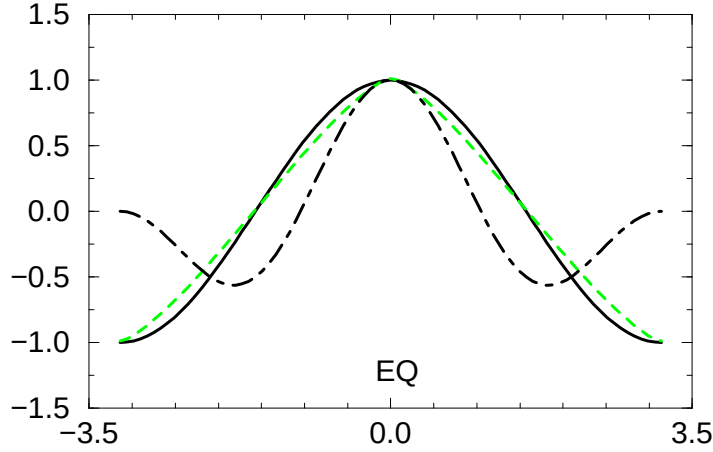


FIGURE 1. Surface forcing functions  $F_T(ky)$  and  $F_S(ky)$ ,  $ky \in [-\pi, \pi]$ : FT1 and FS1 ( ——— ), FS2 ( — · — · — ) and FT2 (grey dashed line).

Two different profiles are used too for the surface salinity flux:  
either

$$\text{FS1 : } F_S(ky) = \cos(ky) , \quad (7)$$

or

$$\text{FS2 : } F_S(ky) = [\cos(ky) + \cos(2ky)] / 2 . \quad (8)$$

The functions  $F_T(ky)$  and  $F_S(ky)$  are displayed in figure 1. They have been chosen to capture the meridional structure of the sea surface temperature (hot at the equator and cold at the poles) and of the salinity flux (excess of freshwater, and thus deficit of salt, at high latitudes and strong salinity input due to the evaporation at the equator). The FS2 case is similar to the salt flux applied in some previous studies (Marotzke *et al.* 1988; Quon & Ghil 1992), where it was diagnosed from an equilibrium state obtained by prescribing temperature and salinity at the ocean surface.

We study here three sets of forcing: FT1 and FS2 (the *loop* case), FT1 and FS1 (the *straight* case) and FT2 and FS1 (the *cubic* case). The meanings of these names are explained in § 4. In all three cases, multiple equilibria are found, i.e. competing equilibria at a given value of the parameters  $(a, b, k)$ . The values of the parameter  $(a, b, k)$  used in the figures presented below have been chosen so that the solutions obtained are representative of the multiple equilibria generated by each forcing.

Applying the forcing functions FT1 and FS2 (*loop*), stationary fronts separating two counter-rotating cells have been found. At the fronts, the different fields have very sharp latitudinal gradients. The front locations vary with the magnitudes of the applied forcing functions. Figure 2 provides an example of multiple equilibria existing in the *loop* case: there are a thermally driven circulation, denoted TH (figure 2a), a symmetric four-celled circulation, denoted 4C, with one front in the middle of each hemisphere (figure 2b), and an asymmetric two-celled



solution, denoted A2C, with a single front at the middle of one hemisphere (figure 2c). A fourth equilibrium exists, which is the reflection of A2C with respect to the equator.

Using FT1 and FS1 (*straight*) as forcing functions, three kinds of circulations are obtained for the same set of parameters: a thermally driven circulation (TH, figure 3a), a salinity-driven circulation (SA, figure 3b) and two asymmetric pole-to-pole circulations (PP, figure 3c and its reflection with respect to the equator).

With FT2 and FS1 (*cubic*), the three previous types of circulations are again observed (TH is displayed in figure 4(a), SA in figure 4(b), and PP in figure 4(c)). Fronts located close to the lateral boundaries are found in the SA and PP cases. An explanation of their existence is given below. Note that boundary fronts can also develop with the *straight* forcing (FT1 and FS1).

In the three cases, the ‘superposition principle’ introduced by Thual & McWilliams (1992) can be observed: each hemisphere acts independently from the other one, and the asymmetric solutions are exactly obtained by adding two halves of the two different symmetric circulations.

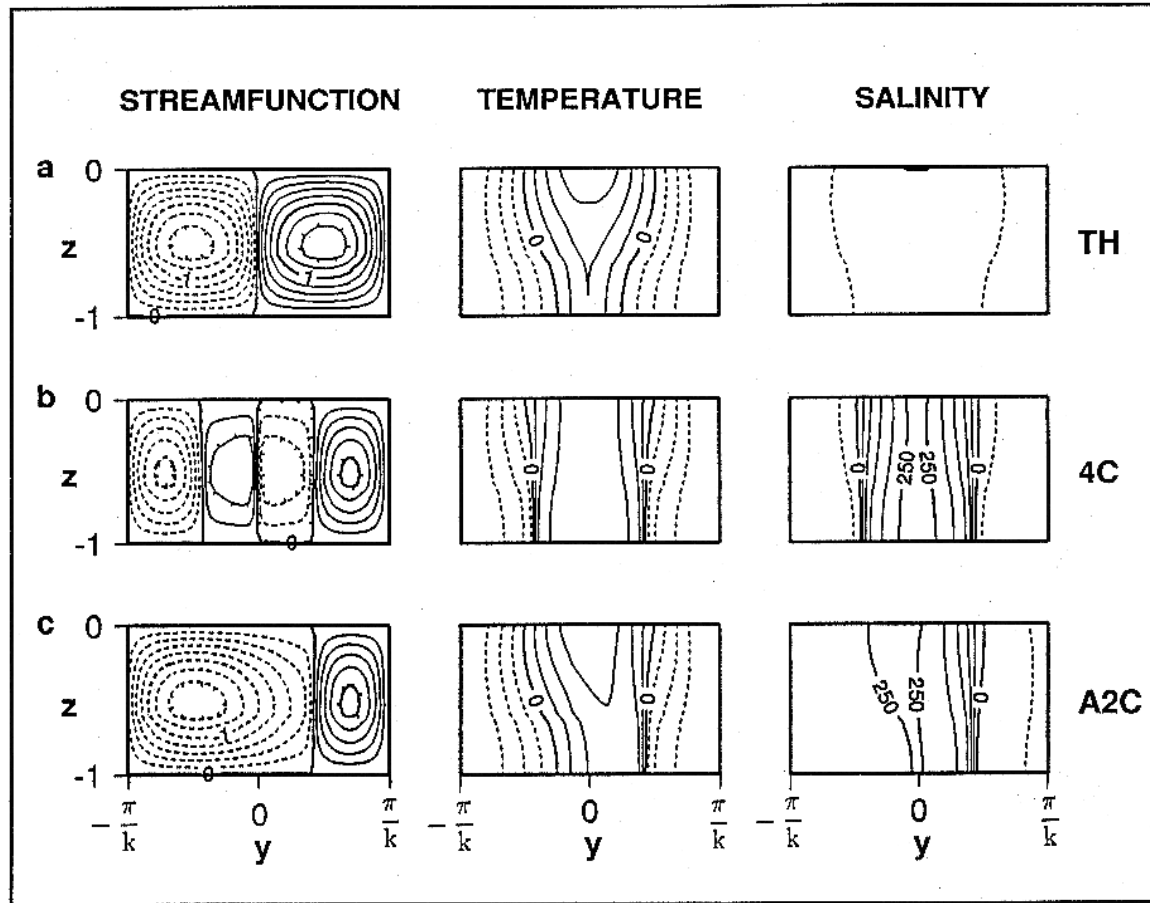


FIGURE 2. *Loop case*: three stable equilibria numerically observed with the surface forcing FT1 and FS2. The parameters are  $a = 200$ ,  $b = 40$ ,  $k = 0.2$ . Contour intervals are 0.2 for the streamfunction and 50 for the scalar fields  $T$  and  $S$ .

- (a) Thermally driven circulation TH, with sinking at both poles and rising at the equator.
- (b) Four-celled circulation 4C, with sinking at the poles and at the equator, and rising at the mid-hemispheres.
- (c) Asymmetric two-celled circulation A2C, with sinking at both poles and rising at the mid-latitudes of the second hemisphere.

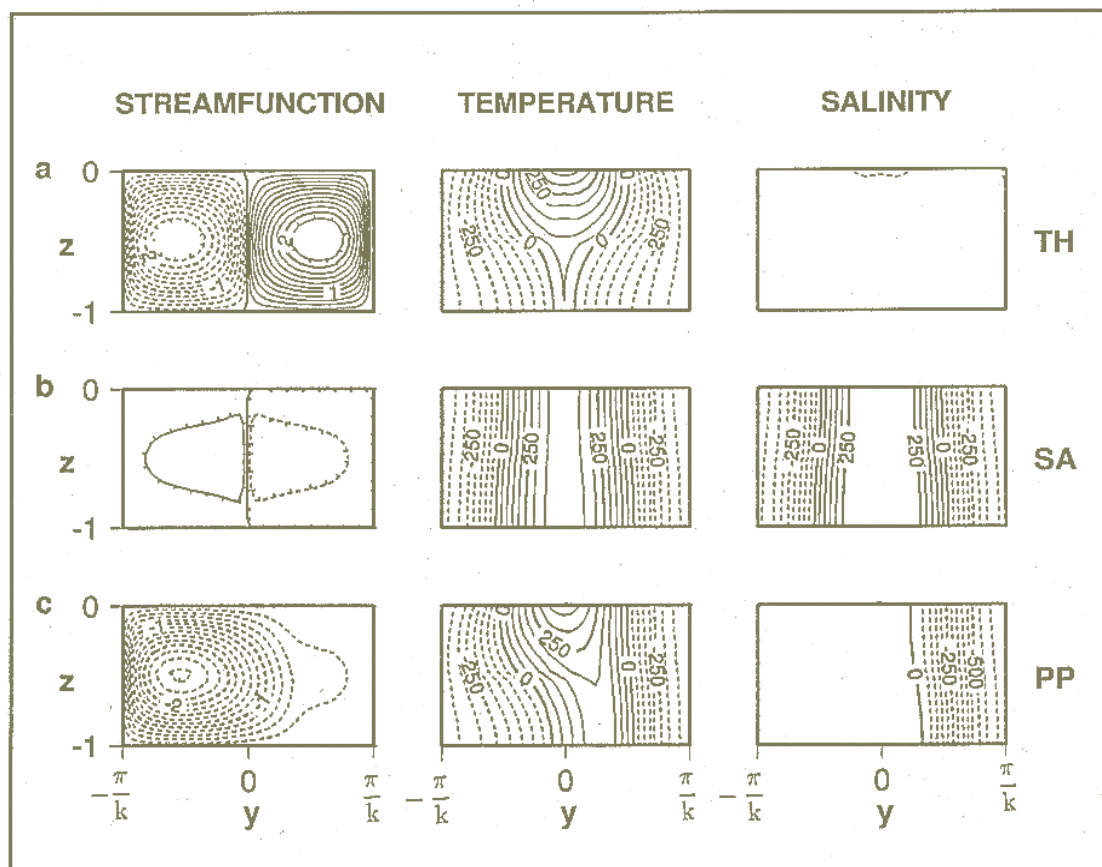


FIGURE 3. *Straight case*: three stable equilibria numerically observed with the surface forcing FT1 and FS1. The parameters are  $a = 380$ ,  $b = 30$ ,  $k = 0.2$ . Contour intervals are 0.2 for the streamfunction and 50 for the scalar fields  $T$  and  $S$ .

- (a) Thermally driven circulation TH, with sinking at both poles and rising at the equator.
- (b) Salinity-driven circulation SA, with sinking at the equator and rising at both poles.
- (c) Pole-to-pole circulation PP, with sinking at one pole and rising at the other.

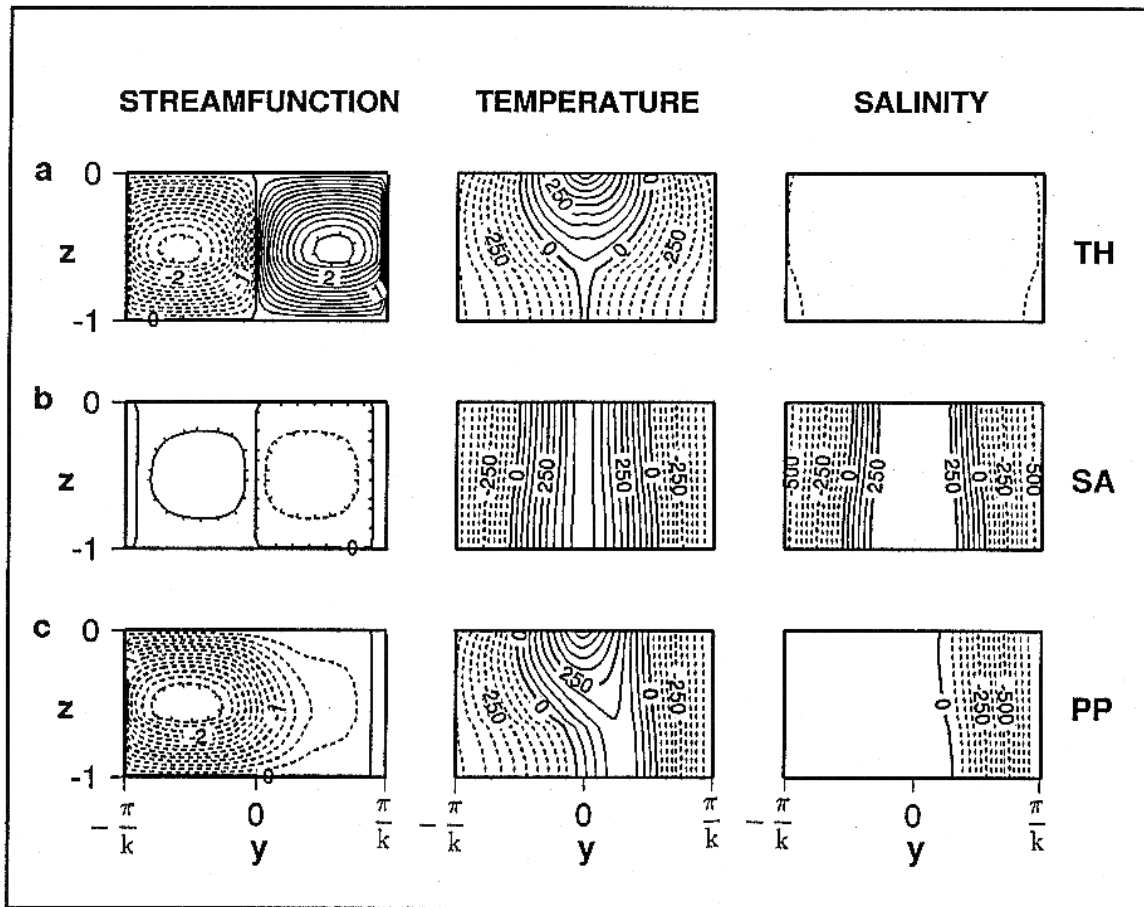


FIGURE 4. *Cubic case*: three stable equilibria numerically observed with the surface forcing FT2 and FS1. The parameters are  $a = 488$ ,  $b = 40$ ,  $k = 0.2$ . Contour intervals are 0.2 for the streamfunction and 50 for the scalar fields  $T$  and  $S$ .

- (a) Thermally driven circulation TH, with sinking at both poles and rising at the equator.
- (b) Salinity-driven circulation SA, with sinking at the equator and rising at high latitudes. Thin counter-rotating cells develop in the polar regions.
- (c) Pole-to-pole circulation PP, with sinking at one pole and, rising at the opposite high latitudes. A counter-rotating cell develops in the polar region close to the rising end of the principal cell.

### 3. Asymptotic expansion

In the limit of a small aspect ratio  $k \rightarrow 0$ , an asymptotic expansion of this model has been performed by Cessi & Young (1992). It is recalled here, using different notation for the purpose of the following sections.

#### 3.1. The asymptotic path

We consider the following asymptotic path  $\epsilon \rightarrow 0$  in the functional control space, where  $a = \epsilon a_{(1)}$ ,  $b = \epsilon^3 b_{(3)}$  and  $k = \epsilon k_{(1)}$ . The fields are expanded in powers of  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} \Psi(y, z, t) &= \epsilon \Psi_{(1)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \epsilon^2 \Psi_{(2)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \dots \\ T(y, z, t) &= \epsilon T_{(1)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \epsilon^2 T_{(2)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \dots \\ S(y, z, t) &= \epsilon S_{(1)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \epsilon^2 S_{(2)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

In addition to  $z$ , the independent variables will be denoted by  $\mathcal{Y} = ky$  and  $\mathcal{T} = \epsilon^2 kt$ .

#### 3.2. Expansion order by order

At the first order in  $\epsilon$ , the solutions are

$$\begin{aligned} T_{(1)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) &= a_{(1)} F_T(\mathcal{Y}), \\ S_{(1)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) &= s_{(1)}(\mathcal{Y}, \mathcal{T}), \\ \Psi_{(1)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) &= - \left[ a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)}(\mathcal{Y}, \mathcal{T}) \right] P(z), \end{aligned} \quad (10)$$

where  $P(z) = (z^4 + 2z^3 - z)/24$  is the polynomial satisfying  $d^4 P/dz^4 = 1$  and the boundary conditions  $P = d^2 P/dz^2 = 0$  at  $z = 0$  and  $z = -1$ . The temperature and salinity fields are vertically homogeneous at the first order. The function  $s_{(1)}(\mathcal{Y}, \mathcal{T})$  is undetermined at this order.

At the second order, the solutions are

$$\begin{aligned} T_{(2)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) &= a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) \left[ a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)}(\mathcal{Y}, \mathcal{T}) \right] Q(z), \\ S_{(2)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) &= \frac{1}{Le} \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)}(\mathcal{Y}, \mathcal{T}) \left[ a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)}(\mathcal{Y}, \mathcal{T}) \right] Q(z), \end{aligned} \quad (11)$$

where  $Q(z) = (2z^5 + 5z^4 - 5z^2)/240$  is the polynomial which satisfies  $dQ/dz = P$  and the required boundary conditions for the temperature and the salinity. In the expression of  $S_{(2)}$ ,  $Q(z)$  could be replaced by  $Q(z) + C_q$ , where  $C_q$  is an arbitrary constant, because the compatibility condition is satisfied at this order. In particular, the choice  $C_q = 1/240$  ensures that the vertical average of  $S_{(2)}$  vanishes, and amounts to a definition of  $s_{(1)}(\mathcal{Y}, \mathcal{T})$  as the depth-averaged salinity. The temperature and salinity fields have the same vertical structure at this order. The expression for  $\Psi_{(2)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T})$  can be calculated, but is not needed here.

At the third order in  $\epsilon$ , the compatibility condition comes from the salinity equation and reads

$$\frac{1}{Le} \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} s_{(1)} = b_{(3)} F_S + k_{(1)}^2 \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{Y}^2} s_{(1)} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \left[ C^2 \left( a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right], \quad (12)$$

with

$$C^2 = \frac{1}{Le^2} \int_{-1}^0 P^2(z) dz = \frac{1}{Le^2} \frac{31}{24^2 \times 630} \sim 8.5 \times 10^{-5}.$$

This value of  $C^2$  differs from the one printed in Cessi & Young (1992).

### 3.3. Asymptotic equations

We introduce the following notation:

$$\begin{aligned} \Theta(y, t) &= \epsilon \Theta_{(1)}(ky, \epsilon^2 kt) = \epsilon \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} T_{(1)}(ky, z, \mathcal{T}), \\ \Sigma(y, t) &= \epsilon \Sigma_{(1)}(ky, \epsilon^2 kt) = \epsilon \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} S_{(1)}(ky, z, \mathcal{T}), \end{aligned} \quad (13)$$

representative of the theoretical solution(s). With these definitions,  $\Theta(y, t)$  and  $\Sigma(y, t)$  are respectively the latitudinal temperature and salinity gradients.

Connected to the surface forcing, we define  $B(y)$  and  $\alpha(y)$  such that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} B(y) &= \epsilon^3 \frac{d}{d\mathcal{Y}} B_{(3)}(ky) = \epsilon^3 b_{(3)} F_S(ky), \\ \alpha(y) &= \epsilon \alpha_{(1)}(ky) = \epsilon a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(ky). \end{aligned} \quad (14)$$

In defining  $B(y)$  from  $F_S(\mathcal{Y})$ , we impose  $B = 0$  at the lateral boundaries, so that  $B(y)$  is the vertically averaged salinity flux due to the forcing. Indeed, the forcing cannot induce a non-zero horizontal salinity flux through the domain.

Taking the  $\mathcal{Y}$ -derivative of the compatibility equation (12) and introducing the notation above, the asymptotic system reads

$$\begin{aligned} \Theta(y) &= \alpha(y), \\ \frac{k}{Le} \frac{\partial}{\partial t} \Sigma(y, t) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ B(y) + k^2 \Sigma(y, t) + C^2 [\Theta(y) - \Sigma(y, t)]^2 \Sigma(y, t) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Moreover, the streamfunction at the first order is

$$\Psi(y, z, t) = [\Sigma(y, t) - \Theta(y)] P(z). \quad (16)$$

The asymptotic system can be reduced to

$$\frac{k}{Le} \frac{\partial}{\partial t} \Sigma(y, t) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ B(y) + G[\alpha(y), \Sigma(y, t)] \right\}, \quad (17)$$

with  $G(\alpha, \Sigma) = k^2 \Sigma + C^2(\alpha - \Sigma)^2 \Sigma$ .

The stationary solutions of this equation are given by

$$\chi[y, \alpha(y), \Sigma(y)] = B(y) + G[\alpha(y), \Sigma(y)] = 0. \quad (18)$$

Regarding this as an equation for  $\Sigma$ , the number of possible solutions depends on the latitude  $y$  through the values of  $B(y)$  and  $\alpha(y)$ . We denote as  $\Lambda_+(\alpha)$  and  $\Lambda_-(\alpha)$  the maximum and the minimum of the function  $G(\Sigma)$  for  $\alpha$  and  $k$  fixed (see figure 5a). In the range of latitudes  $y$  where the value of  $(-B)$  is bounded by  $\Lambda_+$  and  $\Lambda_-$ , three solutions are obtained, since  $G$  is a cubic polynomial of  $\Sigma$ . When the value of  $(-B)$  is outside the interval  $[\Lambda_-, \Lambda_+]$ , there is only one solution.

In particular, since  $k \neq 0$ , the minimum  $\Lambda_-(\alpha)$  differs from zero and there exists only one equilibrium in the vicinity of  $\alpha = 0$ , which corresponds to  $y$ -latitudes close to the equator (since the forcing is symmetric) or close to the poles (since no-flux temperature is imposed there). The asymptotic expansion is thus unable to describe multiple equilibria globally defined in the domain. Nevertheless, we will show that the asymptotic theory is a useful tool to help understand many features of the dynamic behaviour of the thermohaline model.

### 3.4. Pseudo-stability considerations

The asymptotic equation can also be expressed as

$$\frac{k}{Le} \frac{\partial}{\partial t} \Sigma(y, t) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial \Sigma} V[y, \Sigma(y, t)], \quad (19)$$

where  $V$  can be easily derived by a polynomial integration, such that  $\partial V[y, \Sigma] / \partial \Sigma = B(y) + G[\alpha(y), \Sigma]$ . A Lyapounov functional  $\mathcal{L}$  is given by:  $\mathcal{L}\{\Sigma\} = \int_{-\pi/k}^{\pi/k} V[s, \Sigma(s, t)] ds$ . Indeed

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \int_{-\pi/k}^{\pi/k} \frac{\partial V}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} ds = \frac{Le}{k} \int_{-\pi/k}^{\pi/k} \frac{\partial V}{\partial \Sigma} \frac{\partial^3 V}{\partial^2 y \partial \Sigma} ds = -\frac{Le}{k} \int_{-\pi/k}^{\pi/k} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \Sigma} \right]^2 ds \leq 0. \quad (20)$$

The last equality comes from the lateral boundary conditions on the salinity field ( $\Sigma = 0$ ) and on the function  $B$  ( $B = 0$ ), which ensure that  $\partial V / \partial \Sigma = B + G$  vanishes at  $y = \pm \pi/k$ . Since  $\mathcal{L}$  is bounded from below and monotonical decreasing in time, a steady state is reached when  $\mathcal{L}$  is a local minimum.

For a fixed  $y$ , the steady solutions of the asymptotic equation are the extrema of the potential  $V$ . If a global solution is such that the potential  $V$  is a minimum for each  $y$ , the Lyapounov functional is minimal too and the solution is thus linearly stable in the whole domain.

For a given  $y$ , multiple equilibria may exist. As  $y$  varies, at most one solution is globally defined and the others are only defined in some subinterval of the domain. A branch of solution will be called ‘stable’, when it corresponds to the absolute minimum of  $V$  and ‘metastable’ when it corresponds to a simple minimum of  $V$ . The solution corresponding to the maximum of  $V$  is unstable. The ‘stability’ feature of a solution can change following the latitude  $y$ . The

terms ‘stable’ and ‘metastable’ have been chosen by analogy with the systems really deriving from a potential  $\partial\Sigma/\partial t = dV(\Sigma)/d\Sigma$ . For these systems, such as the liquid/vapour transition model, the terms stable and metastable have a well-defined meaning. For the present study, these terms are not rigorously applicable. We will thus talk about ‘pseudo-stability’ features.

Owing to the cubic form of the function  $G$ , the mid-value  $\Lambda_0 = (\Lambda_+ + \Lambda_-)/2$  characterizes the location where the two minima of  $V$  have the same value. At this latitude, the pseudo-stability features of two solutions are exchanged: the ‘stable’ solution becomes ‘metastable’, while the ‘metastable’ solution becomes ‘stable’. A steady solution could be obtained through a switch from the initial ‘stable’ branch of solution to the new one. However, there is no guarantee that the resulting front is stable and can be observed numerically.

The asymptotic equation presented here is not able to describe such fronts. Attempts to bypass this difficulty has been made through regularization of this equation, either by adding a fourth-order hyperdiffusion term  $-\gamma^2 \partial^2 \Sigma / \partial y^2$  inside the braces in the equation (17), as proposed by Cessi & Young (1992), or by including the true higher-order terms in the asymptotic equation. Whatever the added terms, the study of fronts positioning is here not as straightforward as in the canonical case  $\partial\Sigma/\partial t = dV(\Sigma)/d\Sigma$ , because of the variation of the local potential with space through  $\alpha$ , and of the presence of the  $\partial^2 / \partial y^2$  operator.

Section 4 gives a method to deduce the domain of existence of the asymptotic solutions, and the locations of the pseudo-stability exchanges.

## 4. Geometric resolution of the asymptotic equation

We present a geometric construction which indicates, for any surface forcing, the structure of the asymptotic solutions and the possible positions of the fronts, in the vicinity of which the asymptotic expansion is not valid. In this section and the next ones, we use the notation  $\mathcal{Y} = ky$  for the latitude, with  $\mathcal{Y} \in [-\pi, \pi]$ . Because of the chosen units, the poles correspond to  $\mathcal{Y} = -\pi$  and  $\mathcal{Y} = \pi$ , while a more conventional definition of the latitude would have them at  $-\pi/2$  and  $\pi/2$ .

### 4.1. The geometric construction

For  $\alpha$  and  $k$  fixed, the expressions of the maximum  $\Lambda_+(\alpha)$  and minimum  $\Lambda_-(\alpha)$  of  $G(\Sigma)$  are given by

$$\Lambda_{\pm}(\alpha) = \frac{2\alpha k^2}{3} + \frac{2C^2\alpha^3}{27} \pm \frac{2C^2\alpha^3}{27} \left( 1 - \frac{3k^2}{C^2\alpha^2} \right)^{3/2}. \quad (21)$$

In figure 5(b), the curves  $\Lambda_+(\alpha)$  and  $\Lambda_-(\alpha)$  are displayed as thin solid lines, for an aspect ratio  $k = 0.2$ . Their mid-value  $\Lambda_0$  is plotted as a thin dashed line. For general  $k$ , the curves  $\Lambda_+(\alpha)$  and  $\Lambda_-(\alpha)$  intersect for the value  $\alpha_* = \sqrt{3} k/C$ , where  $\Lambda_+(\alpha_*) = \Lambda_-(\alpha_*) = (8/9) k^2\alpha_*$ . When  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda_-(\alpha)$  is asymptotic to  $k^2\alpha$ . When  $k \rightarrow 0$ , the intersection point of  $\Lambda_+(\alpha)$  and  $\Lambda_-(\alpha)$  gets close to the origin and  $\Lambda_-(\alpha)$  tends to merge with the horizontal axis.

In order to have a global picture of the equilibria obtained by solving the equation  $G(\alpha, \Sigma) = -B(y)$ , it is convenient to plot  $[\alpha(y), -B(y)]$  as a parametric curve. We denote by  $\mathcal{B}$  the



location of all the points  $[\alpha(y), -B(y)]$  reached when  $\mathcal{Y} = ky$  varies from  $-\pi$  to  $\pi$ . Since the forcing has been chosen equatorially symmetric, we just have to study the restriction of  $\mathcal{B}$  to the points such that  $\mathcal{Y} \in [-\pi, 0]$ . For example, the curve  $\mathcal{B}$  representative of the *loop* forcing in this hemisphere is displayed in figure 5(b).

When the points of the curve  $\mathcal{B}$  are located inside the domain delimited by the curves  $\Lambda_+$  and  $\Lambda_-$ , three equilibria exist for the corresponding latitudes  $\mathcal{Y}$ . Points of  $\mathcal{B}$  outside this domain correspond to latitudes where only one equilibrium is defined, following the asymptotic theory. The intersections of  $\mathcal{B}$  and  $\Lambda_0(\alpha)$  correspond to the latitudes  $\mathcal{Y}$  where the stable solution and the metastable solution exchange their pseudo-stabilities.

Examples of the geometric construction are given hereafter for the three kinds of forcing we study here. The topology of the asymptotic solutions is, in each case, deduced and explained.

#### 4.2. The loop shape forcing (FT1 and FS2)

We consider the forcing functions  $F_T(ky) = \cos(ky)$  and  $F_S(ky) = [\cos(ky) + \cos(2ky)]/2$ . The  $\alpha$ -axis is connected to the latitude axis by the relation  $\alpha = -a \sin(\mathcal{Y})$ . The point  $\alpha = a$  corresponds to the mid-hemisphere latitude ( $\mathcal{Y} = -\pi/2$ ) and the point  $\alpha = 0$  corresponds to the latitudes of the pole ( $\mathcal{Y} = -\pi$ ) and of the equator ( $\mathcal{Y} = 0$ ). The relation between  $B$  and  $\alpha$  is  $-B = \alpha \left( b_1 - b_2 [1 - (\alpha^2/a^2)]^{1/2} \right) / a$  if  $\mathcal{Y} \in [-\pi, -\pi/2]$  and  $-B = \alpha \left( b_1 + b_2 [1 - (\alpha^2/a^2)]^{1/2} \right) / a$  if  $\mathcal{Y} \in [-\pi/2, 0]$ . The complete curve  $\mathcal{B}$  describes a *loop* in the plane  $(\alpha, -B)$ . The *loop* is swept across following the direct trigonometric sense, when  $\mathcal{Y}$  varies from  $-\pi$  to 0.

In figure 5(b), the representation plane is  $(\alpha, -B)$ . The curves  $\Lambda_+(\alpha)$ ,  $\Lambda_-(\alpha)$ ,  $\Lambda_0(\alpha)$  and  $\mathcal{B}$  are displayed in the particular case ( $a = 200$ ,  $b = 40$ ,  $k = 0.2$ ). The notation corresponding to the intersections between  $\mathcal{B}$  and the different  $\Lambda$  curves is indicated in figure 5(b). Figure 5(c) shows the solutions  $\Sigma(\mathcal{Y})$  of the asymptotic equation, using different lines to distinguish the pseudo-stability features. Performing a reflection of figure 5(b) with respect to the equator ( $\mathcal{Y} = 0$ ), one obtains the solutions in the second hemisphere  $[0, \pi]$ .

From  $\mathcal{Y} = -\pi$  to  $\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_1$ , the latitude of the intersection of  $\mathcal{B}$  and  $\Lambda_-$ , only one equilibrium  $\Sigma_1$  exists. When  $\mathcal{B}$  crosses the curve  $\Lambda_-$  at  $\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_1$ , two other equilibria appear. One of these solutions,  $\Sigma_2$ , is metastable (local minimum of the potential  $V$ , defined in § 3.4) and the other,  $\Sigma_3$ , is unstable (maximum of the potential  $V$ ). When  $\mathcal{B}$  crosses the curve  $\Lambda_0$  at  $\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_2$ , the pseudo-stabilities of two equilibria are exchanged: the metastable solution  $\Sigma_2$  becomes stable, while the initial solution  $\Sigma_1$  becomes metastable. The third solution remains unstable. When  $\mathcal{B}_2$  intersects  $\Lambda_+$  at  $\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_3$ , the two solutions  $\Sigma_1$  and  $\Sigma_3$  disappear. The only remaining solution  $\Sigma_2$  is the stable one.

Because of the asymptotic relation  $\Psi = [\Sigma - \alpha] P(z)$ , one could superpose  $\alpha = -a \sin(\mathcal{Y})$  on the  $\Sigma$  graph of figure 5(c) to determine the sign of the streamfunction  $\Psi$  for each equilibrium. Since the meridional salinity gradient  $\Sigma_1$  is much weaker than  $\alpha$ , the corresponding streamfunction  $\Psi_1$  corresponds to an intense thermally driven circulation.  $\Sigma_2$  induces a weak salinity-driven circulation  $\Psi_2$ . Following the asymptotic theory, a front should appear between the two counter-rotating circulations in the region where both  $\Sigma_1$  and  $\Sigma_2$  exist. It must be

located in the interval  $[-\mathcal{Y}_1, -\mathcal{Y}_3]$ , but not necessarily at  $\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_2$  since the concept of metastability is not rigorously defined for the asymptotic equation.

A detailed comparison of analytical predictions and numerical results with these forcing and parameters is given in § 5 and shows that the asymptotic analysis is pertinent for an aspect ratio as large as  $k = 0.2$ .

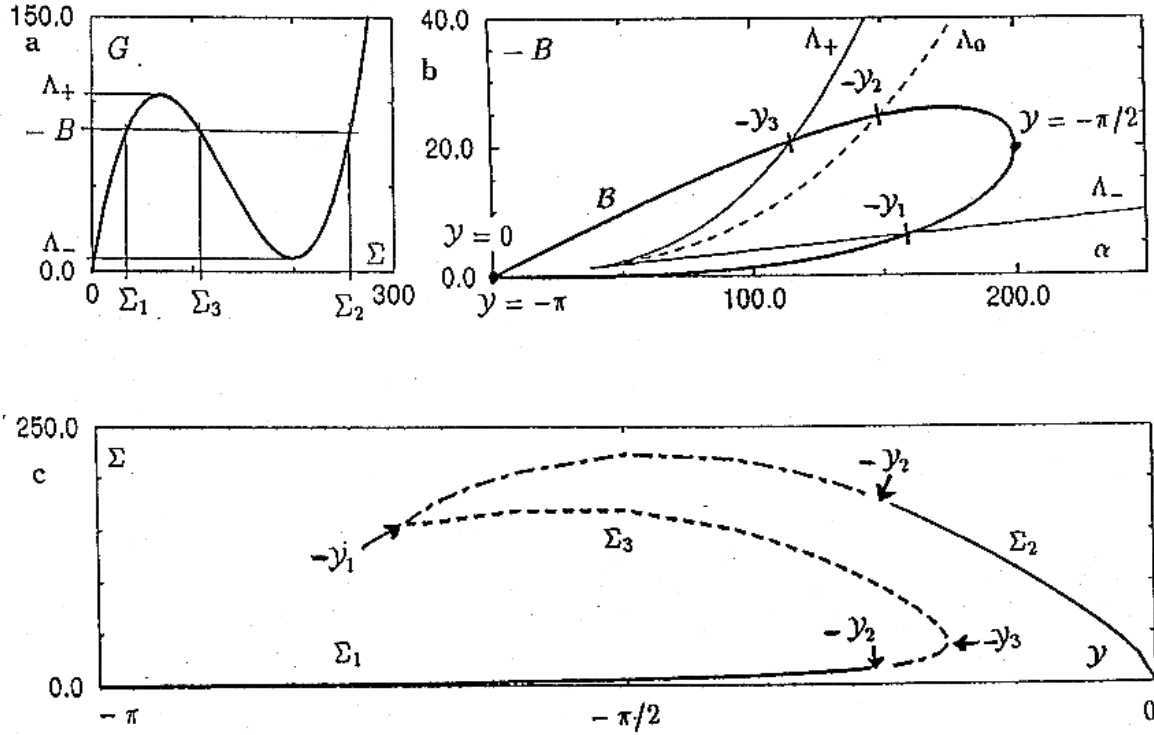


FIGURE 5. Loop case (FT1 and FS2): (a) Function  $G(\Sigma)$  when  $k = 0.2$  and  $\alpha = 200$ .  $\Lambda_+$  and  $\Lambda_-$  are the extrema of  $G(\Sigma)$ .  $(-B)$  is between  $\Lambda_+$  and  $\Lambda_-$  and the asymptotic equation has three solutions  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  and  $\Sigma_3$ .

(b) Geometrical construction. The parameters are  $a = 200$ ,  $b = 40$  and  $k = 0.2$ .  $\Lambda_+(\alpha)$  and  $\Lambda_-(\alpha)$  are displayed as thin solid lines,  $\Lambda_0(\alpha)$  as a thin dashed line. The parametric curve  $\mathcal{B}$  representative of the applied surface forcing is displayed as a solid bold line. The characteristic latitudes are denoted by  $-\mathcal{Y}_1$ ,  $-\mathcal{Y}_2$  and  $-\mathcal{Y}_3$ .

(c) Solutions  $\Sigma(\mathcal{Y})$  of the asymptotic equation: stable (——), metastable (— · — · —) and unstable ( - - - - ) branches of solution.

### 4.3. The straight line shape forcing (FT1 and FS1)

The forcing functions  $F_T(ky) = \cos(ky)$  and  $F_S(ky) = \cos(ky)$  are now applied. The relation between  $B$  and  $\alpha$  is linear (*straight*):  $-B = (b/a) \alpha$  (see figure 6). Both the functions  $B$  and  $\alpha$  are symmetric with respect to  $\mathcal{Y} = -\pi/2$  and the segment  $\mathcal{B}$  is swept across twice for a hemisphere. With this forcing, the plane  $(\alpha, -B)$  is identical to the plane  $(a, b)$ .

As detailed by Thual & McWilliams (1992), a ‘zero-circulation line’ exists in this case (and for  $Le = 1$ ), which separates the domain of existence of salinity-driven circulations and thermally driven circulations in the plane  $(a, b)$ . For magnitudes of the forcing located on this line, the thermal and saline effects exactly balance in the two-dimensional Boussinesq model, and the circulation vanishes in the whole box. The ‘zero-circulation line’ equation reads  $b = ak \tanh(k)$ . In the limit of a small aspect ratio  $k$  it merges with the asymptote of  $\Lambda_-$ , the slope of which is  $k^2$  in the plane  $(\alpha, -B)$ . The branch of solution initiated at  $\mathcal{Y} = -\pi$  is a temperature-driven one if the segment  $\mathcal{B}$  is below the ‘zero-circulation line’. It is a salinity-driven circulation otherwise.

We can distinguish different topological behaviours depending on the number of intersections of  $\mathcal{B}$  with the different  $\Lambda$  curves:

(i) If there is no intersection of  $\mathcal{B}$  with any  $\Lambda$  curve (figure 6a), there is only one solution in the whole basin. Figures 6(a) and 6(b) present the geometric construction and the asymptotic solution  $\Sigma(\mathcal{Y})$  in such a case, with the parameters ( $a = 100$ ,  $b = 35$ ,  $k = 0.2$ ).

(ii) If  $\mathcal{B}$  crosses only  $\Lambda_+$  (figure 6c), only one solution exists between the latitude  $\mathcal{Y} = -\pi$  and the intersection of  $\mathcal{B}$  and  $\Lambda_+$  at  $\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_1$ . There, two new solutions appear. They exist on an interval symmetric with respect to  $\mathcal{Y} = -\pi/2$ . One of them,  $\Sigma_2$ , is metastable on its definition domain, the other one,  $\Sigma_3$ , is unstable. The globally defined solution  $\Sigma_1$  is stable on the whole box. Figures 6(c) and 6(d) show the situation with the parameters ( $a = 150$ ,  $b = 35$ ,  $k = 0.2$ ).

(iii) If  $\mathcal{B}$  crosses successively  $\Lambda_+$  and  $\Lambda_0$  (figures 6e and 6f), the metastable solution  $\Sigma_2$ , which appears at  $\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_1$  when  $\mathcal{B}$  cuts  $\Lambda_+$ , becomes stable when  $\mathcal{B}$  cuts  $\Lambda_0$  at  $\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_2$  and remains stable from  $\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_2$  to the mid-hemisphere. The initial solution  $\Sigma_1$  is metastable between  $-\mathcal{Y}_2$  and the mid-hemisphere. The solutions are symmetric with respect to the half-hemisphere. In the whole hemisphere, two fronts can exist: at the locations  $-\mathcal{Y}_2$  and  $\mathcal{Y}_2 - \pi$ , the solution could switch from  $\Sigma_1$  to  $\Sigma_2$  or could stay on the metastable solution  $\Sigma_1$ . Such a behaviour is displayed for the parameters ( $a = 380$ ,  $b = 30$ ,  $k = 0.2$ ) in figures 6(e), 6(f) and 6(g). Some comparisons performed in this case between numerical results and analytical predictions are presented in § 6.

(iv) The fourth case happens when  $\mathcal{B}$  crosses successively  $\Lambda_+$ ,  $\Lambda_0$  and  $\Lambda_-$  (figures 6h and 6i). This is possible, only if the slope of  $\mathcal{B}$  is between  $8k^2/9$  and  $k^2$ . All the branches of solutions are thus thermally driven. Before  $\mathcal{B}$  cuts  $\Lambda_+$ , there is only one solution  $\Sigma_1$ . When  $\mathcal{B}$  cuts  $\Lambda_+$  at  $\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_1$ , two new solutions appear, one of them,  $\Sigma_2$ , is metastable, the other one,  $\Sigma_3$ , unstable. When  $\mathcal{B}$  cuts  $\Lambda_0$  at  $\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_2$ , the metastable solution becomes stable and inversely. When  $\mathcal{B}$  cuts  $\Lambda_-$  at  $\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_3$ , the metastable  $\Sigma_1$  and unstable  $\Sigma_3$  solutions merge and vanish. The scheme is symmetric with respect to the half-hemisphere. Figure 6(h), 6(i)

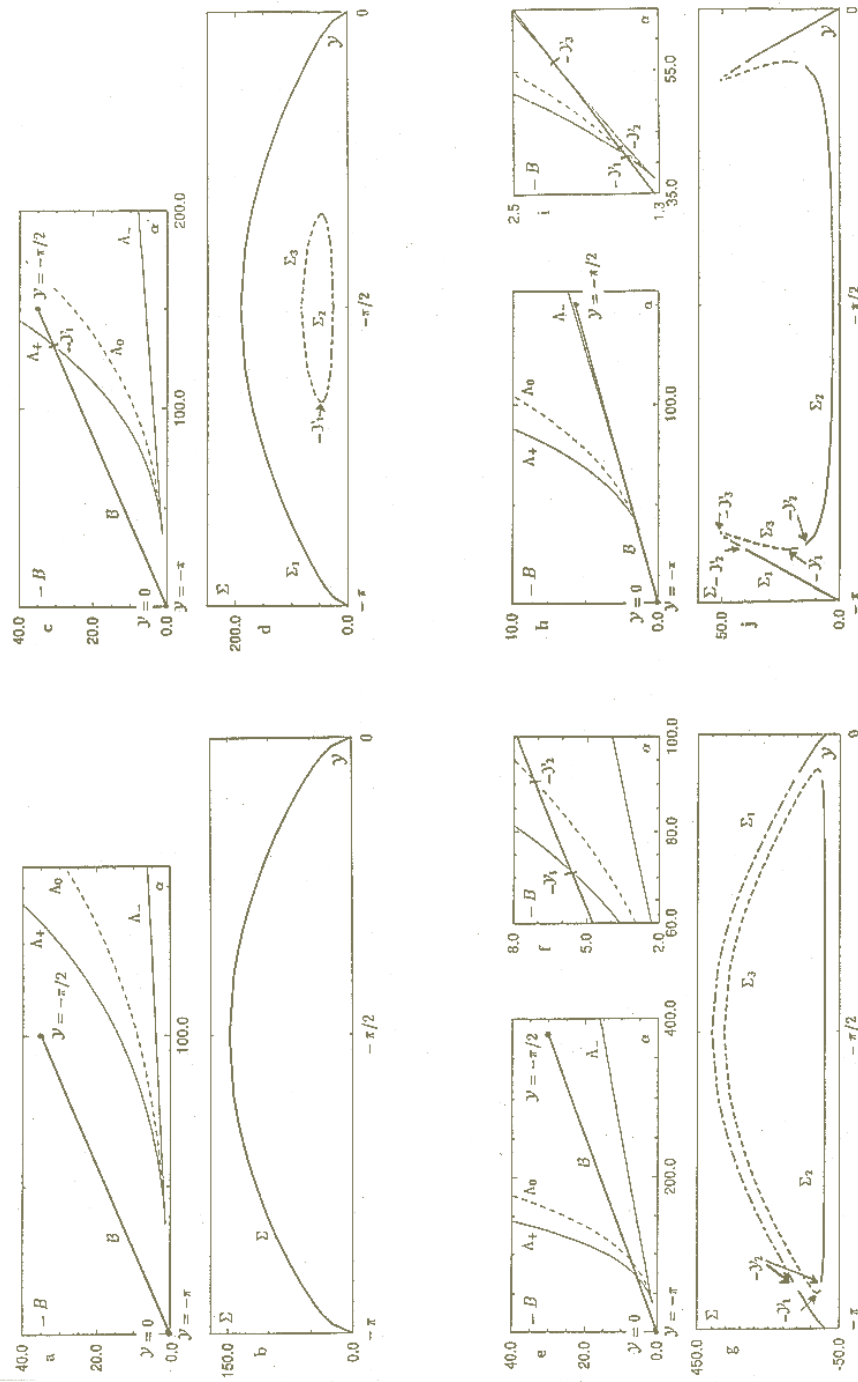


FIGURE 6. *Straight case* (FT1 and FS1): geometrical construction and solution(s)  $\Sigma(Y)$  of the asymptotic equation. Same lines are used as in figure 5. Four sets of parameters are shown:

(a,b)  $a = 100$ ,  $b = 35$  and  $k = 0.2$ . (c,d)  $a = 150$ ,  $b = 35$  and  $k = 0.2$ .

(e-g)  $a = 380$ ,  $b = 30$  and  $k = 0.2$ . (h-j)  $a = 150$ ,  $b = 5.75$  and  $k = 0.2$ .

and 6(j) show an example with the parameters ( $a = 150$ ,  $b = 5.75$ ,  $k = 0.2$ ).

When  $k \rightarrow 0$ ,  $\Lambda_-$  tends to merge with the horizontal axis  $b = 0$ ,  $\Lambda_+$  becomes a cubic curve of  $\alpha$ , and the intersection point between  $\Lambda_-$  and  $\Lambda_+$  moves to the origin, as found by Thual & McWilliams (1992) from their numerical experiments. In this limit, multiple equilibria are globally defined in the domain provided the line representative of the forcing is entirely included in the domain delimited by  $\Lambda_-$  and  $\Lambda_+$ .

#### 4.4. The cubic shape forcing (FT2 and FS1)

Here, the forcing functions are  $F_T(ky) = -2 \int_{-\pi/k}^y k \sin^{1/3}(ks) ds / \int_{-\pi/k}^0 k \sin^{1/3}(ks) ds$  and  $F_S(ky) = \cos(ky)$ . The relation between  $\alpha$  and the latitude  $\mathcal{Y} = ky$  is more complicated than in the previous cases since  $\alpha = -2 \sin^{1/3}(\mathcal{Y}) / \int_{-\pi}^0 \sin^{1/3}(Y) dY$ . The parametric curve representative of the surface forcing (figure 7b) is expressed with the *cubic* form  $-B \propto -(b/a^3) \alpha^3$ , which explains the choice of the complex expression for FT2. It is swept across twice for a hemisphere.

Figure 7(a) compares the temperature forcing profiles  $T(y, 0) = 488 \times \text{FT2}(ky)$  and  $T(y, 0) = 380 \times \text{FT1}(ky)$  of, respectively, the *cubic* and *straight* cases, which share, otherwise, the same FS1 salinity forcing. The relation between the magnitudes (488 and 380) of the thermal forcings has been chosen such that the two profiles have the same slope at  $\mathcal{Y} = \pm\pi/2$ . They are obviously very close one to each other, except around the poles and the equator. The differences between the two forcings at these latitudes generate significant differences in the corresponding asymptotic solutions.

The geometric constructions for the two surface forcings [ $380 \times \text{FT1}(ky)$ ,  $40 \times \text{FS1}(ky)$ ] and [ $488 \times \text{FT2}(ky)$ ,  $40 \times \text{FS1}(ky)$ ] are portrayed in figure 7(b), for an aspect ratio  $k = 0.2$  and the whole domain  $\mathcal{Y} \in [-\pi, \pi]$ . While the surface forcings are similar, the two curves  $\mathcal{B}$  are very different. In the *straight* case (FT1),  $\mathcal{B}$  crosses successively  $\Lambda_+$  and  $\Lambda_0$  (see case iii, § 4.3) while, applying the *cubic* forcing (FT2),  $\mathcal{B}$  crosses only  $\Lambda_-$ . In this last case, the initial branch of solution remains stable on the whole basin, while the two equilibria appearing when  $\mathcal{B}$  crosses  $\Lambda_-$  at  $\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_1$  stay respectively metastable and unstable on their definition domain, which is symmetrical about the mid-hemisphere.

The associated solutions are displayed in figure 7(c) (*straight* case) and figure 7(d) (*cubic* case). In the *straight* case, the globally defined solution is the salinity-driven one (characterized by higher values of  $\Sigma$ , the meridional gradient of the depth-averaged salinity), while in the *cubic* case, it is the thermally driven one. This discussion is continued in § 7.3, where the numerical solutions associated to the two sets of surface forcing are compared.

Considering the stability of the solutions obtained in the *cubic* case, one could think that the globally defined solution is the only one that might be observed. But we recall here, that the terms ‘stable’ and ‘metastable’ have just been chosen to distinguish the absolute minimum of the potential from its local minimum. Here, the criterion to determine whether a locally defined solution can be observed or not, is also linked to the width of its definition domain, as will be discussed in § 6.2. In the example displayed in figure 7(d), the metastable solution exists on a ‘large’ part of the box and is certainly observable.

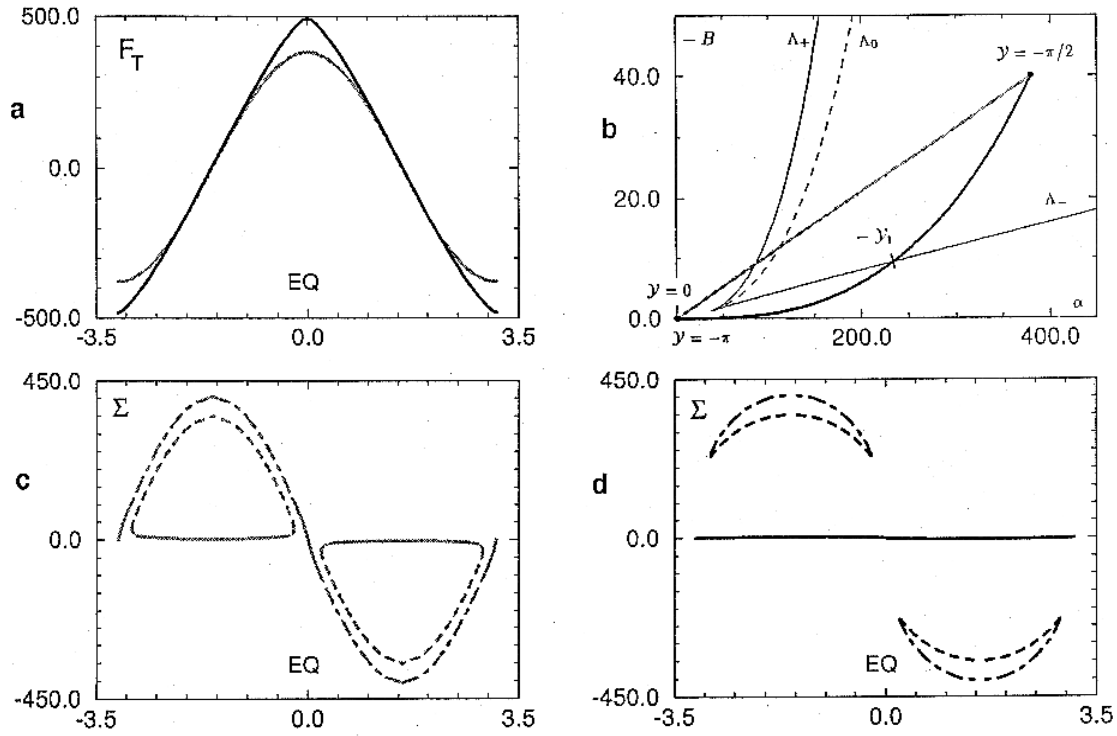


FIGURE 7. (a) Surface temperature forcing  $380 \times \text{FT1}$  (grey) (*straight* case) and  $488 \times \text{FT2}$  (dark) (*cubic* case).

(b) Geometrical construction with the forcing and parameters  $k = 0.2$ ,  $40 \times \text{FS1}$ ,  $380 \times \text{FT1}$  (*straight* case, grey) and  $k = 0.2$ ,  $40 \times \text{FS1}$ ,  $488 \times \text{FT2}$  (*cubic* case, dark).

(c) Asymptotic solutions  $\Sigma(\mathcal{Y})$  in the *straight* case.

(d) Asymptotic solutions  $\Sigma(\mathcal{Y})$  in the *cubic* case.

Same lines are used as in figure 5.

## 5. Numerical simulations for the *loop* case (FT1 and FS2)

We recall that the numerical results obtained in this case are presented in figure 2 and the geometrical construction is explained in figure 5. Figure 8, 9 and 10 show some comparisons between numerical and asymptotic results, which are detailed below.

### 5.1. Structure of the solutions

Figure 2 presents the equilibria obtained with the forcing profiles FT1 and FS2 and the parameters ( $a = 200$ ,  $b = 40$ ,  $k = 0.2$ ). For each equilibrium, the temperature and salinity fields have a similar vertical structure, which is almost homogeneous, as predicted by the asymptotic analysis.

The observed equilibria can be analysed by comparison with the asymptotic solutions. In figure 8(a) the solutions of the asymptotic equation are displayed on the whole domain  $\mathcal{Y} \in [-\pi, \pi]$  as thin lines; bold lines have been chosen to represent the latitudinal gradients  $\Sigma_{num}$  of the depth-averaged salinity, calculated for the numerical equilibria in figure 2. In figure 8(b), similar curves are obtained for the parameter set ( $a = 180$ ,  $b = 20$ ,  $k = 0.1$ ). We use the notation  $-\mathcal{Y}_1$ ,  $-\mathcal{Y}_2$ ,  $-\mathcal{Y}_3$  for the characteristic latitudes and  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$  for the theoretical solutions, as defined in figure 5(c).

The observed stationary fronts (figure 2b and 2c) correspond to discontinuities of the salinity field; their signatures are approximatively Dirac functions of the salinity gradient  $\Sigma_{num}$  (figure 8). In the vicinity of the fronts, boundary layers develop; they are visible in figure 8(a) and 8(b). The width of the boundary layers obviously decreases when  $k$  is decreased; the fronts at mid-hemispheres go to Dirac functions of the variable  $\Sigma_{num}$ . In the boundary layers, the slow  $y$ -dependence hypothesis is not relevant anymore, and the asymptotic expansion is not valid.

In the case of the thermally driven circulation (TH, figure 2a),  $\Sigma_{num}$  (figure 8, bold dashed line) stays very close to the stable solution  $\Sigma_1$  between the pole and the latitude  $-\mathcal{Y}_2$ , and symmetrically with respect to the equator. On the interval  $[-\mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_2]$ , a boundary layer develops and connects the two branches of  $\Sigma_1$ . The asymptotic analysis is not valid in such a boundary layer.

Fronts connecting the  $\Sigma_1$  and  $\Sigma_2$  solutions appear in the equilibrium exhibiting four cells of circulation (4C, figure 2b). The topology of this equilibrium thus follows the scheme predicted by the asymptotic analysis. Near the poles, the solution  $\Sigma_{num}$  (figure 8, bold dot-dashed line) is close to the single asymptotic solution  $\Sigma_1$  and, in both hemispheres, jumps through a front on the asymptotic solution  $\Sigma_2$  which is defined and stable close to the equator.

The slighter discontinuity observed at the equator ( $\mathcal{Y} = 0$ ) is not predicted by the asymptotic equation. It corresponds to a pinching of the streamlines (figure 2b). The narrowing of downwelling regions in the ocean has been addressed by Stommel (1962) at high values of the forcing. Here, the pinching phenomenon occurs at low values of the forcing.

The asymmetric circulations (A2C, figure 2c and its reflection with respect to the equator) are composed according to the ‘superposition principle’ (see § 2.4). Indeed,  $\Sigma_{num}$  (figure 8,

grey solid line) merges with the  $\Sigma_{num}$  branch of the TH solution on the most important part of one hemisphere and with the  $\Sigma_{num}$  branch of the four-celled solution on a large part of the other hemisphere. A large boundary layer develops and connects the two solutions across the equator.

Comparing results obtained with  $k = 0.2$  (figure 8a) and  $k = 0.1$  (figure 8b), we observe that the agreement between  $\Sigma_{num}$  and the asymptotic prediction improves when the aspect ratio is decreased.

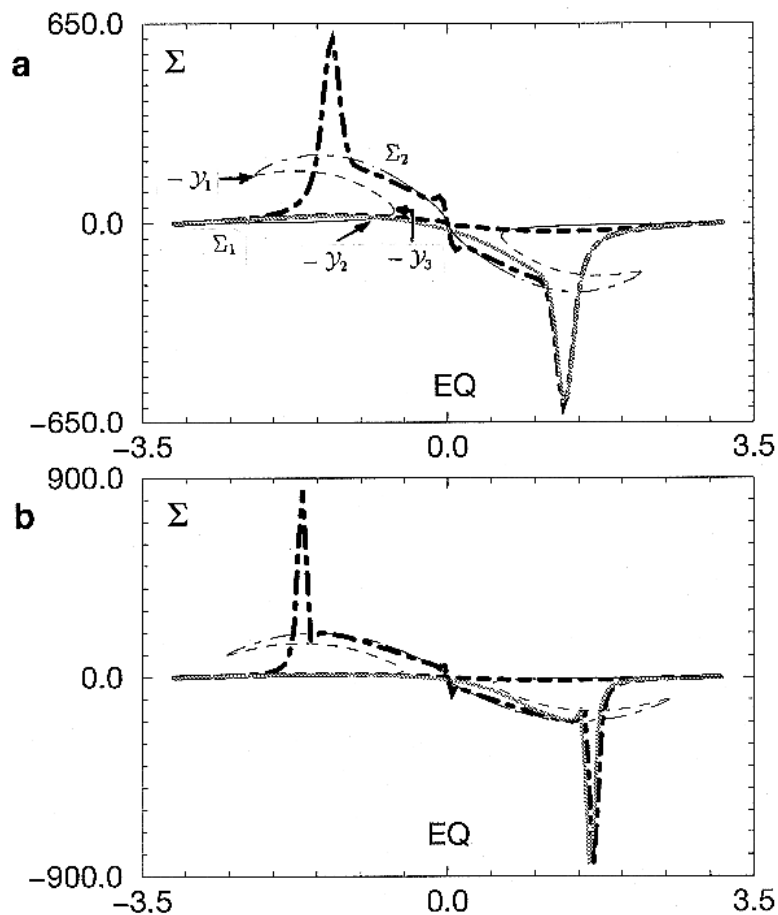


FIGURE 8.  $\Sigma(Y)$  in the *loop* case (FT1 and FS2). Theoretical solutions are thin lines: stable (——), metastable (— · — · —) and unstable (---) branches of solution. Numerical solutions are bold lines: TH (----), 4C(— · — · —) and A2C (grey solid line).

(a)  $a = 200$ ,  $b = 40$  and  $k = 0.2$ .

(b)  $a = 180$ ,  $b = 20$  and  $k = 0.1$ .



## 5.2. Further validation of the asymptotic equations

We compare the locations of the numerically observed fronts to the locations predicted by the geometric construction. For the equilibria presented in figure 2, the numerical mid-latitude fronts are located at  $\mathcal{Y} = -0.44\pi$  in the first hemisphere, while the characteristic intersections of the geometric construction are  $-\mathcal{Y}_1 = -0.70\pi$ ,  $-\mathcal{Y}_2 = -0.27\pi$  and  $-\mathcal{Y}_3 = -0.18\pi$ . The numerical location of the fronts is thus between  $-\mathcal{Y}_1$  and  $-\mathcal{Y}_2$ . This result has been observed in all our simulations; the position of the fronts exhibits a maximal departure of 20% from the mid-value  $-(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)/2$ . If the asymptotic equation does not predict accurately the frontal location, the observed fronts are always located in the domain of existence of multiple asymptotic solutions. The poor agreement between the numerical and the predicted positions of the fronts could be attributed to the relatively large aspect ratio used in numerical simulations, or the fact that the metastability concept is not rigorously defined in this problem.

Different diagnostics applied to the numerical results are now detailed in order to validate the asymptotic equations.

First, the latitudinal gradient of the depth-averaged numerically computed temperature  $\Theta_{num}$  is compared to the equivalent asymptotic field at the first order, which is  $\alpha$ . For the three equilibria displayed in figure 2,  $\Theta_{num}$  (not shown) exhibits values almost half those of  $\alpha$  in the range of latitudes far from the fronts. Thus, the asymptotic equality between the gradient of temperature at the first order and its forcing is not fulfilled by the numerical results. The asymptotic prediction for temperature at the second order does not give better results.

In figure 9(a), 9(b) and 9(c),  $\bar{\Psi}_{num}$ , the depth-averaged numerical streamfunction is drawn as grey lines for each of the equilibria displayed in figure 2. It is compared to the depth-averaged asymptotic streamfunction at the first order (see equation (16)), calculated by two methods. For the bold curves, the numerical temperature gradient  $\Theta_{num}$  is used  $[\bar{\Psi}_1(\Sigma_{num}, \Theta_{num}) = (\Sigma_{num} - \Theta_{num}) \int_{-1}^0 P(z) dz = \frac{1}{120} (\Sigma_{num} - \Theta_{num})]$ , while for the thin curves the asymptotically predicted value  $\alpha$  is used  $[\bar{\Psi}_1(\Sigma_{num}, \alpha) = \frac{1}{120} (\Sigma_{num} - \alpha)]$ .

Since the Prandtl number  $\sigma$  is chosen infinite,  $\bar{\Psi}_{num}$  satisfies  $\nabla^4 \bar{\Psi}_{num} = (\partial^4 \bar{\Psi}_{num} / \partial y^4 + 2\partial^4 \bar{\Psi}_{num} / \partial y^2 \partial z^2 + \partial^4 \bar{\Psi}_{num} / \partial z^4) = (\Sigma_{num} - \Theta_{num})$ , and  $\bar{\Psi}_1(\Sigma_{num}, \Theta_{num})$  results from  $\partial^4 \bar{\Psi}_1 / \partial z^4 = (\Sigma_{num} - \Theta_{num})$ . Thus, the difference between this two values corresponds only to the influence of the terms in  $\partial / \partial y$  in the bi-Laplacian of  $\Psi$ . Obviously, the two curves almost merge for the three equilibria (figure 9) and the asymptotic hypothesis of a slow  $y$ -dependence is valid for the viscosity term.

The discrepancy between  $\bar{\Psi}_1(\Sigma_{num}, \Theta_{num})$  and  $\bar{\Psi}_1(\Sigma_{num}, \alpha)$  is a measure of the departure of the numerical temperature gradient from its asymptotic prediction at the first order. The asymptotic value  $\alpha$  mainly overestimates the temperature gradient and, thus, its effect on the circulation. In  $\bar{\Psi}_1(\Sigma_{num}, \alpha)$ , the thermally driven loops are intensified, compared to the numerical values, while the salinity-driven loops are reduced in magnitude.

The  $\chi$ -function (defined in equation (18) § 3.3) is now calculated, using  $\Sigma_{num}$  and  $\Theta_{num}$  as variables. Figure 10 presents the normalized function  $\chi(\mathcal{Y}, \Theta_{num}, \Sigma_{num})/B_{max}$  for the three equilibria displayed figure 2, where  $B_{max}$  is the maximum value of  $B$ . The  $\chi$ -function is the

right-hand member of the asymptotic equation and is required to vanish for a theoretical equilibrium. We see that, except at the fronts, the curves  $\chi(\mathcal{Y}, \Theta_{num}, \Sigma_{num})/B_{max}$  exhibit departures from zero of less than 0.5. This gives a measure of the distance between asymptotic and numerical solutions. While unpredicted by the asymptotic theory, the ‘pinching discontinuity’ (see § 5.1) in the 4C solution appears as a singularity of  $\chi(\mathcal{Y}, \Theta_{num}, \Sigma_{num})$  even more important than the ones corresponding to the asymptotically predicted fronts of the solutions 4C and A2C.

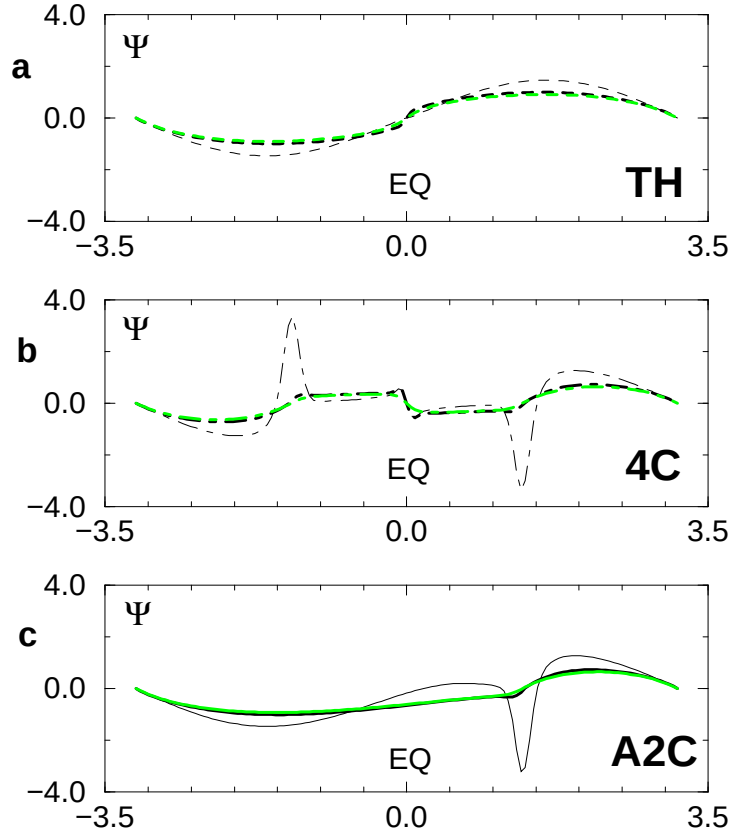


FIGURE 9. Depth-averaged streamfunctions for the *loop* forcing (FT1 and FS2) and the parameters  $a = 200$ ,  $b = 40$  and  $k = 0.2$ . Grey lines:  $\bar{\Psi}_{num}$ . Dark bold lines:  $\bar{\Psi}_1(\Sigma_{num}, \Theta_{num})$ . Dark thin lines:  $\bar{\Psi}_1(\Sigma_{num}, \alpha)$ . (a) TH solution. (b) 4C solution. (c) A2C solution.

To summarize this part, the asymptotic theory gives a relatively good prediction of the numerical solutions far from the fronts. In a large part of the domain, the different  $\Sigma_{num}$  can reasonably be approximated by the solutions of the asymptotic equation. But, the asymptotic theory does not determine accurately the position of the fronts and the temperature solutions, for the values of the aspect ratio  $k$  explored. Moreover, a front appears at the equator in the

4C circulation, which is not asymptotically predicted. It certainly results from the pinching effect of downwelling.

The prediction is better as  $k$  is decreased. In particular, the boundary layers around the fronts, in which the asymptotic analysis is not valid, become thinner. With our numerical analysis, it is not possible to determine whether the fronts positions tend to merge to the locations of the pseudo-stability exchanges when  $k \rightarrow 0$ . Numerical simulations with aspect ratios lower than  $k = 0.1$  would be needed but are very costly.

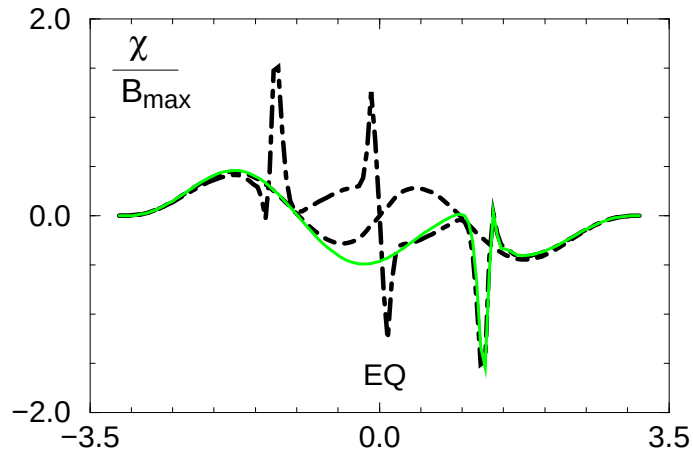


FIGURE 10. Function  $\chi [\mathcal{Y}, \Theta_{num}(y), \Sigma_{num}(y)]$  displayed following  $\mathcal{Y}$  in the *loop* case (FT1 and FS2) with  $a = 200$ ,  $b = 40$  and  $k = 0.2$ . TH solution ( - - - ), 4C solution ( — - - — ) and A2C solution (grey solid line).

## 6. Numerical simulations in the *straight* case (FT1 and FS1)

The numerical results obtained in this case are presented in figure 3. With the set of parameters used here, the topology of the solutions corresponds to the third case discussed in § 4.3. The asymptotic solutions are displayed in figure 6(g). Figures 11 to 15 show some comparisons between numerical and asymptotic results, which are explained below.

### 6.1. Structure of the solutions

The equilibria obtained with the forcing functions FT1 and FS1 and the parameters ( $a = 380$ ,  $b = 30$ ,  $k = 0.2$ ) are displayed in figure 3. Numerically, multiple equilibria are observed, while only one theoretical solution is defined on the whole domain. Indeed, in the vicinity of  $\sin(\mathcal{Y}) = 0$ , boundary layers can develop and extend a locally defined asymptotic solution on the latitudinal intervals, in which it is not defined. Figure 11 presents a comparison between the solutions of the asymptotic equation (thin lines) and  $\Sigma_{num}$  (bold lines) computed from the three equilibria of figure 3. The good agreement between asymptotic predictions and numerical observations is obvious in figure 11. The notation  $-\mathcal{Y}_1$ ,  $-\mathcal{Y}_2$  for the characteristic latitudes and  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$  for the theoretical solutions are defined in figure 6(g). We introduce now an important notation, which is  $\delta = 2(\pi - \mathcal{Y}_2)$ , the distance between the two stable branches of the  $\Sigma_2$  solution around the equator. Because of symmetry across the mid-hemisphere the distance between the pole and  $-\mathcal{Y}_2$  is also  $\delta/2$ .

The set of parameters corresponding to figure 11 is such that the *straight* line representative of the forcing in the geometric construction is above the ‘zero-circulation line’ (see § 4.3 for definition). Following the asymptotic theory, the initial solution  $\Sigma_1$  is thus a salinity-driven one. Indeed,  $\Sigma_{num}$  (figure 11, bold dot-dashed line) computed from the SA solution (figure 3b) is very close to the theoretical globally defined solution, except on a very thin belt of latitudes around the equator. This singularity can be attributed to the pinching effect of downwelling, already mentioned in § 5.1.

In the vicinity of the poles, the thermally driven circulation (TH, figure 3a) exhibits a  $\Sigma_{num}$  profile (figure 11, bold dashed line) which follows the asymptotic solution  $\Sigma_1$ . When the  $\Sigma_2$  solution becomes stable, the TH circulation jumps to  $\Sigma_2$ . Polar boundary layers connect the solutions  $\Sigma_1$  and  $\Sigma_2$  to each other. The distance of such a polar front to the pole is of order  $\delta/2$ . When  $\delta/2$  is large enough, counter-rotating cells are observed (not shown) and are explained by our present analysis. Near the equator, a boundary layer of size  $\delta_E \sim \delta$  connects the two local branches of the  $\Sigma_2$  solution to each other. This boundary layer is visible as squeezed streamlines at the equator in figure 3(a).

The pole-to-pole equilibria (PP, figure 3(c) and its reflection with respect to the equator) are the combination of the TH circulation in one hemisphere and the SA circulation in about half of the other hemisphere. The  $\Sigma_{num}$  representation (figure 11, grey solid line) shows that the two branches are connected together by a large boundary layer, developing in the hemisphere with the less intense circulation. The ‘superposition principle’ (see § 2.4) is respected, but the limit between the two different parts does not appear exactly at the equator.

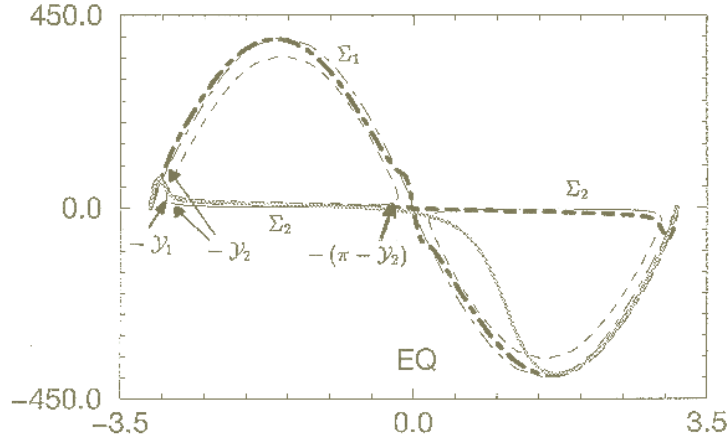


FIGURE 11.  $\Sigma(\mathcal{Y})$  with the *straight* forcing (FT1 and FS1) and the parameters  $a = 380$ ,  $b = 30$  and  $k = 0.2$ . Theoretical solutions are thin lines: stable (——), metastable (— · — · —) and unstable (---) branches of solution. Numerical solutions are bold lines: TH (---), SA(— · — · —) and PP (grey solid line).

## 6.2. Domain of existence of multiple equilibria

We have obtained a great number of numerical solutions with the forcing profiles FT1 and FS1 (*straight*) and the parameters  $k = 0.2$ ,  $Le = 1$  and  $\sigma = \infty$ . Low horizontal resolution with only 33 points for both hemispheres has been used for this exploration. The domains of existence of the different circulations TH, SA and PP are located. Figure 12 shows the five different regions that can be identified in the plane  $(a, b)$ . With the present surface forcing, this plane is equivalent to the plane  $(\alpha, -B)$ . In these domains, from the bottom up, there exists only one solution TH, two solutions TH and PP, three solutions TH, PP and SA, two solutions SA and PP and, finally, only one solution SA.

Detailed numerical experiments for the fourth case of § 4.3, corresponding to figure 6(j), could exhibit multiple TH equilibria. We have not investigated this case.

The curves  $\Lambda_-$ ,  $\Lambda_0$  and  $\Lambda_+$  are displayed as bold lines in figure 12. The part of the plane supporting numerical multiple equilibria of type TH/SA/PP is located in the domain bounded by the curves  $\Lambda_0$  and  $\Lambda_-$ , but is really narrower. The lower branch of the domain is located very close to the curve  $\Lambda_-$  when  $a$  is less than 300, but moves progressively away when  $a$  increases. The upper branch of the numerical domain is far from  $\Lambda_0$ . We now use the above boundary layer analysis to explain these differences.

Multiple equilibria are only studied with forcing parameters corresponding to the third case of § 4.3 and the figure 6(g). In this case, the globally defined solution is a salinity-driven one. A TH solution is observed when the two branches of  $\Sigma_2$  (see figure 11 and § 6.1) are connected to each other across the equator by a boundary layer of length  $\delta_E \sim \delta$ . The numerical simulations

show that the TH solution can be observed only if  $\delta$  is small enough. When  $\delta$  is greater than a critical value  $\delta_{max}$ , the boundary layers cannot join the two branches across the equator and only the SA solution is observed numerically. Using the geometric construction detailed in § 4, we have estimated this critical value of  $\delta$  to be approximatively equal to  $\delta_{max} = 0.15 \times 2\pi$ , i.e. 30 % of one hemisphere.

Inversely, if  $\delta$  is too small, the SA solution is only stable on a very small domain close to the poles and around the equator and it will not be observed, although it is the globally defined one. In figure 12, the right-hand part of the plane supports only a TH solution, while the *straight* line representative of the surface forcing is located above the ‘zero-circulation’ line. There,  $\delta/2$  is so small that the solution always jumps from the zero boundary condition to the solution  $\Sigma_2$ . This happens when the distance needed to connect the two branches of TH circulation is less than about  $\delta_{min} = 0.04 \times 2\pi$ , i.e. 8 % of one hemisphere.

The criterion to observe multiple equilibria is then a combination of the pseudo-stability features of the solutions and the width of their definition domains.

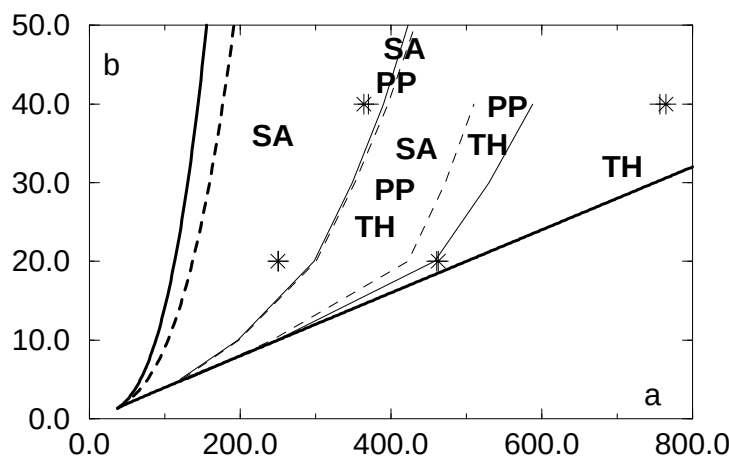


FIGURE 12. Domain of existence of multiple equilibria in the plane  $(a, b)$  with the *straight* forcing (FT1 and FS1) and  $k = 0.2$ . Bold lines: curves calculated from the asymptotic theory. Thin lines: delimiting curves computed with a low horizontal resolution (33 points). Points of delimiting curves computed with a higher resolution (129 points) are indicated by \* and +.

To estimate the influence of the horizontal resolution, we have used a four times greater resolution (129 points for both hemispheres) and have located some points of the curves delimiting the regions of existence of numerical multiple equilibria. They are indicated by stars (delimiting regions with only one equilibrium from regions with two equilibria) and plus signs (delimiting regions with two equilibria from the region with three equilibria) in figure 12. We note that stars and plus are almost superposed, which indicates that the domains

of two and three equilibria merge when the resolution increases. The ‘superposition principle’ is perfectly satisfied with a high horizontal resolution. The domain supporting numerical multiple equilibria becomes wider and closer to the asymptotically predicted domain when the resolution is increased. Wider boundary layers can exist and connect two branches of the TH solution, and the SA solution can be observed even if it is stable on a range of latitudes smaller than 8 % of one hemisphere.

With increased resolution, the domain of numerical multiple solutions could become larger. The differences between the domains in figure 12 suggest that  $\delta_{min}$  could be considerably reduced by increasing the resolution. But the threshold value  $\delta_{max}$  seems to be less dependent on resolution. In spite of increasing the resolution, it would not be possible to join two branches of solution across the equator with a ‘too large’ boundary layer.

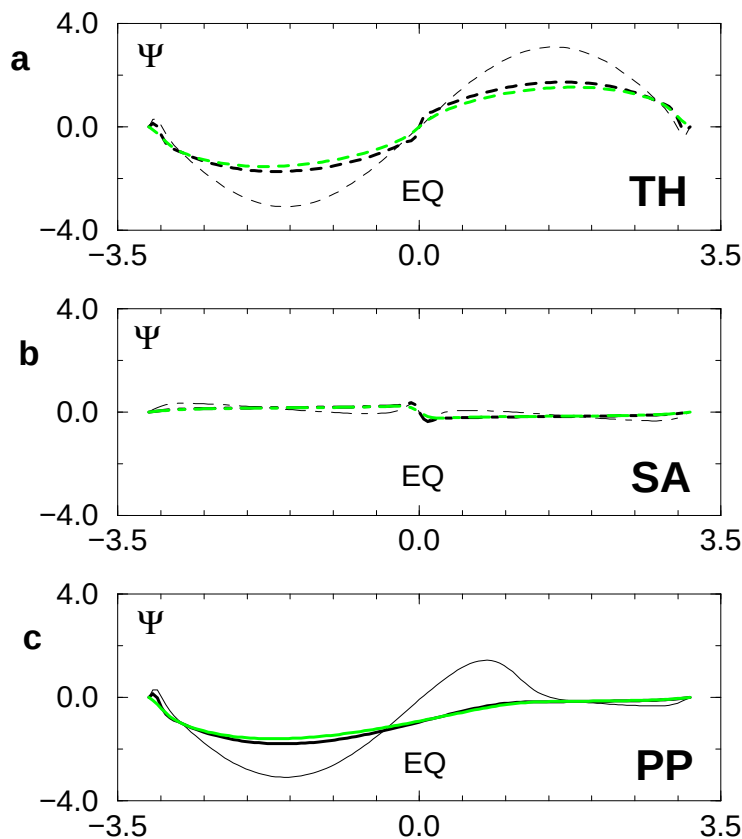


FIGURE 13. Depth-averaged streamfunctions for the *straight* forcing (FT1 and FS1) and the parameters  $a = 380$ ,  $b = 30$  and  $k = 0.2$ . Grey lines:  $\bar{\Psi}_{num}$ . Dark bold lines:  $\bar{\Psi}_1(\Sigma_{num}, \Theta_{num})$ . Dark thin lines:  $\bar{\Psi}_1(\Sigma_{num}, \alpha)$ . (a) TH solution. (b) SA solution. (c) PP solution.

### 6.3. Further validation of the asymptotic equations

The same diagnostics as the ones in § 5.2 are applied here to the numerical results.

The asymptotic value of the gradient of temperature at the two first orders is compared to  $\Theta_{num}$  (not shown) for the three equilibria of figure 3. In the TH circulation,  $\Theta_{num}$  is quite constant on each hemisphere, except close to the latitudes  $\sin(\mathcal{Y}) = 0$  where there are boundary layers and fronts. The asymptotic prediction of  $\Theta_{num}$  at the first order is  $\alpha$ , which is a cosine function and does not represent correctly the profile of  $\Theta_{num}$ . Quantitatively,  $\alpha$  is twice as large as  $\Theta_{num}$  (not shown). At the second order, the asymptotic prediction agrees even less with  $\Theta_{num}$  than  $\alpha$  does. The gradient of depth-averaged temperature for the SA solution is in good agreement with  $\alpha$  and in excellent agreement with the second-order asymptotic gradient of temperature. We note that the  $\Theta_{num}$  field exhibits stronger values in the SA circulation than in the TH circulation. Indeed, the streamfunction of the SA solution is very weak and  $\Theta_{num}$  is strongly dependent on the temperature forcing, while the stronger advection of the TH circulation tends to homogenize horizontally the temperature.

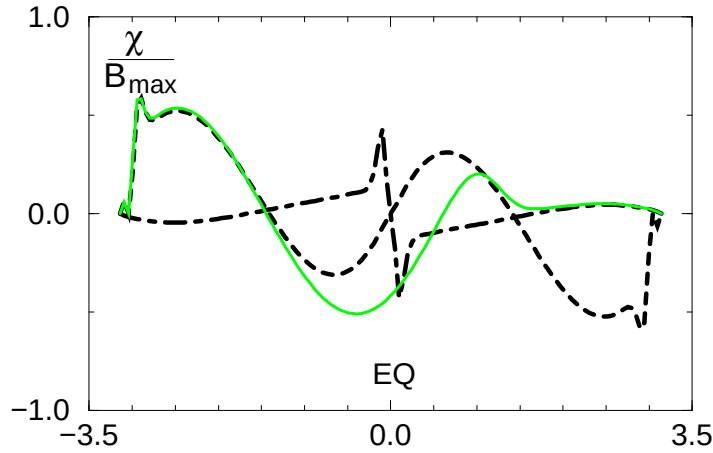


FIGURE 14. Function  $\chi[\mathcal{Y}, \Theta_{num}(y), \Sigma_{num}(y)]$  displayed following  $\mathcal{Y}$  in the *straight* case (FT1 and FS1) with  $a = 380$ ,  $b = 30$  and  $k = 0.2$ . TH solution ( - - - ), SA solution ( — - - — ) and PP solution (grey solid line).

The comparison between the three depth-averaged streamfunctions  $\bar{\Psi}_{num}$ ,  $\bar{\Psi}_1(\Sigma_{num}, \Theta_{num})$  and  $\bar{\Psi}_1(\Sigma_{num}, \alpha)$  gives similar results to the *loop* case (see § 5.2). The different fields are displayed in figure 13 for the three circulations displayed in figure 3.

Figure 14 presents the function  $\chi(\mathcal{Y}, \Theta_{num}, \Sigma_{num})/B_{max}$ , defined in equation (18) § 3.3, for the three equilibria portrayed in figure 3. Here  $B_{max}$  is equal to  $b$ , the magnitude of the salinity forcing. The departures of  $\chi(\mathcal{Y}, \Theta_{num}, \Sigma_{num})/B_{max}$  from zero are less than 60 % for the TH equilibria and less than 20% for the SA equilibria. In the latter case, both  $\Sigma_{num}$



and  $\Theta_{num}$  are close to the asymptotically predicted values; then  $\chi(\mathcal{Y}, \Theta_{num}, \Sigma_{num})$  almost vanishes, as required theoretically, except at the ‘pinching discontinuity’ (see § 5.1).

The function  $\chi(\mathcal{Y}, \Theta_{num}, \Sigma_{num})$  is the sum of three horizontal fluxes of salinity, i.e.  $B$  due to the forcing,  $k^2 \Sigma_{num}$  due to the diffusion and  $C^2(\Theta_{num} - \Sigma_{num})^2 \Sigma_{num}$  due to the advection. These three components are displayed in figure 15 for each equilibrium in figure 3. The forcing flux is, of course, the same for the three circulations.

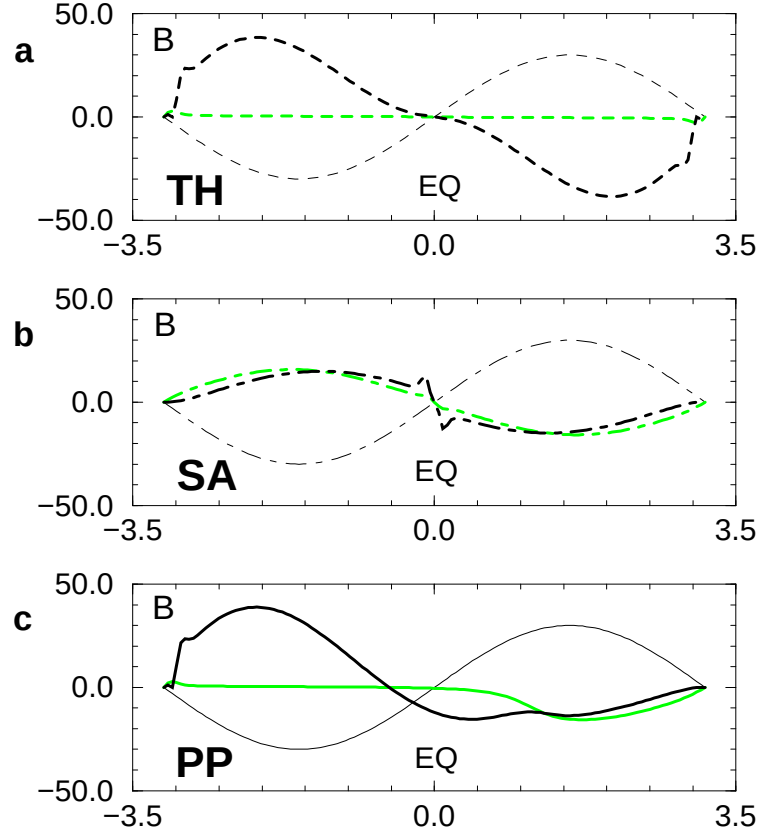


FIGURE 15. Three components of the function  $\chi(\mathcal{Y}, \Theta_{num}, \Sigma_{num})$  in the *straight* case (FT1 and FS1) with  $a = 380$ ,  $b = 30$  and  $k = 0.2$ . Thin lines: forcing salinity flux. Grey bold lines: diffusive salinity flux. Dark bold lines: advective salinity flux. (a) TH solution. (b) SA solution. (c) PP solution.

In the TH circulation, the diffusive flux (figure 15a, grey line) is almost equal to zero in the whole domain, just like  $\Sigma_{num}$ , and the advective flux (figure 15a, bold line) is opposite to and more important than the forcing flux (figure 15a, thin line), except close to the equator. The advection acts against the forcing, because it tends to homogenize horizontally the salinity field ( $\Sigma_{num} \simeq 0$ ). The polar boundary layers are obvious in the advective component.

In the SA circulation, advective (figure 15b, bold line) and diffusive (figure 15b, grey line) fluxes are of similar importance and balance the forcing flux (figure 15b, thin line). The surface transport of salt through advection tends to fight the salinity forcing. The strong influence of the diffusive flux is obvious in the temperature and salinity fields (figure 3b), which are almost vertically homogeneous. This feature favours a stabilization of the water column and, thus, acts against the destabilizing influence of the salinity forcing at the equator.

It is interesting to look at the PP circulation and to observe that the ‘superposition principle’ is valid for both advective and diffusive fluxes, but that the connection between the SA and the TH components does not occur at the same location for both fluxes. The diffusive flux (figure 15c, grey line) of the PP solution is composed of the TH diffusive flux on more than one hemisphere and of the SA diffusive flux on two thirds of the other hemisphere. The boundary layer linking the two components is relatively thin. For the PP advective flux (figure 15c, bold line), a larger boundary layer develops across the equator, leading to a less extended TH component. The boundary layer is wider to connect the TH and SA advective fluxes, because they differ quantitatively more than the diffusive fluxes. The linear diffusive term is easier to connect numerically than the advective term that is third order in  $\Sigma$ .

The numerical solutions (not shown) obtained with a lower aspect ratio ( $k = 0.1$ ) agree even better with the asymptotic predictions.  $\Sigma_{num}$  follows more closely the theoretical solutions, and the regions of boundary layers (TH and PP) or fronts (SA) are thinner. Fronts appear as Dirac functions of  $\Sigma_{num}$ . The function  $\chi(\mathcal{V}, \Theta_{num}, \Sigma_{num})$  is confined to very smaller values (interval of fluctuations five times reduced compared to the case  $k = 0.2$ ). Numerical results with a lower aspect ratio than  $k = 0.1$  have not been obtained.

We can conclude the *straight* case by noticing that the quality of the asymptotic predictions is even more obvious here than in the *loop* case. The depth-averaged salinity  $\Sigma_{num}$  is almost equal to the theoretical solutions of the asymptotic equation, except on very thin belts of latitudes, where boundary layers develop. The agreement between theory and simulations becomes greater when the aspect ratio is decreased. Unfortunately, the temperature structure is not predicted correctly, except for the SA circulation, which is both the globally defined solution and the less intense one. In the SA numerical solution, an unpredicted front exists at the equator due to the pinching effect of downwelling, already mentioned in § 5.1.

## 7. Numerical simulations in the *cubic* case (FT2 and FS1)

The numerical results observed in this case are displayed in figure 4 and the asymptotic solutions presented in figure 7(d). Figure 16 shows asymptotic and numerical solutions of  $\Sigma$ . Figure 17 presents similar curves for a forcing close to the present one, but *straight*.

### 7.1. Structure of the solutions

Applying the forcing profiles FT2 and FS1 and the parameters ( $a = 488$ ,  $b = 40$ ,  $k = 0.2$ ), three equilibria are numerically obtained, which are displayed in figure 4. The SA-type circulation (figure 4b) exhibits fronts at the lateral boundaries. Close to the poles, TH-type cells of circulation develop. Such a cell is observed also at one of the polar boundaries in the asymmetric circulation (figure 4c). Figure 16 shows the asymptotic solutions  $\Sigma$  with these forcing and parameters (thin lines) and  $\Sigma_{num}$  computed for the three observed equilibria (bold lines).

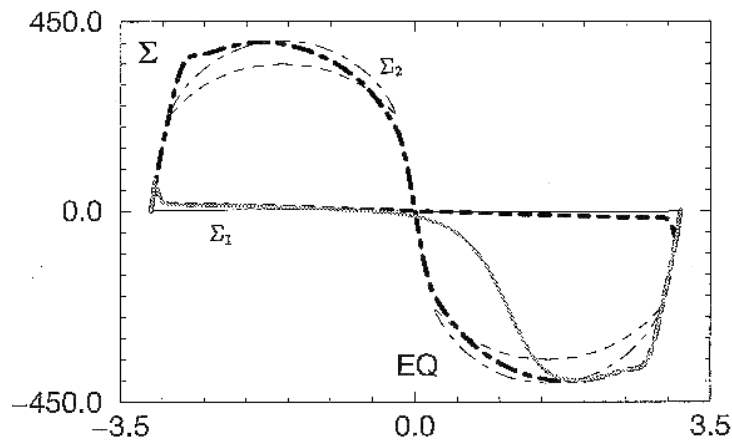


FIGURE 16.  $\Sigma(\mathcal{Y})$  with the *cubic* forcing (FT2 and FS1) and the parameters  $a = 488$ ,  $b = 40$  and  $k = 0.2$ . Theoretical solutions are thin lines: stable (——), metastable (— · — · —) and unstable (---) branches of solution. Numerical solutions are bold lines: TH (---), SA (— · — · —) and PP (grey solid line).

Here, the TH solution (figure 16, bold dashed line) corresponds to the asymptotic globally defined solution. But, close to the poles,  $\Sigma_{num}$  differs from the asymptotic solution. It evolves exactly as in the *straight* case (figure 11), where the TH starts like the global SA solution and jumps after on the local TH branch. This discrepancy between asymptotic and numerical solutions has no obvious explanation. It is as if the *cubic* case were feeling that it is close to the *straight* case in a sense that will be developed below.

The lateral fronts of the SA circulation (figure 4b) are clearly seen and the corresponding  $\Sigma_{num}$  (figure 16, bold dot-dashed line) exhibits a very sharp gradient close to the poles. The transition around the equator between the two local branches happens smoothly through a boundary layer.  $\Sigma_{num}$  is highly asymmetric with respect to the mid-hemisphere. It exhibits stronger departures from the  $\Sigma_2$  theoretical solution than in any previous case of forcing.

Once again, the PP circulation (figure 4c and figure 16, grey solid line) is the juxtaposition of the TH solution in one hemisphere and of the SA equilibria in half of the other one, joined together by a large boundary layer.

### 7.2. Further validation of the asymptotic equations

The same diagnostics as in § 5.2 have been applied to the numerical results. The conclusions are analogous to those obtained in the *straight* case and detailed in § 6.3.

We just note that the shape of  $\Theta_{num}$  in the TH circulation is here correctly approximated by the  $\alpha$ -function (not shown), but its amplitude is half the size. For all the diagnostics concerning the TH circulation, numerical irregularities appear, which correspond to the polar front mentioned above. As previously, the best agreement between asymptotic predictions and numerical results is obtained for the SA-type circulation which is no longer the globally defined one. The agreement comes from the fact that this circulation is the less intense one. Simulations performed with a lower aspect ratio  $k = 0.05$  (not shown) indicate an improvement of the asymptotic predictions, even concerning the temperature related field  $\Theta_{num}$ .

We note that it is possible to obtain three equilibria without any counter-rotating cells at the lateral boundaries with the forcing profiles FT2 and FS1 by increasing the parameter  $b$  or by decreasing  $a$  (for example by using  $a = 488$ ,  $b = 90$  and  $k = 0.2$ ).

### 7.3. Comparison of the three forcings

We compare the results of figure 16, performed in the *cubic* case with  $T(y, 0) = 488 \times \text{FT2}(ky)$  and  $\partial S(y, 0)/\partial z = 40 \times \text{FS1}(ky)$ , with the ones of figure 17, obtained in the *straight* case with  $T(y, 0) = 380 \times \text{FT1}(ky)$  and the same salinity forcing. The two temperature forcings are displayed in figure 7(a) and look similar except in the vicinity of  $\sin(\mathcal{Y}) = 0$ .

With the *straight* forcing, three equilibria (not shown) are obtained. The salinity-driven circulation extends in the whole domain, while the thermally driven one exhibits counteracting cells delimited by stationary fronts close to the lateral boundaries. By looking at the geometric constructions portrayed in figure 7(c) (*straight*) and figure 7(d) (*cubic*), one can see that the numerical equilibrium extended over the whole domain corresponds, in both cases of forcing, to the asymptotic globally defined solution.

The comparison between the solutions  $\Sigma$  of the asymptotic equation and the  $\Sigma_{num}$  calculated for the three equilibria obtained with the *straight* forcing is presented in figure 17. The counter-rotating cells and the stationary fronts of the TH solution are obvious in the figure. The agreement between theory and simulations is better for the *straight* forcing than for the *cubic* case.

Let us note that a comparison between figure 11 and figure 17 reveals that a change in the surface forcing affects the solutions mostly in the vicinity of the latitudes such that  $\sin(\mathcal{Y}) = 0$ . Indeed, the corresponding simulations have been performed with the same surface forcing and parameters, except the salinity forcing magnitude which is equal to  $b = 30$  in figure 11 and to  $b = 40$  in figure 17. The solutions are almost unchanged, except at the equator and at the poles.

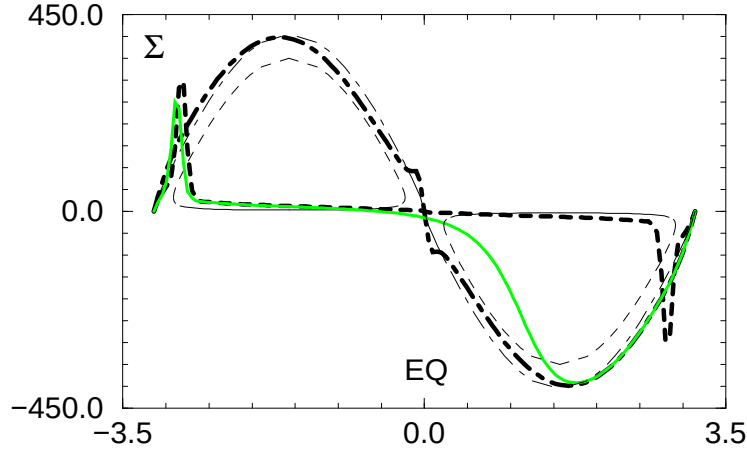


FIGURE 17.  $\Sigma(\mathcal{Y})$  with the *straight* forcing (FT1 and FS1) and the parameters  $a = 380$ ,  $b = 40$  and  $k = 0.2$ . Theoretical solutions are thin lines: stable ( ——— ), metastable ( - - - - ) and unstable ( - - - - ) branches of solution. Numerical solutions are bold lines: TH ( - - - - ), SA ( — - - - ) and PP (grey solid line).

The similarity in the behaviour of the TH solutions underlines the proximity of the *cubic* and *straight* forcings. Even if the asymptotic topology of the solutions differ for the two cases, they are two unfoldings of a same degenerate situation, which would correspond to the  $k = 0$  limit of the asymptotic expansion with three globally defined solutions. If  $k$  decreases faster than scaled in the expansion presented in § 3 (for example  $k = \epsilon^2 k_2$ ), the asymptotic solutions must satisfy  $\chi_2[y, \alpha(y), \Sigma(y)] = B(y) + C^2(\alpha - \Sigma)^2\Sigma = 0$ . The diffusive horizontal flux of salinity does not appear any longer in this equation. Thanks to this simplification of the problem three equilibria, defined in the whole box can be found for various choices of surface forcing (e.g. *cubic*) and a suitable domain in the  $(a, b)$ -plane. The theoretical domain where multiple equilibria exist is delimited by the horizontal axis and a cubic curve in the plane  $(a, b)$ . The topological structure of the asymptotic solutions  $\Sigma$  then looks like that presented in figure 7(c) and 7(d), but the three solutions meet at the equator and at the poles. In this case the ‘superposition principle’ is exactly verified in the formation of an asymmetric solution.

The *loop* forcing is a third unfolding of the same degenerate situation. This forcing seems rather different from the two other surface forcings, because it is not symmetric with respect to the mid-hemisphere. But, as in the *straight* and the *cubic* cases, multiple globally defined equilibria exist while they are not predicted by the asymptotic expansion. Comparing figure 5(c) to figures 7(c) and 7(d), one can easily see that the *loop* case is topologically close to the other forcings and comes from the same degenerate situation in the  $k = 0$  limit of the asymptotic expansion.

## 8. Conclusion

In this article, we have compared the numerical results obtained with a two-dimensional Boussinesq model of the thermohaline convection and the solutions of an asymptotic equation in the limit of a small aspect ratio. The validation of the asymptotic approach has been presented using three different surface forcing profiles. These forcings have been chosen in order to exhibit different dynamical behaviours, such as the formation of thermohaline fronts and the existence of multiple equilibria. For these forcings, called *loop*, *straight* and *cubic*, we have presented numerical results, asymptotic solutions, and comparisons between them.

The asymptotic analysis is found to be a very simple and powerful tool to predict the topology of the solutions. All the topological structures studied (*loop*, *straight*, *cubic*) appear to be unfoldings of a same degenerate situation where three equilibria are globally defined for a vanishing aspect ratio.

The asymptotic theory is only valid outside the boundary layers, which develop in the vicinity of the fronts connecting two different branches of solutions. A two-dimensional boundary layer analysis would be needed in order to compute the inner solutions. We have also observed discontinuities which are not described by the asymptotic equation. They correspond to a pinching of the streamlines similar to the narrowing of downwelling addressed in other studies (Stommel 1962).

Considering the results presented here, it makes sense to apply this approach to more complex models of the thermohaline circulation. The introduction of new parametrizations, such as surface momentum forcing or rotation, in a two-dimensional model could be tested through the asymptotic analysis. Moreover, the reduction of a three-dimensional fluid model to two-dimensional asymptotic equations can be addressed with this approach.

Since multiple equilibria and fronts are observed in a great variety of models, from the most idealized to the fully coupled climate models, it is of importance to understand the mechanisms generating them. While very crude in the context of realistic studies, the use of simple process models and the development of analytical tools, such as the one validated here, are essential for a better understanding of these mechanisms.

This work was funded by the European Communities under contract MAST-CT92-0034. The authors are grateful to Paola Cessi for many fruitful scientific discussions.

## REFERENCES

- BROECKER, W. S., PETEET, D. M. & RIND, D. 1985 Does the ocean-atmosphere system have more than one stable mode of operation. *Nature* **315**, 21-26.
- BRYAN, F. 1986 High-latitude salinity effects and interhemispheric thermohaline circulations. *Nature* **323**, 301-304.
- CESSI, P. & YOUNG, W. R. 1992 Multiple equilibria in two-dimensional thermohaline circulation. *J. Fluid Mech.* **241**, 291-309.
- DIJKSTRA, H. A. & MOLEMAKER, M. J. 1997 Symmetry breaking and overturning oscillations in thermohaline driven flows. *J. Fluid Mech.* **331**, 169-198.
- KENNETT, J. P. & STOTT, L. D. 1991 Abrupt deep-sea warming, palaeoceanographic changes and benthic extinctions at the end of the Palaeocene. *Nature* **353**, 225-229.
- MAIER-REIMER, E., MIKOLAJEWICZ, U. & HASSELMANN, K. 1993 Mean Circulation of the Hamburg LSG OGCM and its sensitivity to the thermohaline surface forcing. *J. Phys. Oceanogr.* **23**, 731-757.
- MANABE, S. & STOUFFER, R. J. 1988 Two stable equilibria of a coupled ocean-atmosphere model. *J. Climate* **1**, 841-866.
- MAROTZKE, J. 1990 Instabilities and multiple equilibria of the thermohaline circulation. Ph.D. Thesis, Christian Albrechts University of Kiel.
- MAROTZKE, J., WELANDER, P. & WILLEBRAND, J. 1988 Instabilities and multiple steady states in a meridional-plane of the thermohaline circulation. *Tellus* **40A**, 162-172.
- QUON, C. & GHIL, M. 1992 Multiple equilibria in thermosolutal convection due to salt-flux boundary conditions. *J. Fluid Mech.* **245**, 449-483.
- QUON, C. & GHIL, M. 1995 Multiple equilibria and stable oscillations in thermosolutal convection at small aspect ratio. *J. Fluid Mech.* **291**, 35-56.
- ROOTH, C. 1982 Hydrology and ocean circulation. *Prog. Oceanogr.* **11**, 131-149.
- STOMMEL, H. 1961 Thermohaline convection with two stable regimes of flow. *Tellus* **XIII-2**, 224-230.
- STOMMEL, H. 1962 On the smallness of sinking regions in the ocean. *Proc. Natl Acad. Sci. Washington* **48**, 766-772.
- THUAL, O. & MCWILLIAMS, J. C. 1992 The catastrophe structure of thermohaline convection in a two-dimensional fluid model and a comparison with low-order box models. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **64**, 67-95.
- VELLINGA, M. 1996 Instability of two-dimensional thermohaline circulation. *J. Phys. Oceanogr.* **26**, 305-319.
- WEAVER, A. J., & HUGHES, T. M. C. 1992 *Stability and Variability of the Thermohaline Circulation and its Link to Climate*. Trends in Physical Oceanography, Council of Scientific Research Integration - Research Trends Series, Trivandrum India.
- WEAVER, A. J., MAROTZKE, J., CUMMINS, P. F. & SARACHIK, E. S. 1993 Stability and variability of the thermohaline circulation. *J. Phys. Oceanogr.* **23**, 39-60.
- WELANDER, P. 1986 Thermohaline effects in the ocean circulation and related simple models. In *Large-Scale Transport Processes in Oceans and Atmosphere* (ed. J. Willebrand & D.T.L. Anderson), pp 163-200. D. Reidel.
- WINTON M. & SARACHIK, E. S. 1993 Thermohaline oscillations induced by strong steady salinity forcing of ocean general circulation models. *J. Phys. Oceanogr.* **23**, 1389-1410.
- WRIGHT, D. G. & STOCKER, T. F. 1991 A zonally averaged ocean model for the thermohaline circulation. Part I: Model development and flow dynamics. *J. Phys. Oceanogr.* **21**, 1713-1724.





## CHAPITRE VI

# Modèles avec rotation et forçage dynamique

### VI.1 Modèle bidimensionnel

On considère ici un modèle bidimensionnel de la circulation thermohaline, incluant l'effet de la rotation et un forçage dynamique en surface, assimilable à une tension de vent zonale. Ses solutions sont étudiées avec le code BAGELS (**Dijkstra et al. (1995)**), un code analogue à AUTO (voir paragraphe IV.3.1) mais bien plus performant numériquement, qui permet de traiter des problèmes comportant jusqu'à  $10^5$  degrés de liberté.

#### VI.1.1 Modèle

Le modèle est analogue à celui présenté en III.1, mais comprend une paramétrisation de la rotation. La rotation est représentée par la composante zonale de la vitesse  $u(y, z)$  perpendiculaire au plan  $(y, z)$  du modèle. Le flux de  $u$  est fixé en surface, ce qui correspond à un forçage de type tension zonale de vent imposée. Le caractère bidimensionnel du modèle ne permet pas la représentation du transport par les gyres horizontales et les courants de bord ouest.

##### (a) Equations et conditions aux limites

Les équations du modèle s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u + v \frac{\partial}{\partial y}u + w \frac{\partial}{\partial z}u - f v &= \nu \nabla^2 u \\ \frac{\partial}{\partial t}v + v \frac{\partial}{\partial y}v + w \frac{\partial}{\partial z}v + f u &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y}p + \nu \nabla^2 v \\ \frac{\partial}{\partial t}w + v \frac{\partial}{\partial y}w + w \frac{\partial}{\partial z}w &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z}p + g (\gamma_T T - \gamma_S S) + \nu \nabla^2 w\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} T + v \frac{\partial}{\partial y} T + w \frac{\partial}{\partial z} T &= \kappa_T \nabla^2 T \\
\frac{\partial}{\partial t} S + v \frac{\partial}{\partial y} S + w \frac{\partial}{\partial z} S &= \kappa_S \nabla^2 S ,
\end{aligned}$$

où les notations sont pour la plupart définies en III.1.1.  $u(y, z)$  est la composante zonale de la vitesse et  $f = f_0 \Omega(y)$  est le paramètre de Coriolis.

Ce modèle est dérivé des équations tridimensionnelles en considérant que les variables sont indépendantes de la longitude  $x$ .

Les conditions de surface sont de *type mixte* pour la température et la salinité :

$$T = \Delta T \mathcal{F}_T(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} S = \frac{\Delta S}{d} \mathcal{F}_S(y) .$$

La tension de vent en surface est représentée par la condition :

$$\frac{\partial}{\partial z} u = \frac{\Delta U}{d} \mathcal{F}_U(y) .$$

Les autres conditions sont de *type flux nul* pour  $T$ ,  $S$  et  $u$  au fond et sur les parois latérales et de *type glissement sans frottement* pour  $v$  et  $w$  aux quatre bords du domaine.

## (b) Adimensionnement

Dijkstra & Molemaker (1997) ayant déjà implanté le modèle sans rotation dans le code BAGELS, nous avons adopté leurs conventions de notation et d'adimensionnement. Ainsi les nouvelles équations ont été incluses facilement dans BAGELS. D'autre part, les paramétrisations de la rotation et du forçage dynamique en surface ont également été ajoutées au code d'intégration temporelle décrit au chapitre V. Quelques simulations effectuées avec chacun des deux codes ont permis une validation mutuelle des insertions de ces paramétrisations.

Les facteurs d'adimensionnement choisis sont :  $d$  pour les longueurs horizontales et verticales,  $d^2/\kappa_T$  pour le temps,  $\Delta T$  pour la température et  $\Delta S$  pour la salinité. Les intervalles de variation des variables d'espace adimensionnelles sont  $0 \leq y \leq A = L/d$  et  $0 \leq z \leq 1$ .

La fonction de courant  $\psi$  est ici contraire à celle définie en III.1.3 :

$$v = \frac{\partial}{\partial z} \psi \quad \text{et} \quad w = - \frac{\partial}{\partial y} \psi .$$

Avec ces conventions, les équations adimensionnées du modèle s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_P} \left[ \frac{\partial}{\partial t} u - J(\psi, u) \right] &= E^{-1} \Omega \frac{\partial}{\partial z} \psi + \nabla^2 u \\ \frac{1}{\sigma_P} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla^2 \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi) \right] &= Ra_T \frac{\partial}{\partial y} (T - \lambda S) - E^{-1} \Omega \frac{\partial}{\partial z} u - \nabla^4 \psi \\ \frac{\partial}{\partial t} T - J(\psi, T) &= \nabla^2 T \\ \frac{\partial}{\partial t} S - J(\psi, S) &= Le \nabla^2 S, \end{aligned}$$

et les forçages de surface sont :

$$T = F_T(y) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} S = \gamma F_S(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} u = Re F_U(y) .$$

Les autres conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} \psi = \partial^2 \psi / \partial z^2 &= 0 & \text{en} & \quad z = 1 \\ \partial T / \partial z = \partial S / \partial z &= 0 & \text{et} & \quad \psi = \partial^2 \psi / \partial z^2 = 0 & \text{en} & \quad z = 0 \\ \partial T / \partial y = \partial S / \partial y &= 0 & \text{et} & \quad \psi = \partial^2 \psi / \partial y^2 = 0 & \text{en} & \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y = A . \end{aligned}$$

La condition de surface  $\psi = 0$  peut sembler contradictoire avec l'imposition d'un forçage dynamique. Mais, loin des côtes, la circulation induite par le vent est essentiellement zonale et la vitesse méridienne quasi nulle. Elle n'est importante que dans les courants de bord ouest, que nous ne prétendons pas représenter.

L'espace de contrôle du modèle se compose donc des trois fonctions de forçages  $F_T(y)$ ,  $F_S(y)$  et  $F_U(y)$  et de huit paramètres adimensionnels :

- le rapport d'aspect du domaine :  $A = L/d$ .
- le rapport des contributions saline et thermique dans le terme de flottabilité :  $\lambda = \gamma_S \Delta S / \gamma_T \Delta T$ .
- le nombre de Rayleigh thermique :  $Ra_T = g \gamma_T \Delta T d^3 / (\nu \kappa_T)$ .
- l'intensité du forçage salin :  $\gamma$ . L'intensité effective de ce forçage est en fait  $Ra_S = \gamma \lambda Ra_T = \gamma g \gamma_S \Delta S d^3 / (\nu \kappa_T)$ .
- le nombre de Reynolds :  $Re = \Delta U d / \kappa_T$ .
- le nombre d'Ekman :  $E = \nu / (f_0 d^2)$ .
- le nombre de Prandtl :  $\sigma_P = \nu / \kappa_T$ .
- le nombre de Lewis :  $Le = \kappa_S / \kappa_T$ .

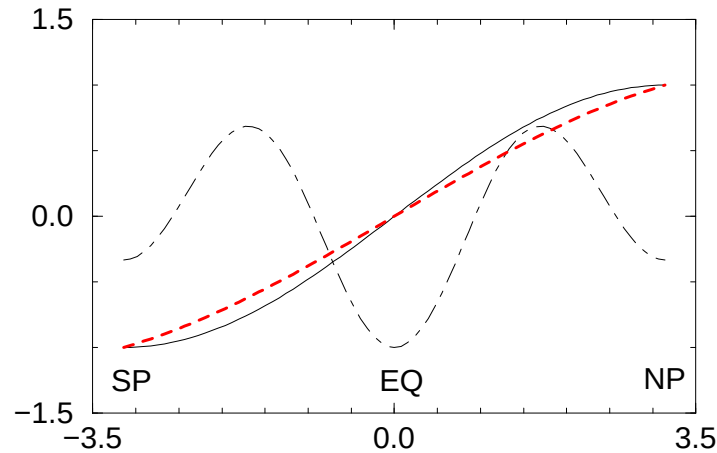
En annexe B, le tableau 2 indique les relations entre ces paramètres adimensionnels (cinquième colonne) et ceux obtenus avec les facteurs d'adimensionnement utilisés en III.1.3 (deuxième colonne).

### VI.1.2 Comportement du modèle

Equations et conditions aux limites sont discrétisées sur une grille non équidistante comportant 61 points sur l'horizontale et 31 niveaux. Cette résolution est suffisante d'après Dijkstra & Molemaker (1997). Une méthode de suivi des branches de solutions dans l'espace des paramètres est mise en œuvre. En chaque point, la stabilité linéaire de la solution est déterminée par résolution du problème aux valeurs propres généralisé.

Les forçages de température et de salinité sont choisis tels que  $F_T(\mathcal{Y}) = \cos(\mathcal{Y})$  et  $F_S(\mathcal{Y}) = \cos(\mathcal{Y})$ , où  $\mathcal{Y} = -\pi + 2\pi y/A$  varie entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Deux profils méridiens de forçage dynamique sont appliqués. L'un est symétrique par rapport à l'équateur (i.e.  $\mathcal{Y} = 0$ ) :  $F_U(\mathcal{Y}) = -2 [0.5 \cos(\mathcal{Y}) + \cos(2\mathcal{Y})]/3$  et l'autre antisymétrique :  $F_U(\mathcal{Y}) = \sin(\mathcal{Y}/2)$ . Le paramètre  $f$  de Coriolis est constant  $f(\mathcal{Y}) = f_0$ , ou de façon plus réaliste variable avec la latitude selon  $f(\mathcal{Y}) = f_0 \Omega(\mathcal{Y})$  avec  $\Omega(\mathcal{Y}) = 2 \sin(\mathcal{Y}/3)/\sqrt{3}$ . Cette formulation revient à borner le bassin à l'intervalle de latitude  $[-60^\circ, 60^\circ]$ , ce qui paraît raisonnable pour le problème étudié. Les profils de tension de vent et de rotation sont représentés en figure V.1.

Dans toutes les simulations présentées ici, le rapport d'aspect, le rapport  $\lambda$  et les nombres de Prandtl et de Lewis ont été fixés. Leurs valeurs sont respectivement  $A = 10$ ,  $\lambda = 0.32$ ,  $\sigma_P = 10^3$  et  $Le = 1$ .

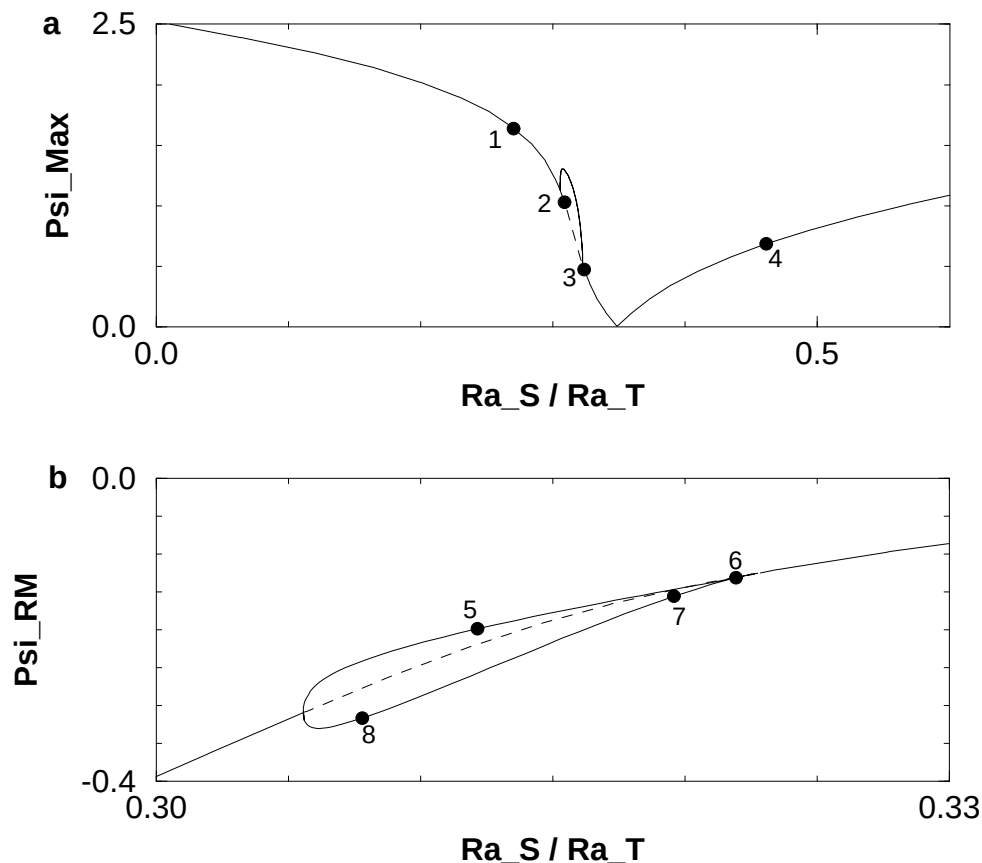


**Figure VI.1** : Profils de forçage dynamique et de rotation considérés en fonction de la latitude  $\mathcal{Y}$ . En trait mixte :  $F_U$  symétrique, en trait plein :  $F_U$  antisymétrique et en tirets gras :  $f(\mathcal{Y})$  antisymétrique.

#### (a) Cas de référence

Un diagramme de bifurcation obtenu pour le modèle non rotatif et non forcé dynamiquement ( $E^{-1} = Re = 0$ ) servira de référence. Il correspond à la configuration

la plus simple, où l'on puisse observer des équilibres multiples : la branche initiale de solutions comporte deux points de *bifurcation fourche* et aucun *point limite* (voir paragraphe III.3.3). La branche de solutions initiale est instable linéairement entre les points de *bifurcation fourche* et stable en dehors. Les deux solutions asymétriques issues des points de *bifurcation fourche* sont stables sur leur domaine d'existence.



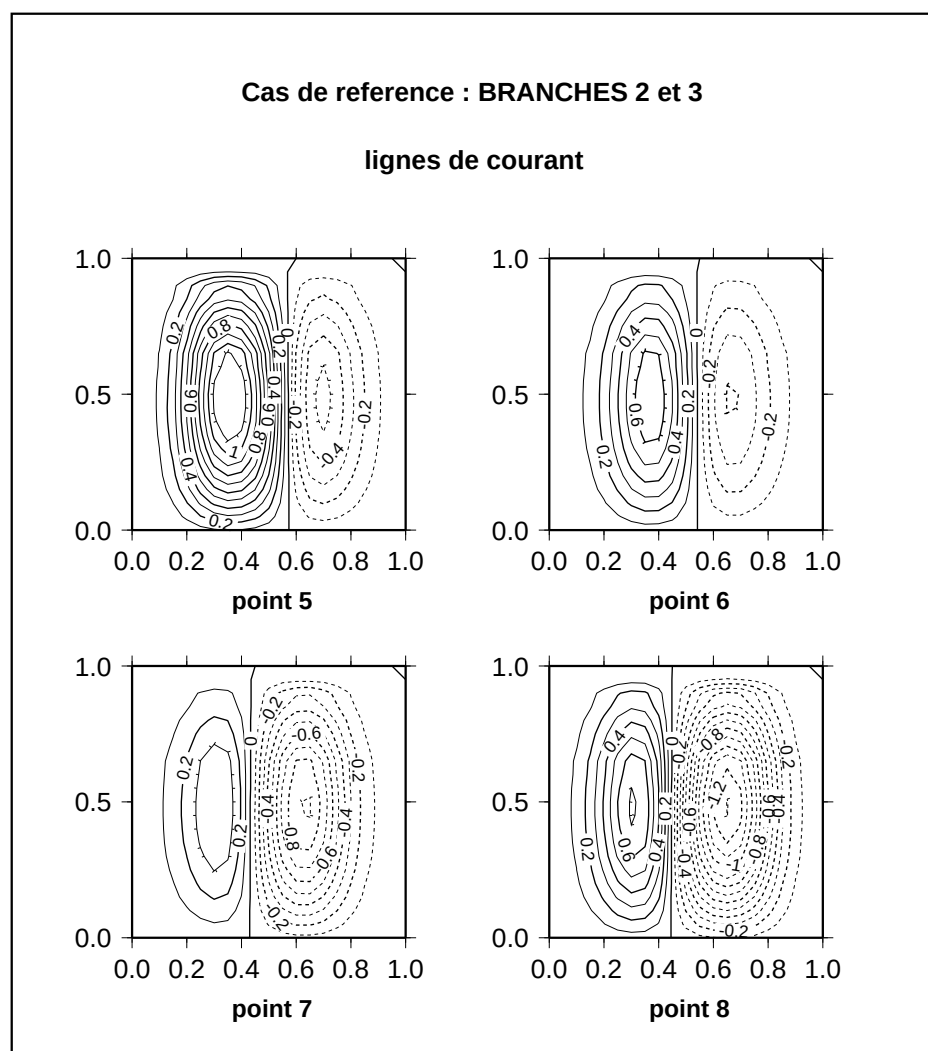
**Figure VI.2** : Diagramme de bifurcation obtenu avec les paramètres  $Ra_T = 500$ ,  $A = 10$ ,  $\sigma_P = 10^3$ ,  $\lambda = 0.32$ ,  $Le = 1$  et  $E^{-1} = Re = 0$ . Les branches de solutions stables sont tracées en trait plein, les branches de solutions instables en tirets. En **a** : représentation dans le plan  $(Ra_S/Ra_T, \psi_{Max})$ . En **b** : dans le plan  $(Ra_S/Ra_T, \psi_{RM})$ .

Ce cas a été décrit par Dijkstra & Molemaker (1997) (leur figure 17.b) pour les paramètres  $A = 10$ ,  $\sigma_P = 2.25$ ,  $\lambda = 0.32$ ,  $Le = 1$  et  $Ra_T = 10^3$ . Il a été retrouvé ici à fort nombre de Prandtl. La figure VI.2 représente le diagramme de bifurcation obtenu avec les paramètres :  $A = 10$ ,  $\sigma_P = 10^3$ ,  $\lambda = 0.32$ ,  $Le = 1$  et  $Ra_T = 500$ . Sur la figure VI.2.a, le diagramme est représenté dans le plan  $(Ra_S/Ra_T, \psi_{Max})$ , où  $\psi_{Max}$  est la valeur maximale de la fonction de courant dans le domaine. Les branches de solutions stables sont tracées en trait plein, celles de solutions instables en tirets. Sur la figure



La figure VI.3 montre les lignes de courant correspondant aux points **1**, **2**, **3** et **4** de la branche initiale. Sur cette branche, toutes les solutions sont symétriques. Les points **1**, **2** et **3** correspondent à des circulations de type thermique, avec plongée d'eau aux deux pôles et remontée d'eau équatoriale. L'amplitude de la circulation décroît jusqu'à s'annuler pour  $Ra_S/Ra_T \simeq 0.35$ . Ensuite, la solution s'intensifie à nouveau, sous forme d'une circulation saline avec plongée d'eau équatoriale (point **4**). Les branches de solutions asymétriques se développent donc dans une région de forçage thermique dominant, mais proche de celle où le forçage salin devient dominant.

En figure VI.4, on a représenté la fonction de courant méridienne des solutions asymétriques correspondant aux points **5**, **6**, **7** et **8** de la figure VI.2.b.

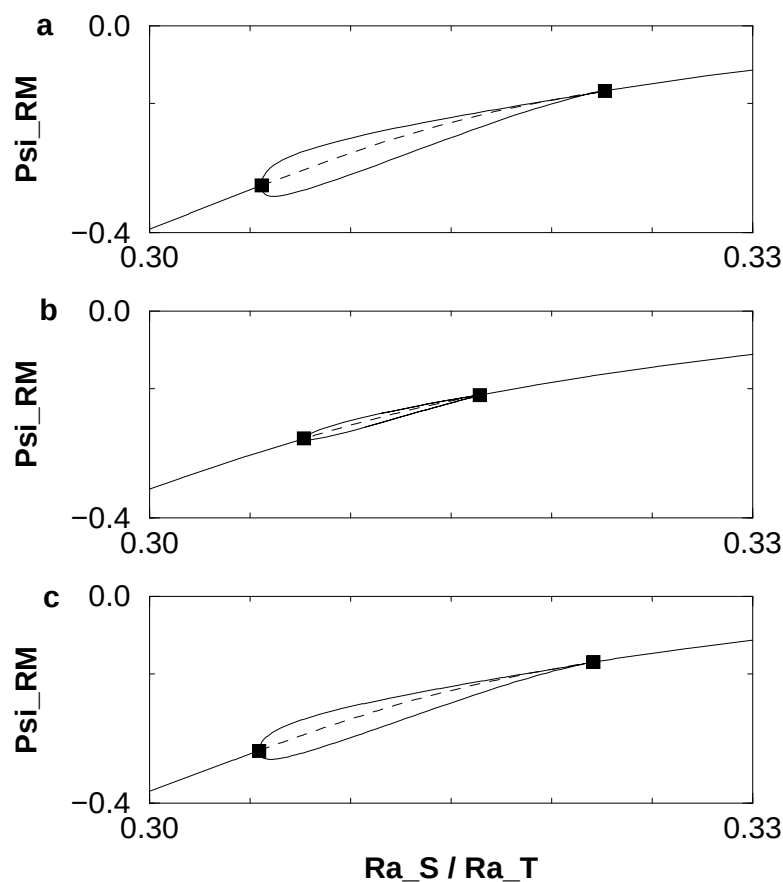


**Figure VI.4 :** Lignes de courant pour les différents points des branches de solutions asymétriques indiqués en figure VI.2.b. L'écart entre deux isolignes est 0.1.

Le long de chacune des deux branches de solutions asymétriques, l'une des deux cellules grandit au détriment de l'autre. Il apparaît clairement que les deux solutions asymétriques sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'équateur. L'extension maximale de la grande cellule correspond approximativement au point **5**. On n'observe pas de solution pôle-à-pôle avec les paramètres considérés ici.

### (b) Effet de la rotation seule

On s'intéresse tout d'abord aux changements induits par l'introduction de la rotation en l'absence de forçage dynamique. Si le forçage dynamique de surface est nul, la vitesse zonale  $u$  est non nulle car elle évolue sous l'effet du terme de Coriolis.



**Figure VI.5** : Diagrammes de bifurcation obtenus pour les paramètres  $Ra_T = 500$ ,  $A = 10$ ,  $\sigma_P = 10^3$ ,  $\lambda = 0.32$ ,  $Le = 1$ ,  $Re = 0$  et en **a** :  $1/E = 0$ , en **b** :  $1/E = 2$ , la rotation étant constante et en **c** :  $1/E = 1,73$ , la rotation étant antisymétrique. Les branches de solutions stables sont tracées en trait plein, les branches de solutions instables en tirets.



On compare au cas de référence les diagrammes de bifurcation correspondant aux mêmes valeurs des paramètres ( $Ra_T = 500$ ,  $A = 10$ ,  $\sigma_P = 10^3$ ,  $\lambda = 0.32$ ,  $Le = 1$ ,  $Re = 0$ ) mais dans le cas rotatif ( $E^{-1} \neq 0$ ). En figure VI.5.a, le diagramme de bifurcation du cas de référence est reproduit. En figure VI.5.b, le diagramme obtenu pour  $E^{-1} = 2$  et une rotation constante est tracé. En figure VI.5.c, le diagramme obtenu pour  $E^{-1} = 1,73$  et une rotation dépendant de la latitude ( $f(\mathcal{Y}) = 2f_0 \sin(\mathcal{Y}/3)/\sqrt{3}$ ) est représenté.

Dans les trois cas, la topologie des solutions est la même. Mais la présence de rotation défavorise les solutions asymétriques. Dans le cas d'une rotation constante, les deux points de bifurcation sont nettement plus proches. Il faudrait augmenter le forçage thermique pour retrouver une situation analogue au cas de référence quant à l'étendue des branches asymétriques. La rotation antisymétrique ne provoque pas de déplacement des points de bifurcation, mais induit une plus faible intensité des solutions asymétriques. Leur asymétrie se limite à une légère différence d'intensité et d'extension entre les deux cellules.

La structure bifurcatoire du modèle est maintenue, car le terme de Coriolis présente la même symétrie que les autres termes dans l'équation de fonction de courant. En effet, si  $\psi$  est un champ antisymétrique (cas de la branche initiale de solutions), l'équation d'évolution de  $u$  impose que  $u$  soit de parité opposée à celle de  $\Omega$ . Tous les termes de l'équation de fonction de courant sont donc antisymétriques par rapport à l'équateur. La symétrie du modèle est inchangée par rapport au cas non rotatif.

### (c) Effet du forçage dynamique

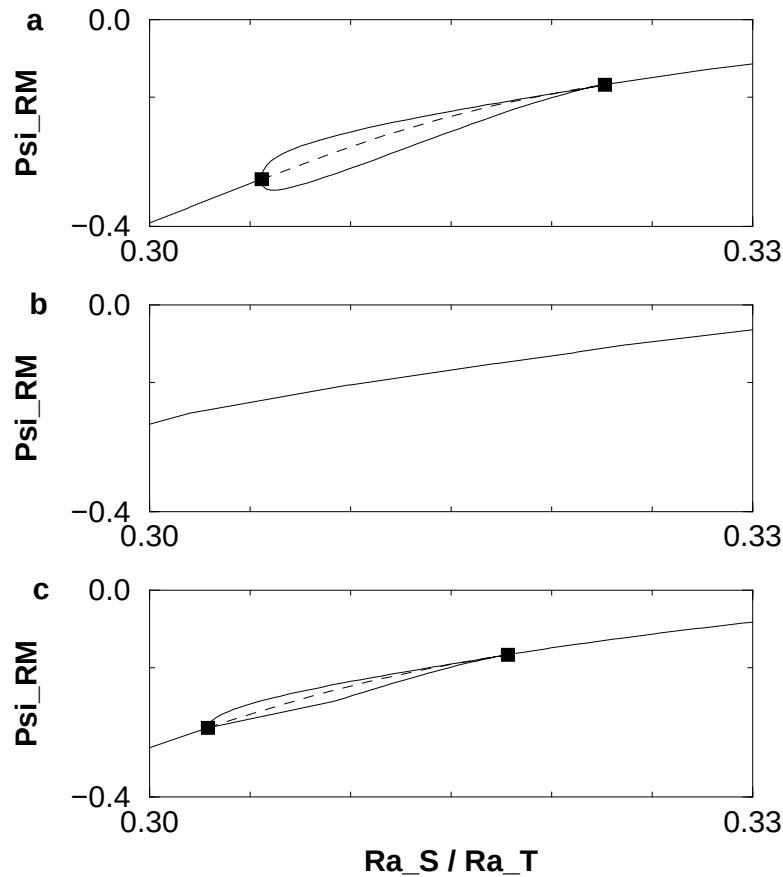
Outre la rotation, on applique maintenant un forçage dynamique symétrique de profil  $F_U(\mathcal{Y}) = -2 [0.5 \cos(\mathcal{Y}) + \cos(2\mathcal{Y})]/3$  d'amplitude  $Re = 15$ . En figure VI.6, sont successivement représentés les diagrammes de bifurcation du cas de référence ( $Re = E^{-1} = 0$ ), du cas forçage dynamique symétrique et rotation constante ( $Re = 15$ ,  $E^{-1} = 2$ ) et du cas forçage dynamique symétrique et rotation antisymétrique ( $Re = 15$ ,  $E^{-1} = 1,73$ ). Le terme de Coriolis dans l'équation d'évolution de la fonction de courant a maintenant même parité que le produit  $F_U\Omega$ . En effet  $u$  a même parité que son forçage de surface. La symétrie des équations peut donc être rompue et les points de *bifurcation fourche* disparaître.

Ainsi l'imposition d'une tension de vent symétrique à rotation constante modifie le comportement du modèle. Dans ce cas, le terme de Coriolis dans l'équation d'évolution de la fonction de courant sera symétrique, contrairement aux autres termes. La symétrie initiale du modèle est donc brisée. Une seule branche de solutions est observée, qui ne porte aucun point de bifurcation (voir figure VI.6.b).

L'introduction d'une tension de vent symétrique et d'une rotation antisymétrique n'altère pas le comportement du modèle mais tend à réduire l'extension des branches asymétriques et l'intensité des solutions correspondantes (voir figure VI.6.c). Augmenter le nombre de Rayleigh thermique permet de retrouver les extensions et am-

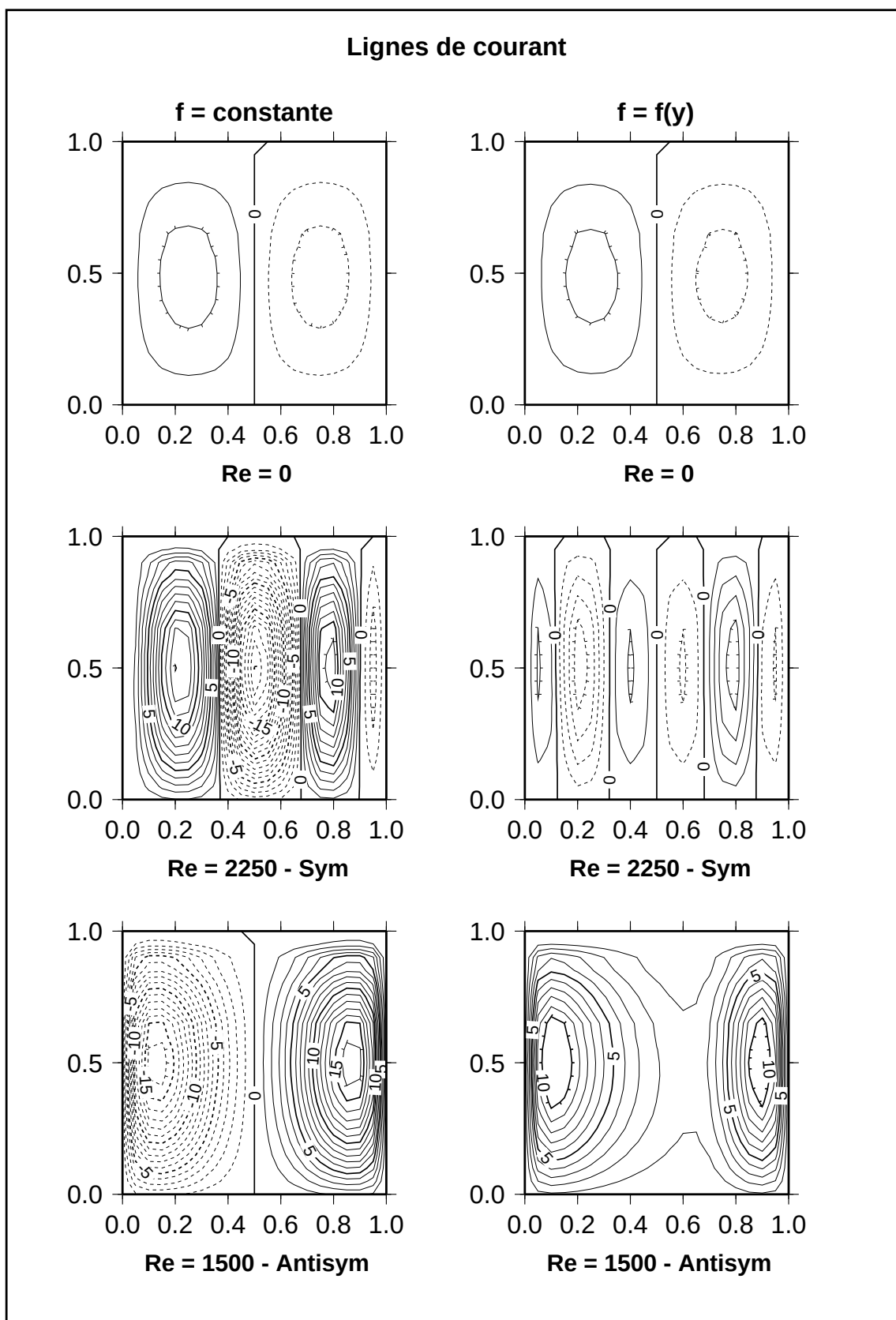
plitudes du cas de référence.

Au cours de nos simulations avec un profil de tension de vent antisymétrique, on n'a obtenu aucun point de *bifurcation fourche* ni dans le cas de la rotation constante, ni dans celui de la rotation antisymétrique. En augmentant le nombre de Rayleigh thermique, on devrait pourtant observer des points de *bifurcation fourche* dans le cas de la rotation constante, puisqu'alors la symétrie du modèle est préservée.



**Figure VI.6** : Diagrammes de bifurcation obtenus pour les paramètres  $Ra_T = 500$ ,  $A = 10$ ,  $\sigma_P = 10^3$ ,  $\lambda = 0.32$ ,  $Le = 1$ , et en **a** :  $Re = 1/E = 0$ , en **b** :  $Re = 15$  et  $1/E = 2$ , la rotation étant constante, en **c** :  $Re = 15$  et  $1/E = 1,73$ , la rotation étant antisymétrique. Le forçage dynamique est symétrique. Les branches de solutions stables sont tracées en trait plein, les branches de solutions instables en tirets.

Les circulations induites par un forçage dynamique de grande amplitude confirment qu'une asymétrie est introduite dans le modèle quand le produit des profils de tension de vent et de rotation est une fonction paire. L'antisymétrie du modèle n'est pas perturbée



**Figure VI.7 :** Lignes de courant des solutions obtenues pour  $Ra_T = 500$ ,  $Ra_S/Ra_T = 0$ ,  $A = 10$ ,  $\sigma_P = 10^3$ ,  $\lambda = 0.32$ ,  $Le = 1$ . A droite : rotation constante,  $1/E = 2$ . A gauche : rotation antisymétrique,  $1/E = 1,73$ . En haut : tension de vent nulle. Au milieu :  $F_U$  symétrique d'amplitude  $Re = 2250$ . En bas :  $F_U$  antisymétrique d'amplitude  $Re = 1500$ .

par l'introduction de tension de vent et de rotation quand le produit de leurs profils est impair.

On a représenté en figure VI.7 les lignes de courant obtenues avec un forçage dynamique de grande amplitude pour les différentes combinaisons possibles de profils de tension de vent et de rotation. En colonne de droite, on a tracé les circulations dans le cas d'une rotation constante et une tension de vent nulle (en haut), symétrique (au milieu) et antisymétrique (en bas). En colonne de gauche, les forçages dynamiques sont inchangés mais la rotation est antisymétrique. Quand la tension de vent est nulle, l'influence de la rotation est relativement minime, comme cela était déjà visible en figure VI.5. Dans les quatre autres cas, la circulation est dominée par l'action du forçage dynamique, le forçage thermique étant bien moins élevé et le forçage salin nul.

Quand le produit rotation  $\times$  tension de vent présente un profil symétrique (cas tension de vent symétrique et rotation constante ou tension de vent et rotation antisymétriques), la circulation induite par le forçage dynamique est asymétrique. L'introduction de tension de vent et de rotation brise la symétrie initiale du modèle. A l'inverse, si la tension de vent et la rotation ont des parités inverses, la symétrie initiale du modèle est préservée et la circulation induite par le forçage dynamique est symétrique.

On observe d'autre part que les solutions correspondant à un profil de tension de vent symétrique se composent de plus de deux cellules. Quand le forçage dynamique est antisymétrique, seules deux cellules existent. Ceci provient du fait que le profil antisymétrique est monotone. En revanche, son gradient change plusieurs fois de signe dans le cas symétrique.

## VI.2 Théorie asymptotique

On souhaite montrer que l'approche asymptotique permet de tester l'inclusion de nouvelles paramétrisations dans le modèle bidimensionnel. On va donc effectuer un développement asymptotique d'un modèle bidimensionnel avec rotation et forçage dynamique en surface et en étudier le comportement. Les modifications de comportement du modèle asymptotique induites par l'ajout de rotation et de forçage dynamique sont comparées aux changements que présente le modèle bidimensionnel sous l'effet de paramétrisations analogues.

Pour pouvoir dériver simplement le développement asymptotique, on va considérer une version simplifiée du modèle bidimensionnel présenté en VI.1 : la composante zonale de la vitesse est fixée. Elle est égale au forçage de vent en surface, décroît avec la profondeur et s'annule au fond.

### VI.2.1 Modèle

#### (a) Equations

Le domaine considéré est rectangulaire d'extension  $-L/2 \leq y \leq L/2$  et  $0 \leq z \leq d$ . Les équations régissant le mouvement et les caractéristiques thermodynamiques de la couche de fluide sont écrites en coordonnées cartésiennes, comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}v + v \frac{\partial}{\partial y}v + w \frac{\partial}{\partial z}v &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y}p - f U + \nu \nabla^2 v \\ \frac{\partial}{\partial t}w + v \frac{\partial}{\partial y}w + w \frac{\partial}{\partial z}w &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z}p + g (\gamma_T T - \gamma_S S) + \nu \nabla^2 w \\ \frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial z}w &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}T + v \frac{\partial}{\partial y}T + w \frac{\partial}{\partial z}T &= \kappa_T \nabla^2 T \\ \frac{\partial}{\partial t}S + v \frac{\partial}{\partial y}S + w \frac{\partial}{\partial z}S &= \kappa_S \nabla^2 S, \end{aligned}$$

où l'on utilise les mêmes notations qu'en III.1.  $U(y, z)$  désigne la composante zonale du vecteur vitesse perpendiculaire au plan  $(y, z)$ . Le paramètre de Coriolis  $f$  est de la forme  $f_0 \Omega(y)$ .

#### (b) Forçages et conditions aux limites

Le forçage dynamique consiste à imposer le flux de vitesse zonale sur toute la profondeur du bassin. Cette expression est justifiée au paragraphe suivant. Il s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z}U = \frac{\Delta U}{d} \mathcal{F}_U(y) \mathcal{H}(z),$$

où  $\Delta U$  est l'amplitude du forçage,  $\mathcal{F}_U(y)$  son profil méridien et  $\mathcal{H}(z)$  son profil vertical.  $\mathcal{F}_U$  et  $\mathcal{H}$  sont des fonctions d'amplitude unitaire. En surface, le forçage dynamique est équivalent à celui utilisé en VI.1. Il décroît avec la profondeur selon le profil  $\mathcal{H}(z)$  qui vérifie :

$$\mathcal{H}(z) = 1 \quad \text{en} \quad z = d \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(z) = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 .$$

Les conditions de surface sont de type mixte pour la température et la salinité et s'écrivent :

$$T = \Delta T \mathcal{F}_T(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} S = \frac{\Delta S}{d} \mathcal{F}_S(y) \quad \text{en} \quad z = d ,$$

où  $\Delta T$  et  $\Delta S$  sont les intensités dimensionnelles des forçages.  $\mathcal{F}_T(y)$  et  $\mathcal{F}_S(y)$  sont leurs profils méridiens d'amplitude unitaire. Ils sont choisis symétriques par rapport à l'équateur ( $y = 0$ ).

Les autres conditions sont de type flux nul pour les champs scalaires et glissement libre pour le vecteur vitesse ( $v, w$ ) :

$$\begin{aligned} w = \partial v / \partial z = 0 & \quad \text{en} \quad z = d . \\ \partial T / \partial z = \partial S / \partial z = 0 & \quad \text{et} \quad w = \partial v / \partial z = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 . \\ \partial T / \partial y = \partial S / \partial y = 0 & \quad \text{et} \quad v = \partial w / \partial y = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm L/2 . \end{aligned}$$

### (c) Formulation du forçage dynamique

L'expression du forçage dynamique est déduite d'une relation de type équilibre de Sverdrup en surface entre tension de vent zonale et transport de masse. Une telle relation est de la forme :  $df/dy V_H = d\tau/dy$ , où  $V_H$  est la composante méridienne de la vitesse dans le plan  $(x, y)$  (la vitesse méridienne totale serait de la forme  $V_H + v$ ) et  $\tau$  la tension de vent zonale en surface. La fonction de courant horizontale  $\Psi_H$  étant définie par  $V_H = d\Psi_H/dx$  et  $U_H = -d\Psi_H/dy$ , on peut exprimer  $\bar{U}_H$ , moyenne zonale de  $U_H$ , en fonction de  $df/dy$ ,  $\tau$  et  $L_x$ , largeur du bassin.

On suppose que  $U$ , le forçage dynamique du modèle s'exprime par :  $U = C\bar{U}_H\mathcal{H}(z)$ . Le choix a priori d'un profil vertical  $\mathcal{H}(z)$  pour le forçage dynamique peut sembler contestable. Néanmoins, en moyennant zonalement les équations tridimensionnelles de mouvement, on obtient une relation entre  $\tau$ ,  $\mathcal{H}(z)$ ,  $d\Psi/dz$  et le champ de pression, la fonction de courant  $\Psi$  dans le plan  $(y, z)$  pouvant être calculée indépendamment. Il est donc possible de diagnostiquer a posteriori le champ de pression. Si celui-ci est raisonnable, il fournit une justification du choix du profil  $\mathcal{H}(z)$ .

### (d) Adimensionnement

Les facteurs d'échelle choisis sont les mêmes qu'en III.1 :  $d$  pour les longueurs horizontales et verticales,  $2\pi d^3/L\kappa_T$  pour le temps,  $\nu\kappa_T L^2/(4\pi^2 d^5 g\gamma_T)$  pour la température et  $\nu\kappa_T L^2/(4\pi^2 d^5 g\gamma_S)$  pour la salinité.

La fonction de courant  $\Psi$  dans le plan  $(y, z)$  est définie par les relations :

$$v = -\frac{\partial}{\partial z}\Psi \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial}{\partial y}\Psi .$$

Les équations adimensionnées du modèle sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k\sigma_P} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + J(\Psi, \nabla^2 \Psi) \right] &= \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial y} (T - S) + E^{-1} \Omega \frac{\partial}{\partial z} U + \nabla^4 \Psi \\ \frac{1}{k} \left[ \frac{\partial}{\partial t} T + J(\Psi, T) \right] &= \nabla^2 T \\ \frac{1}{k} \left[ \frac{\partial}{\partial t} S + J(\Psi, S) \right] &= Le \nabla^2 S , \end{aligned}$$

où  $k$ ,  $\sigma_P$  et  $Le$  sont respectivement le rapport d'aspect du domaine, le nombre de Prandtl et le nombre de Lewis définis en III.1. Le nombre d'Ekman s'exprime par  $E = \nu/(f_0 d^2)$ .

Sous forme adimensionnelle, le forçage de surface s'écrit :

$$T = a F_T(ky) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z} S = b F_S(ky) \quad \text{en} \quad z = 1$$

et le forçage dynamique dans la masse devient :

$$\frac{\partial}{\partial z} U = c F_U(ky) H(z) .$$

Les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les amplitudes des forçages. Les fonctions  $F_T$ ,  $F_S$ ,  $F_U$  et  $H$  sont d'amplitude unitaire et correspondent, respectivement, aux fonctions  $\mathcal{F}_T$ ,  $\mathcal{F}_S$ ,  $\mathcal{F}_U$  et  $\mathcal{H}$ .

Les autres conditions aux limites s'expriment :

$$\begin{aligned} \Psi = \partial^2 \Psi / \partial z^2 = 0 & \quad \text{en} \quad z = 1 \\ \partial T / \partial z = \partial S / \partial z = 0 & \quad \text{et} \quad \Psi = \partial^2 \Psi / \partial z^2 = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \\ \partial T / \partial y = \partial S / \partial y = 0 & \quad \text{et} \quad \Psi = \partial^2 \Psi / \partial y^2 = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm \pi / k . \end{aligned}$$

Les paramètres adimensionnels contrôlant ce système sont :

- le rapport d'aspect :  $k = 2\pi d/L$  ,
- l'intensité du forçage thermique :  $a = 4\pi^2 d^5 g \gamma_T \Delta T / (\nu \kappa_T L^2)$  ,
- l'intensité du forçage salin :  $b = 4\pi^2 d^5 g \gamma_S \Delta S / (\nu \kappa_S L^2)$  ,
- l'intensité du forçage dynamique :  $c = 2\pi d^2 \Delta U / (\kappa_T L)$  ,
- le nombre d'Ekman :  $E = \nu / (f_0 d^2)$  ,

- le nombre de Prandtl :  $\sigma_P = \nu/\kappa_T$  ,
- le nombre de Lewis :  $Le = \kappa_S/\kappa_T$  .

Le modèle dépend de ces sept paramètres adimensionnels et des quatre profils de forçage  $F_T(ky)$ ,  $F_S(ky)$ ,  $F_U(ky)$  et  $H(z)$ .

## VI.2.2 Développement asymptotique

Le développement asymptotique du modèle ci-dessus est tout à fait analogue à celui décrit en IV.1.2, mais les paramétrisations de la rotation et du forçage dynamique entraînent l'apparition de deux nouveaux termes dans l'équation de compatibilité au troisième ordre. Afin d'explicitier ces termes, nous choisirons pour profil vertical de forçage dynamique  $H(z) = z$ . Dans l'équation finale, ce profil n'intervient que sous forme intégrée verticalement ; choisir un autre profil n'induit donc pas de changement topologique du modèle mais seulement un déplacement des branches de solutions.

### (a) Chemin asymptotique

Soit  $\epsilon$  un infiniment petit, les paramètres  $(a, b, c, k)$  du modèle évoluent selon :

$$\begin{aligned} a &= \epsilon a_{(1)} \\ b &= \epsilon^3 b_{(3)} \\ c &= \epsilon c_{(1)} \\ k &= \epsilon k_{(1)} \end{aligned}$$

Les solutions du modèle sont recherchées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Psi(y, z, t) &= \epsilon \Psi_{(1)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \epsilon^2 \Psi_{(2)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \dots \\ T(y, z, t) &= \epsilon T_{(1)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \epsilon^2 T_{(2)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \dots \\ S(y, z, t) &= \epsilon S_{(1)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \epsilon^2 S_{(2)}(ky, z, \epsilon^2 kt) + \dots \end{aligned}$$

Et on développe  $U$  selon :

$$U(y, z) = \epsilon U_{(1)}(ky, z) + \epsilon^2 U_{(2)}(ky, z) + \dots$$

On adopte les notations  $\mathcal{Y} = ky$  et  $\mathcal{T} = \epsilon^2 kt$ .

### (b) Résolution ordre par ordre

Au **premier ordre**, on obtient comme précédemment (voir paragraphe IV.1.2) :

$$T_{(1)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) = a_{(1)} F_T(\mathcal{Y}) \quad \text{et} \quad S_{(1)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) = s_{(1)}(\mathcal{Y}, \mathcal{T}) .$$



L'équation de fonction de courant s'écrit :

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} (T_{(1)} - S_{(1)}) + E^{-1} \Omega \frac{\partial}{\partial z} U_{(1)} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \Psi_{(1)} .$$

Et par quadruple intégration, on obtient :

$$\Psi_{(1)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) = - \left[ a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)}(\mathcal{Y}, \mathcal{T}) \right] P(z) - E^{-1} c_{(1)} \Omega(\mathcal{Y}) F_U(\mathcal{Y}) V(z) ,$$

où  $P(z) = (z^4 - 2z^3 + z)/24$  et  $V(z)$  vérifie  $d^4V/dz^4 = H$  et les conditions aux limites  $V = d^2V/dz^2 = 0$  en  $z = 0$  et  $z = 1$ . Dans le cas  $H(z) = z$ , on a  $V(z) = (3z^5 - 10z^3 + 7z)/360$ .

Au **second ordre**, les équations de température et de salinité restent inchangées. Les solutions  $T_{(2)}$  et  $S_{(2)}$  dépendent maintenant du forçage dynamique puisqu'elles font intervenir l'expression de  $\Psi_{(1)}$ . On obtient :

$$\begin{aligned} T_{(2)} &= a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T \left[ \left( a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right) Q + E^{-1} c_{(1)} \Omega F_U W \right] \\ S_{(2)} &= \frac{1}{Le} \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \left[ \left( a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right) (Q + C_Q) + E^{-1} c_{(1)} \Omega F_U (W + C_W) \right] , \end{aligned}$$

où  $Q(z)$  et  $W(z)$  sont les polynômes déduits respectivement de  $P(z)$  et  $V(z)$  par simple intégration et vérifiant les conditions aux limites. On a  $Q(z) = (2z^5 - 5z^4 + 5z^2 - 2)/240$  et, si  $H(z) = z$ ,  $W(z) = (z^6 - 5z^4 + 7z^2 - 3)/720$ . Les constantes d'intégration sont choisies telles que la moyenne verticale de  $S_{(2)}$  soit nulle :  $C_Q = 1/240$  et  $C_W = 32/(21 * 720)$ .

Au **troisième ordre**, l'équation de salinité conduit à une condition de compatibilité, qui s'écrit comme précédemment :

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} S_{(1)} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \int_0^1 \Psi_1 \frac{\partial}{\partial z} S_2 dz = Le \left[ b_{(3)} F_S + k_{(1)}^2 \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{Y}^2} S_{(1)} \right] ,$$

soit en substituant les expressions de  $\Psi_1$  et  $S_2$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Le} \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} s_{(1)} &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \left[ b_{(3)} \int F_S d\mathcal{Y} \right] + \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \left[ k_{(1)}^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right] + \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \left[ C^2 (a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)})^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \left[ C_2^2 (E^{-1} c_{(1)})^2 \Omega^2 F_U^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right] - \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} \left[ 2C_3 E^{-1} c_{(1)} \Omega F_U \left( \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} - a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} s_{(1)} \right] , \end{aligned}$$

où les constantes  $C^2$ ,  $C_2^2$  et  $C_3$  sont définies par :

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{1}{Le^2} \int_0^1 P^2(z) dz = \frac{1}{Le^2} \frac{31}{24^2 \times 630} \\ C_2^2 &= \frac{1}{Le^2} \int_0^1 V^2(z) dz = \frac{1}{Le^2} \frac{2}{93555} \\ C_3 &= \frac{1}{Le^2} \int_0^1 V(z) P(z) dz = \frac{1}{Le^2} \frac{31}{24 \times 360 \times 84} . \end{aligned}$$

On voit ici que le profil vertical de forçage dynamique  $H(z)$  n'intervient que sous forme intégrée dans la valeur des constantes. Le comportement qualitatif de l'équation asymptotique n'en dépend donc pas.

### (c) Equations asymptotiques

On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\Theta(y, t) &= \epsilon \Theta_{(1)}(ky, \epsilon^2 kt) = \epsilon \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} T_{(1)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) , \\ \Sigma(y, t) &= \epsilon \Sigma_{(1)}(ky, \epsilon^2 kt) = \epsilon \frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}} S_{(1)}(\mathcal{Y}, z, \mathcal{T}) , \\ B(y) \quad \text{tel que} \quad \frac{d}{dy} B(y) &= \epsilon^3 \frac{d}{d\mathcal{Y}} B_{(3)}(ky) = \epsilon^3 b_{(3)} F_S(\mathcal{Y}) \\ \text{et} \quad \alpha(y) &= \epsilon \alpha_{(1)}(ky) = \epsilon a_{(1)} \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) .\end{aligned}$$

Le modèle asymptotique est obtenu en dérivant par rapport à la latitude  $\mathcal{Y}$  l'équation de température au premier ordre et l'équation de compatibilité pour la salinité obtenue au troisième ordre. Les deux équations se combinent pour former l'équation asymptotique suivante :

$$\begin{aligned}\frac{k}{Le} \frac{\partial}{\partial t} \Sigma(y, t) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ B(y) + k^2 \Sigma + C^2 (\alpha - \Sigma)^2 \Sigma + C_2^2 (E^{-1}c)^2 \Omega^2 F_U^2 \Sigma \right. \\ &\quad \left. - 2C_3 E^{-1}c \Omega F_U (\Sigma - \alpha) \Sigma \right\} .\end{aligned}$$

Dans cette équation, le dernier terme peut avoir une parité différente de celle des autres termes. En effet les forçages de surface thermique et salin sont symétriques par rapport à l'équateur ( $y = 0$ ), donc  $B(y)$  et  $\alpha(y)$  sont des fonctions impaires en tant que, respectivement, intégrale et dérivée d'une fonction paire. Pour les trois premiers termes du membre de droite, la symétrie  $y \rightarrow -y$  occasionne un changement de solution du type  $\Sigma \rightarrow -\Sigma$ , c'est-à-dire une solution antisymétrique pour la dérivée du champ de salinité et symétrique pour le champ de salinité lui-même. Le quatrième terme est également antisymétrique que  $\Omega$  et  $F_U$  soient symétriques ou antisymétriques. Le dernier terme est de même parité que les autres si  $\Omega$  et  $F_U$  sont de parité contraire. Si elles ont même parité, la symétrie du système est détruite. Physiquement,  $f_0 \Omega$  représente la rotation terrestre, antisymétrique par rapport à l'équateur, et  $F_U$  caractérise le forçage par le vent et peut être considéré symétrique en première approximation. Les deux fonctions sont donc de parité inverse et la symétrie du système préservée.

Il suffit que l'un des profils de forçage  $F_T$ ,  $F_S$  ou  $F_U$  présente une asymétrie pour que la symétrie du système soit perdue. Dans la réalité bien sûr aucun de ces forçage n'est symétrique, en particulier la zone de convergence intertropicale est décalée par rapport à l'équateur. Si, par exemple,  $\Omega F_U$  est asymétrique, le flux de sel induit par le forçage

dynamique (quatrième terme) et le flux correspondant à l'interaction entre advection thermohaline et forçage dynamique (cinquième terme) brisent la symétrie du système et aucune solution rigoureusement symétrique ne peut être observée.

Ici, nous considérons des forçages dynamiques présentant une symétrie par rapport à l'équateur et seul le cinquième terme est susceptible de présenter une parité différente de celle des autres termes.

### VI.2.3 Structure bifurcatoire du modèle asymptotique

Le comportement de ce nouveau modèle asymptotique est étudié et comparé à celui du modèle sans rotation ni forçage dynamique. Pour ce faire, on calcule avec AUTO (voir IV.3.1) les solutions de l'équation asymptotique écrite ci-dessus, régularisée par l'addition d'un terme d'hyperdiffusivité de type  $-\gamma^2 \partial^4 \Sigma / \partial^4 y$  dans le membre de droite. Cette équation diffère de celle étudiée en IV.3 par la présence des deux derniers termes.

#### (a) Implantation de l'équation asymptotique

A nouveau, les notations employées dans AUTO diffèrent de celles présentées ci-dessus.

On substitue à  $B(y)$  et  $\alpha(y)$  les expressions  $b \int F_S(\mathcal{Y}) d\mathcal{Y}$  et  $a dF_T(\mathcal{Y})/d\mathcal{Y}$ . La variable considérée est la grandeur  $\sigma = \Sigma/a$ .

Avec ces notations, l'équation asymptotique s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{Y}^2} \sigma &= \frac{1}{\gamma_0^2} \left[ r \int F_S d\mathcal{Y} + k^2 \sigma + \mu^2 \left( \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) - \sigma \right)^2 \sigma + p^2 \Omega^2 F_U^2 \sigma \right. \\ &\quad \left. - q \Omega F_U \left( \sigma - \frac{d}{d\mathcal{Y}} F_T(\mathcal{Y}) \right) \sigma \right], \end{aligned}$$

où

$$\mu^2 = C^2 a^2, \quad r = \frac{b}{a}, \quad p^2 = (E^{-1}c)^2 C_2^2, \quad q = 2 E^{-1}c a C_3 \quad \text{et} \quad \gamma_0 = k\gamma.$$

Les deux conditions aux limites associées à cette équation sont :  $\sigma(-\pi) = \sigma(\pi) = 0$ .

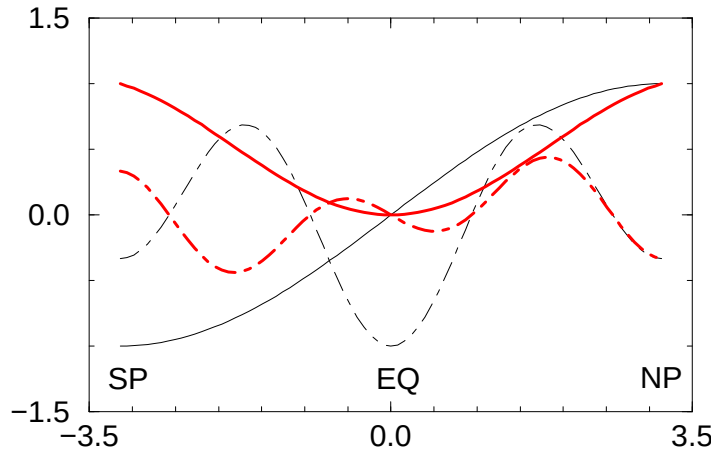
A forçage dynamique fixé,  $p^2$  dépend des autres paramètres et s'exprime par :

$$p^2 = C^2 C_2^2 q^2 / (4 C_3^2 \mu^2).$$

Il y a donc cinq paramètres de contrôle ( $k, \mu, r, q, \gamma_0$ ), le paramètre  $q$  intégrant la valeur du nombre d'Ekman et l'intensité du forçage dynamique. Il n'est pas ici possible de découpler les intensités de la rotation et du forçage dynamique.

Les profils de forçage appliqués sont les mêmes qu'en VI.1.2. Pour les forçages salin et thermique :  $F_S(\mathcal{Y}) = F_T(\mathcal{Y}) = \cos(\mathcal{Y})$ . Le forçage dynamique sera soit symétrique

par rapport à l'équateur de forme  $F_U(\mathcal{Y}) = -2 [0.5 \cos(\mathcal{Y}) + \cos(2\mathcal{Y})]/3$ , soit antisymétrique de profil  $F_U(\mathcal{Y}) = \sin(\mathcal{Y}/2)$ . La rotation pourra être constante  $\Omega(\mathcal{Y}) = 1$  ou antisymétrique  $\Omega(\mathcal{Y}) = 2 \sin(\mathcal{Y}/3)/\sqrt{3}$ . Les quatre produits  $F_U(\mathcal{Y}) \Omega(\mathcal{Y})$  considérés sont tracés en figure VI.8. On a vu en VI.2.2(c) que, selon la parité de ce produit, la symétrie du modèle asymptotique est ou non préservée. Dans toutes les simulations, le rapport d'aspect et le coefficient d'hyperdiffusivité seront fixés à  $k = 0.2$  et  $\gamma_0 = 0.1$ .



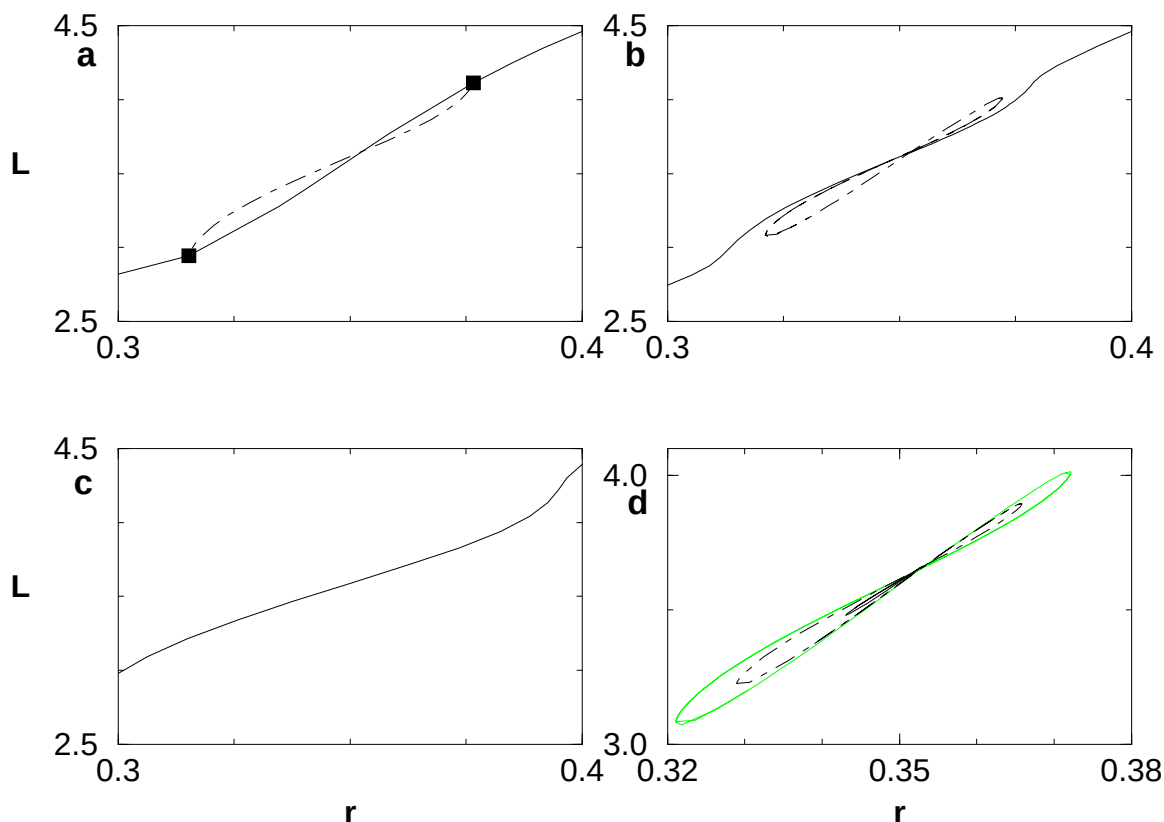
**Figure VI.8** : Profils du produit forçage dynamique  $\times$  rotation en fonction de la latitude  $\mathcal{Y}$ . En trait mixte fin :  $F_U$  symétrique,  $\Omega$  constant. En trait fin :  $F_U$  antisymétrique,  $\Omega$  constant. En trait mixte gras :  $F_U$  symétrique,  $\Omega$  antisymétrique. En trait gras :  $F_U$  et  $\Omega$  antisymétriques.

### (b) Cas $F_U$ symétrique et rotation constante

On considère en premier lieu le cas  $\Omega(\mathcal{Y}) = 1$  et  $F_U(\mathcal{Y}) = -2 [0.5 \cos(\mathcal{Y}) + \cos(2\mathcal{Y})]/3$ . Le produit  $F_U(\mathcal{Y}) \times \Omega(\mathcal{Y})$  est symétrique et non-monotone entre l'équateur et chacun des pôles (figure VI.8, trait mixte fin). Pour différentes intensités du forçage dynamique, caractérisées par  $q$ , on détermine les branches de solutions en fonction de l'intensité relative du forçage salin  $r$ . Deux intensités de forçage thermique sont considérées :  $\mu = 1$  et  $\mu = 1.5$ . Comme en IV.3, les diagrammes de bifurcation sont tracés dans le plan  $(r, L)$ ,  $L$  étant la norme de la solution (voir page 67). Dans cette représentation, les deux branches de solutions asymétriques issues d'un point de *bifurcation fourche* sont confondues.

Le cas  $\mu = 1$  est présenté en figure VI.9. Les diagrammes de bifurcation sont présentés pour des valeurs croissantes de  $q$  :  $q = 0$ ,  $q = 0.015$  et  $q = 0.15$ . Le quatrième graphe représente une seule branche de solutions pour  $q = 0.015$ ,  $q = 0.0375$  et  $q = 0.063$ .

L'effet de la paramétrisation du forçage dynamique est flagrant. Dans ce cas, le dernier terme de l'équation asymptotique n'a pas la même parité que les quatre autres (voir explications en VI.2.2(c)). Quand  $q \neq 0$ , la symétrie du système est détruite et aucune solution n'est rigoureusement symétrique. La transition entre solutions quasi symétriques et solutions asymétriques s'opère de façon continue sur la branche initiale. On observe, en comparant les diagrammes VI.9.a et VI.9.b, que la branche initiale se déforme quand  $q = 0.015$  et devient superposable à la branche asymétrique issue du point de *bifurcation fourche* quand  $q = 0$ . Une seconde branche existe et constitue une courbe fermée déconnectée de la solution initiale.

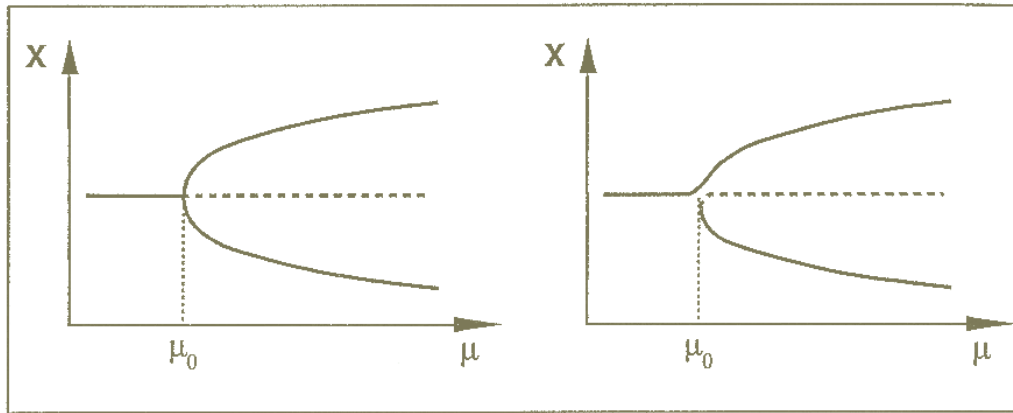


**Figure VI.9** : Diagrammes de bifurcation dans la plan  $(r, L)$  de l'équation asymptotique régularisée pour les paramètres  $k = 0.2$ ,  $\mu = 1$ ,  $\gamma_0 = 0.1$  et différentes valeurs de  $q$ . Le forçage dynamique est symétrique, la rotation constante. Les différents traits distinguent les branches de solutions sans indiquer leur stabilité. En **a** :  $q = 0$ . En **b** :  $q = 0.015$ . En **c** :  $q = 0.15$ . En **d** : Seule l'orbite détachée est tracée. La courbe la plus grande correspond à  $q = 0.015$ , l'intermédiaire à  $q = 0.0375$  et la plus réduite à  $q = 0.063$ .

La situation observée relève du cas général de perturbation par un terme asymétrique

d'un système présentant une *bifurcation fourche surcritique*. Comme représenté en figure VI.10, les trois branches de solutions se séparent. Une transition continue s'opère entre la branche initiale de solutions quasi symétriques et l'une des deux branches de solutions asymétriques. La seconde branche de solutions asymétriques et la branche de solutions faiblement symétriques instables fusionnent en un *point limite*. Le système ne présentant plus de symétrie, les deux solutions asymétriques existant pour une même valeur des paramètres ne sont pas symétriques l'une de l'autre.

Ici une telle "séparation" des branches de solutions se produit en chacun des deux points de *bifurcation fourche*, ce qui donne naissance à une courbe fermée de solutions. Sur cette orbite, les solutions situées dans le prolongement de la branche initiale sont faiblement asymétriques et instables, les autres sont asymétriques et stables. L'orbite détachée va diminuant quand le forçage dynamique augmente (voir figure VI.9.d). Elle a totalement disparu quand  $q = 0.15$ . Sur la branche initiale, les solutions sont stables. Leur degré d'asymétrie varie selon l'amplitude du forçage salin.



**Figure VI.10 :** A gauche : Diagramme d'une *bifurcation fourche* surcritique. A droite : Diagramme déformé résultant d'une perturbation asymétrique du système

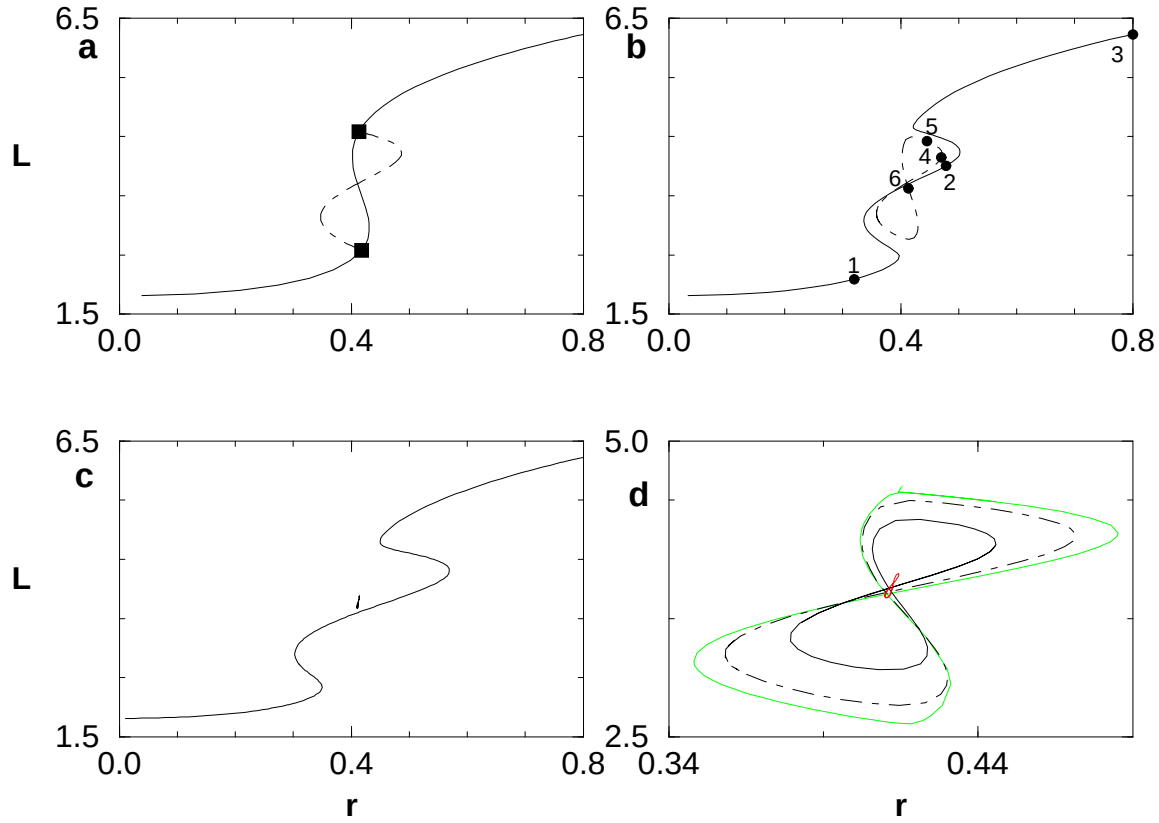
L'inclusion d'une rotation et d'un forçage dynamique symétriques a un effet analogue dans le cas  $\mu = 1.5$ . La figure VI.11. présente les diagrammes de bifurcation obtenus pour  $q = 0.015$ ,  $q = 0.15$  et  $q = 0.75$ . Le dernier graphe représente seulement l'orbite détachée pour  $q = 0.015$ ,  $q = 0.15$ ,  $q = 0.42$  et  $q = 0.75$ .

De même que précédemment, les points de *bifurcation fourche* disparaissent quand le forçage dynamique est introduit. Une orbite de solutions se détache. Cette orbite diminue jusqu'à disparaître quand  $q$  augmente (voir figure VI.11.c et d). Sur la branche initiale, quatre *points limites* apparaissent. En parcourant cette branche du bas à gauche vers le haut à droite, les solutions sont instables entre le premier et le se-

cond des *points limites* et entre le troisième et le dernier (portions de branche où  $L$  augmente quand  $r$  diminue). Elles sont stables partout ailleurs.

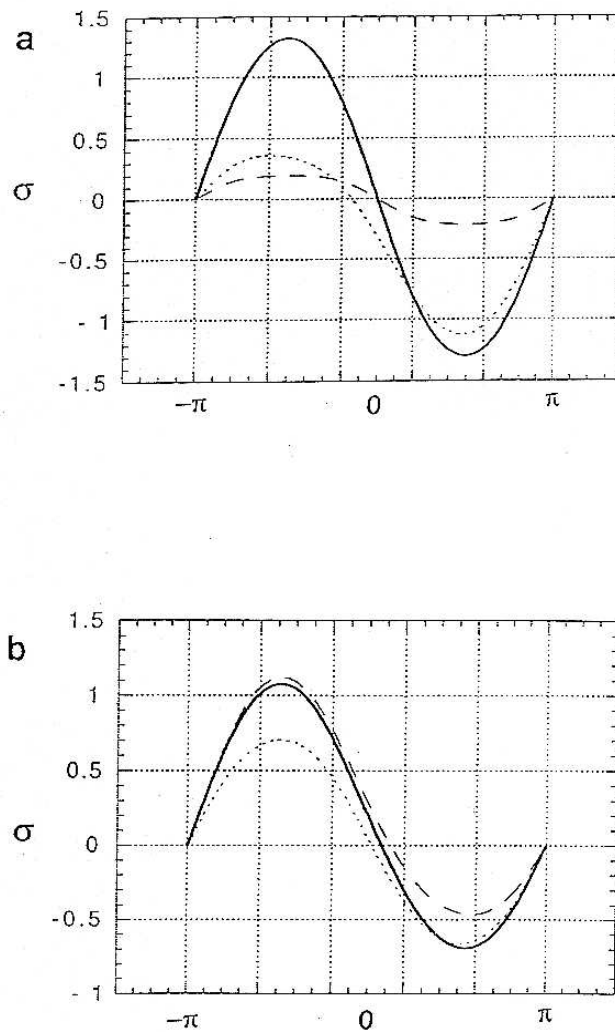
Afin d'observer l'évolution des solutions sur chacune des branches, on a représenté en figure VI.12 les solutions  $\sigma$  correspondant aux points numérotés sur la figure VI.11.**b**. Ces résultats confirment le passage continu entre solutions quasi symétriques et solutions asymétriques le long de la branche initiale. Sur la branche initiale (figure VI.12.**a**), trois solutions stables sont tracées. Le point **1** correspond à une solution  $\sigma$  quasi symétrique (tirets). Puis la branche se déforme de façon à atteindre le point **2** où  $\sigma$  est asymétrique (courbe en pointillés). Enfin la quasi-symétrie de  $\sigma$  est rétablie au point **3** (courbe en trait plein). La valeur de  $\sigma$  est en ce point supérieure puisque le forçage salin est plus intense. Sur la branche isolée (figure VI.12.**b**), les solutions sont quasi symétriques sur la portion proche de la branche symétrique dans le cas  $q = 0$  (point **6**, courbe en pointillés) et asymétriques ailleurs (points 4 et 5).

Dans cette configuration, il est possible d'observer des solutions asymétriques et des équilibres multiples sans franchissement d'un point de *bifurcation fourche*. En effet, le



**Figure VI.11** : Diagrammes de bifurcation dans le plan  $(r, L)$  de l'équation asymptotique régularisée pour les paramètres  $k = 0.2$ ,  $\mu = 1.5$ ,  $\gamma_0 = 0.1$  et différentes valeurs de  $q$ . Le forçage dynamique est symétrique, la rotation constante. En **a** :  $q = 0$ . En **b** :  $q = 0.15$ . En **c** :  $q = 0.75$ . En **d** : Seule l'orbite détachée est tracée. De la plus grande à la plus petite, les courbes correspondent à  $q = 0.015$ ,  $q = 0.15$ ,  $q = 0.42$  et  $q = 0.75$ .





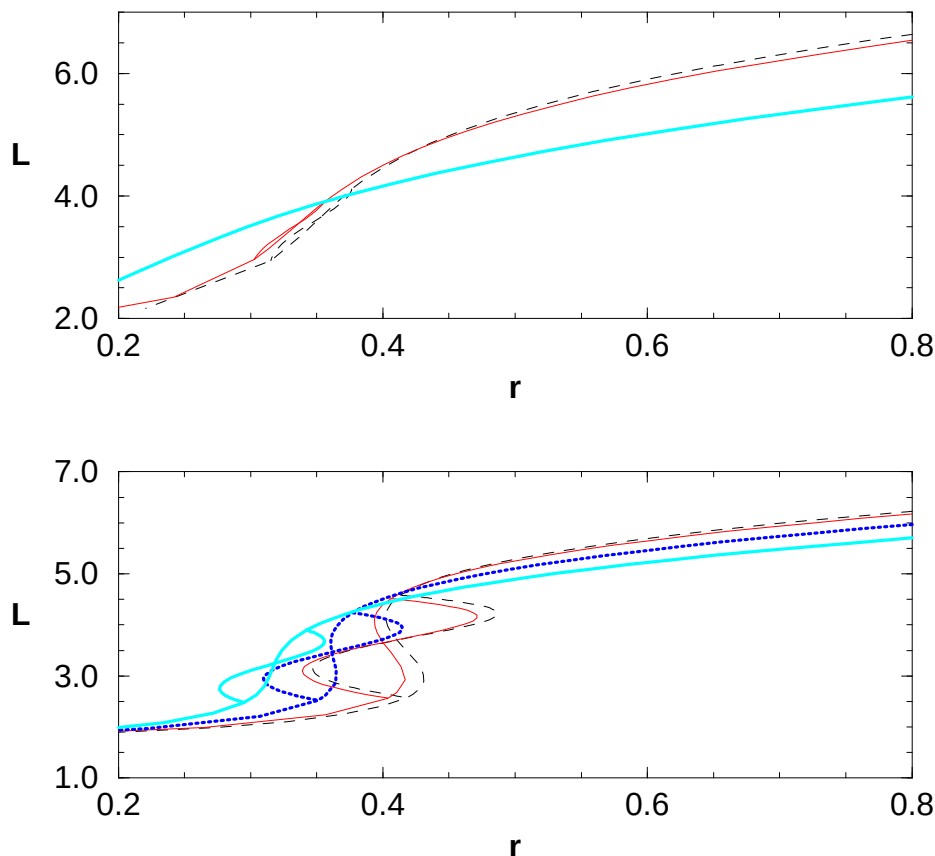
**Figure VI.12 :** Solutions  $\sigma(\mathcal{Y})$  pour différents points notés sur le diagramme de bifurcation de la figure VI.11.b.. En **a** : Points **1** (en tirets), **2** (en pointillés) et **3** (en trait plein). En **b** : Points **4** (en tirets), **5** (en trait plein) et **6** (en pointillés).

Le système est non-symétrique de par la formulation même de l'équation asymptotique. Une fois la branche isolée disparue, c'est l'émergence de *points limites* sur la branche de solutions initiale qui permet l'existence d'équilibres multiples. D'après la forme de la branche principale, il semble que deux équilibres seulement puissent être observés pour les mêmes valeurs des paramètres. L'un est quasi symétrique, le second asymétrique.

Avec ce forçage dynamique, augmenter  $q$  entraîne la disparition de la seconde branche de solutions, mais favorise la déformation de la branche initiale et l'existence d'équilibres multiples. De ce point de vue, augmenter  $q$  équivaut à augmenter  $\mu$ . Ainsi pour  $\mu = 1$  et  $q = 0.75$ , des *points limites* existent sur la branche de solutions et des équilibres multiples sont possibles.

(c) Cas  $F_U$  antisymétrique et rotation constante

On étudie maintenant le cas  $\Omega(\mathcal{Y}) = 1$  et  $F_U(\mathcal{Y}) = \sin(\mathcal{Y}/2)$ . Le produit  $F_U(\mathcal{Y}) \times \Omega(\mathcal{Y})$  est antisymétrique et monotone (voir figure VI.8, trait fin). La symétrie du système est inchangée en présence de forçage dynamique ( $q \neq 0$ ). En figure VI.13, sont représentés les diagrammes de bifurcation obtenus pour  $\mu = 1$  et  $\mu = 1.5$  dans le plan  $(r, L)$ . Les différentes valeurs de  $q$  sont précisées dans la légende.



**Figure VI.13 :** Diagrammes de bifurcation dans le plan  $(r, L)$  de l'équation asymptotique régularisée pour les paramètres  $k = 0.2$ ,  $\gamma_0 = 0.1$  et différentes valeurs de  $\mu$  et  $q$ . En **a** :  $\mu = 1$ . Les valeurs de  $q$  sont pour les “paires de courbes” de droite à gauche :  $q = 0$ ,  $q = 0.1$  et  $q = 1$ . En **b** :  $\mu = 1.5$ . Les valeurs de  $q$  sont pour les “paires de courbes” de droite à gauche :  $q = 0$ ,  $q = 0.1$ ,  $q = 0.5$  et  $q = 1$ . Le forçage dynamique est antisymétrique, la rotation constante.

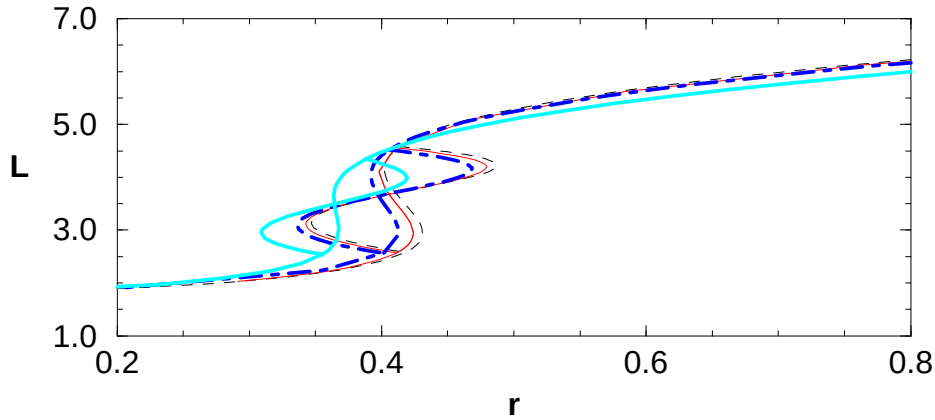
Ici, tous les termes de l'équation ont même parité et l'ajout du forçage dynamique n'altère pas la structure bifurcatoire du système. Les deux points de *bifurcation fourche* sont toujours observés en présence de forçage dynamique. Celui-ci induit néanmoins un

déplacement de la structure. Augmenter la valeur de  $q$  revient à diminuer celle de  $\mu$  : les points de bifurcation apparaissent à plus faible valeur de  $r$  et tendent à fusionner quand  $q$  augmente. L'addition d'un forçage dynamique antisymétrique défavorise donc l'existence d'équilibres multiples.

**(d) Cas  $F_U$  symétrique et rotation antisymétrique**

On considère ici un forçage dynamique symétrique  $F_U(\mathcal{Y}) = -2 [0.5 \cos(\mathcal{Y}) + \cos(2\mathcal{Y})]/3$  et une rotation asymétrique  $\Omega(\mathcal{Y}) = 2 \sin(\mathcal{Y}/3)/\sqrt{3}$ . Il s'agit du cas géophysique idéal. Le produit  $F_U(\mathcal{Y}) \times \Omega(\mathcal{Y})$  est antisymétrique et non-monotone entre l'équateur et chacun des pôles (voir figure VI.8, trait mixte gras). La symétrie du système n'est pas détruite par la présence de rotation et de forçage dynamique. Les diagrammes de bifurcation pour une intensité du forçage thermique  $\mu = 1.5$  et différentes valeurs de  $q$  précisées en légende sont représentés en figure IV.14.

La structure bifurcatoire du modèle n'est pas altérée, mais déplacée dans la même direction que dans le cas précédent (paragraphe c). Néanmoins ce déplacement est moindre. De plus grandes valeurs du forçage dynamique sont nécessaires pour éviter l'existence d'équilibres multiples. Cette plus grande persistance de la structure bifurcatoire provient sans doute de la non-monotonie du produit  $F_U(\mathcal{Y}) \times \Omega(\mathcal{Y})$ .

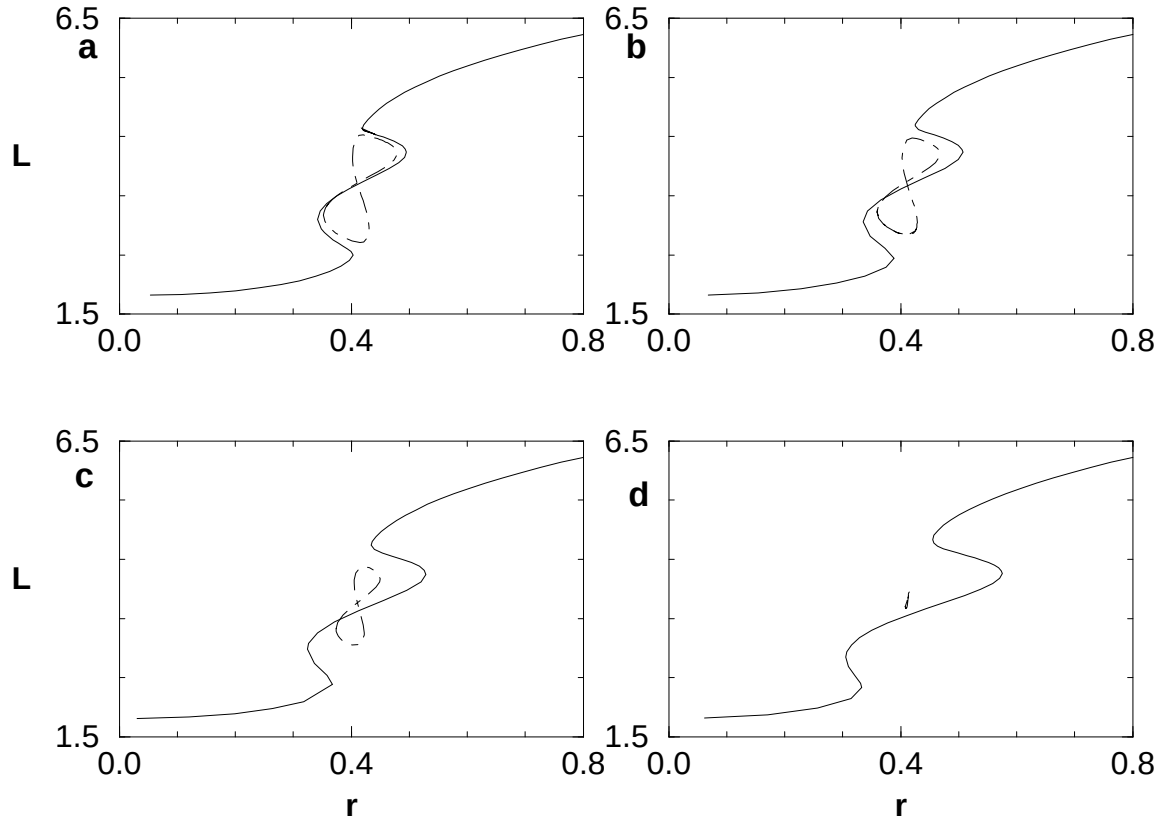


**Figure VI.14 :** Diagrammes de bifurcation dans le plan  $(r, L)$  de l'équation asymptotique régularisée pour les paramètres  $k = 0.2$ ,  $\mu = 1.5$ ,  $\gamma_0 = 0.1$  et les valeurs de  $q$  suivantes pour les “paires de courbes” de droite à gauche :  $q = 0$ ,  $q = 0.13$ ,  $q = 0.32$  et  $q = 1.3$ . Le forçage dynamique est symétrique, la rotation antisymétrique.

(e) Cas  $F_U$  et rotation antisymétriques

Le dernier cas considéré  $F_U(\mathcal{Y}) = \sin(\mathcal{Y}/2)$  et  $\Omega(\mathcal{Y}) = 2 \sin(\mathcal{Y}/3)/\sqrt{3}$  introduit une asymétrie dans le modèle. Le produit  $F_U(\mathcal{Y}) \times \Omega(\mathcal{Y})$  est symétrique et monotone entre l'équateur et chacun des pôles (voir figure VI.8, trait gras).

La figure VI.15 présente les diagrammes de bifurcation obtenus pour  $\mu = 1.5$  et différentes valeurs de  $q$  précisées dans la légende.



**Figure VI.15 :** Diagrammes de bifurcation dans le plan  $(r, L)$  de l'équation asymptotique régularisée pour les paramètres  $k = 0.2$ ,  $\mu = 1.5$ ,  $\gamma_0 = 0.1$  et différentes valeurs de  $q$ . Le forçage dynamique et la rotation sont antisymétriques. En **a** :  $q = 0.087$ . En **b** :  $q = 0.22$ . En **c** :  $q = 0.43$ . En **d** :  $q = 0.87$ .

Qualitativement les diagrammes obtenus sont analogues au premier cas étudié, mais la structure semble légèrement plus robuste à l'augmentation du forçage dynamique. On observe nettement sur ces figures que l'orbite détachée reste à la même position, mais se réduit de plus en plus, alors que la branche initiale se déplace vers la droite en haut et vers la gauche en bas. En parcourant la branche initiale du bas vers le haut, on

rencontre deux intervalles de forçage salin sur lesquels on peut observer deux équilibres, l'un quasi symétrique, l'autre asymétrique. Quand  $q$  augmente, l'intervalle situé entre le premier et le second *point limite* diminue tandis que l'intervalle compris entre les deux derniers *points limites* s'étend.

### (f) Synthèse

Quand le produit  $F_U(\mathcal{Y}) \times \Omega(\mathcal{Y})$  est une fonction antisymétrique, tous les termes de l'équation asymptotique ont même parité et la structure catastrophique révélée en IV.3 est maintenue : sur la branche initiale, les solutions sont symétriques ; des points de *bifurcation fourche* apparaissent pour une valeur suffisante du forçage salin et donnent naissance à des branches de solutions asymétriques. Néanmoins l'augmentation du forçage dynamique tend à faire disparaître les points de *bifurcation fourche* à l'origine des équilibres asymétriques. Cet effet semble être plus prononcé quand le produit  $F_U(\mathcal{Y}) \times \Omega(\mathcal{Y})$  est une fonction monotone hémisphère par hémisphère.

Quand le produit  $F_U(\mathcal{Y}) \times \Omega(\mathcal{Y})$  est une fonction symétrique, le dernier terme de l'équation asymptotique (voir VI.2.2.(c)) a une parité différente des autres termes et brise la symétrie du modèle. Aucune solution n'est rigoureusement symétrique. Le forçage dynamique tend à supprimer la seconde branche de solutions mais favorise l'existence d'équilibres multiples par apparition de *points limites* sur la branche de solutions initiale.

## VI.3 Conclusion

On a présenté un modèle bidimensionnel incluant une paramétrisation de la rotation et du forçage dynamique. Un développement asymptotique en a été dérivé dans un cas simplifié. La formulation du terme de Coriolis dans l'équation du mouvement est la même pour les deux modèles, mais la composante de la vitesse perpendiculaire au plan du modèle évolue dans le cas bidimensionnel tandis qu'elle est imposée dans le cas asymptotique.

Les comportements des deux modèles – bidimensionnel et asymptotique – ont été comparés. Ils subissent des changements de structure analogue quand on introduit une paramétrisation de la rotation et du forçage dynamique.

Quand le produit des profils de vent et de rotation est symétrique, une asymétrie est introduite dans le modèle et la transition par *bifurcation fourche* est supprimée. La structure modifiée se compose d'une branche stable et d'une courbe fermée qui disparaît quand le forçage dynamique augmente. Quand ce produit est antisymétrique, le système conserve sa parité initiale. Les points de bifurcation et branches de solutions sont décalés dans l'espace des paramètres sans modification topologique.

Ces caractéristiques sont parfaitement observées dans l'étude de l'équation asymptotique. Dans le cas du modèle bidimensionnel, on n'a jamais pu observer la courbe

détachée qui probablement disparaît à des nombres de Reynolds extrêmement faibles. Mais on observe, dans le cas d'une tension de vent symétrique, le maintien de la structure bifurcatoire initiale quand la rotation est antisymétrique et sa dissipation au profit d'une seule branche de solution quand la rotation est constante (donc symétrique) (voir figure VI.6). Dans le cas d'une tension de vent antisymétrique et d'une rotation constante, les points de bifurcation n'ont pas été localisés, probablement en raison d'un trop fort nombre de Reynolds ou d'un trop faible nombre d'Ekman. Du reste, avec les profils de forçage et rotation utilisés, l'étude de l'équation asymptotique a montré que la structure bifurcatoire était moins persistante soumise à une tension de vent antisymétrique et une rotation symétrique qu'à une tension de vent symétrique et une rotation antisymétrique. Ceci est attribué à la non-monotonie sur l'hémisphère du produit des profils de tension de vent et de rotation dans le second cas, qui semble favoriser la présence d'équilibres multiples de la circulation.

Notons que le cas géophysique idéal (rotation antisymétrique et tension de vent symétrique) correspond à un produit des profils de tension de vent et de rotation antisymétrique et ne doit donc pas perturber la structure bifurcatoire du modèle.

Il serait intéressant d'observer l'effet de l'inclusion de forçage dynamique et de rotation dans le modèle quand la structure catastrophique est plus complexe et présente des *points limites*. Des profils de forçage différents peuvent aussi être testés à moindre coût grâce à l'approche asymptotique.

Le bon accord entre les modifications observées pour les deux modèles en présence de rotation et de forçage dynamique indique que l'équation asymptotique est un outil utile et relativement fiable pour tester l'inclusion de nouvelles paramétrisations.

Mais il faut garder à l'esprit que l'étude présente ne tend qu'à déterminer la structure bifurcatoire idéale du modèle. Dans la nature, les échanges à l'interface océan-atmosphère sont en effet loin d'être symétriques ou antisymétriques par rapport à l'équateur. Il est donc intéressant de constater qu'ici l'introduction d'une asymétrie dans le modèle ne compromet pas les possibilités d'observer des équilibres multiples.

## CHAPITRE VII

# Conclusion

Fruit des effets antagonistes des forçages salin et thermique en surface, la circulation thermohaline océanique est susceptible de connaître des transitions entre divers modes opératoires. C'est du moins ce que suggèrent divers types d'enregistrements paléoclimatiques. Cette hypothèse est étayée par les résultats de simulations numériques qui révèlent une forte sensibilité de cette circulation. Des équilibres multiples sont observés dans les modèles océaniques sous un même forçage atmosphérique. Une variabilité naturelle se développe sur diverses échelles de temps. Des oscillations peuvent également être excitées par un forçage stochastique. Dans les modèles climatiques couplés océan-atmosphère, divers modes opératoires de la circulation sont possibles et un comportement oscillatoire peut apparaître.

Le travail présenté ici s'inscrit dans une série d'études visant à déterminer le comportement dynamique de modèles simples de la circulation thermohaline. Le but premier de ces études est une meilleure compréhension des mécanismes mis en jeu dans l'existence des équilibres multiples et le développement de la variabilité interne du système.

L'axe principal de mon travail fut la comparaison entre les équilibres, déterminés par simulation numérique, de modèles bidimensionnels (latitude-profondeur) et ceux d'équations asymptotiques monodimensionnelles dérivées de ces modèles dans la limite d'une couche océanique fine.

Une premier modèle bidimensionnel non-rotatif a été étudié. Développer ce modèle dans la limite d'un petit rapport d'aspect permet de réduire le problème à un océan verticalement homogène au premier ordre en température et en salinité. La seule équation d'évolution de la salinité moyennée verticalement permet de rendre compte de l'évolution du modèle. En chaque point, cette équation possède une ou trois solutions. Une solution au plus est définie dans tout le domaine. Les autres n'existent que dans certains intervalles de latitude. Cette équation est étudiée selon deux approches complémentaires.

Tout d'abord, l'addition d'un terme d'hyperdiffusivité a permis de régulariser l'équation, c'est-à-dire de relier entre elles ou avec les bords du bassin les branches de so-

lutions *localement définies*. Pour un forçage de surface particulier, la structure bifurcatoire de cette équation asymptotique régularisée a été déterminée par une méthode de suivi des paramètres. L'accord entre la structure catastrophique obtenue et celle du modèle bidimensionnel est très bon. Dans les deux cas, la catastrophe à l'origine de l'existence de solutions asymétriques sous un forçage symétrique par rapport à l'équateur est l'émergence de points de *bifurcation de type fourche*. Des équilibres multiples symétriques peuvent être observés par émergence de *points limites* sur la branche de solutions initiale.

On a ensuite étudié les solutions de l'équation asymptotique non régularisée. Une interprétation géométrique permet de tracer une "cartographie" des différentes solutions asymptotiques connaissant le forçage de surface. La topologie des solutions numériques est interprétée par comparaison à cette prédiction théorique. On montre ainsi que l'équation asymptotique monodimensionnelle constitue un excellent outil d'explication et de prédiction des résultats numériques. De plus, il apparaît que tous les comportements observés à relativement faible rapport d'aspect du bassin sont des déploiements d'une même situation dégénérée, où deux équilibres symétriques et deux équilibres asymétriques sont *globalement définis* dans le domaine. Cette situation correspond à la limite d'une couche de fluide d'épaisseur nulle.

D'autre part, un modèle de boîtes a été formulé, qui représente l'exacte discrétisation de l'équation asymptotique. Ce lien entre modèle de boîtes et modèle asymptotique dérivé d'un modèle fluide permet de comprendre qu'en dépit de leur grande simplicité les modèles de boîtes parviennent à reproduire des phénomènes physiques complexes.

Le modèle bidimensionnel a ensuite été complété par l'ajout de paramétrisations de la rotation et du forçage dynamique en surface. Deux formulations de ces paramétrisations sont utilisées, la plus simple permettant la dérivation d'un développement asymptotique dans la limite d'une couche océanique fine. L'équation asymptotique obtenue est analogue à la précédente mais comporte deux termes supplémentaires. Sa structure bifurcatoire a été étudiée. Selon les parités des profils de vent et de rotation, le modèle peut perdre sa symétrie. Dans ce cas tous les équilibres sont au moins faiblement asymétriques et on peut observer des équilibres multiples grâce à l'apparition de *points limites* sur l'unique branche de solutions. Dans le cas géophysique idéal d'une rotation antisymétrique et d'un forçage de vent symétrique par rapport à l'équateur, le comportement du modèle n'est pas topologiquement modifié par l'introduction des nouvelles paramétrisations. Les branches de solutions et les points de bifurcation sont seulement déplacés dans l'espace des paramètres de contrôle. Les résultats obtenus avec le modèle bidimensionnel correspondant sont tout à fait compatibles avec les indications livrées par le comportement du modèle asymptotique.

Il apparaît donc que l'utilisation d'un modèle asymptotique constitue une approche intéressante pour mieux comprendre les résultats de modèles complexes et pour tester l'introduction d'une paramétrisation dans un modèle.

Peu coûteuse, cette approche permet d'envisager des études exhaustives de sensibilité



à la valeur des paramètres, mais aussi aux différents profils de forçage. En effet, des études numériques ont montré que certains forçages favorisaient l'existence d'équilibres multiples et/ou l'occurrence d'oscillations. De nouvelles formulations des conditions de surface ont été proposées pour limiter cette forte sensibilité (Rahmstorf et Willebrand (1995)). Ces conditions mériteraient d'être étudiées à l'aide de l'approche asymptotique.

Cette méthode peut être utilisée pour analyser des résultats numériques déjà obtenus mais aussi préliminairement aux expériences. Elle permet en effet de déterminer a priori les zones de l'espace des paramètres susceptibles de produire tel ou tel comportement dynamique.

Des développements théoriques restent également à mener. Ainsi l'équation asymptotique n'est plus valide quand des fronts ou des couches limites se développent entre deux branches de solutions. Il serait intéressant d'effectuer l'étude de couche limite correspondante. Les branches seraient ainsi prolongées ou raccordées par couche limite. Cette analyse peut justifier la méthode actuelle d'ajout d'un terme d'hyperdiffusivité pour régulariser l'équation.

D'autre part il serait envisageable d'étendre la méthode asymptotique à la réduction de problèmes tridimensionnels en modèles asymptotiques bidimensionnels. Ce type d'études est conduit par Young (1994) dans le cadre de la couche de mélange. Le jeu d'équations obtenu pourrait permettre d'interpréter des résultats issus de simulations numériques tridimensionnelles ou des observations. Comme dans sa formulation monodimensionnelle, le modèle asymptotique bidimensionnel pourrait certainement être interprété en termes de flux horizontaux. Des diagnostics d'analyse des flux à l'interface océan-atmosphère pourraient certainement découler de cette formulation.

Nombreuses sont donc les branches d'études qui émergent de cette approche. Souhaitons qu'elles soient suivies sans bifurcation !



# **Annexe A**

Revue : La Convection Thermohaline  
dans les Modèles de Circulation  
Générale Océanique



# REVIEW OF THERMOHALINE CONVECTION IN OGCMs

by

Laurence FLEURY

CERFACS, 42 av. G. Coriolis, 31057 Toulouse cedex, FRANCE

The analysis of paleoclimatic data (ice cores,...) reveals a great variability in the climate system. The oceans play an essential role in the dynamics of the climate through their large capacity for the storage and the transport of heat, moisture and CO<sub>2</sub>. In particular, changes in the meridional transport of heat by the oceans play a major role in this variability. The thermohaline circulation, which results from both the internal oceanic dynamics and the atmospheric forcing at the surface, provides the dominant part of this transport. The temperature and salinity forcings have opposite effects on the density field. At low latitudes, the surface waters become heavier due to the salinity or freshwater forcing (i.e. evaporation minus precipitation), but lighter due to the heating. The effects are inverted at high latitudes. Hence, it has been speculated since the start of this century (Chamberlin, 1906) that this circulation may have operated in other quasi-stable modes than the actual one. The alternation of glacial/interglacial periods could be linked to successive reversals from one mode to another.

During the last decades, the catastrophic structure and the existence of multiple equilibria of the thermohaline circulation was established by several studies, using a great variety of tools. The authors employ either simplified models of the thermohaline equations – as asymptotic expansions of Boussinesq 2D equations (Cessi & Young (1992)), box-models (Stommel (1961), Welander (1986), ...), 2D ( meridional-vertical plane ) numerical models (Thual & McWilliams (1992), Marotzke, Welander & Willebrand (1988), ...) – or 3D codes (Bryan(1986), Marotzke & Willebrand (1991), ...). Several authors have observed in numerical experiments phenomena such as oscillations on different time scales, flushes, ... A table in Annex I recapitulates the different studies cited here and the observed phenomena. The relative importance of freshwater flux versus temperature forcing is commonly seen as the dominant factor in determining the models' behaviour. The figure in Annex II presents schematically the different phenomena observed when this ratio increases.

The aim of this review is to record the behaviours obtained with 3D OGCMs (Ocean General Circulation Models) and the invoked mechanisms, discriminating 2D from 3D processes, convective from advective processes. The following parts of this paper will present briefly (1) the different models used, (2) the observed thermohaline circulation and the ability of the models to reproduce it and the observations of (3) polar halocline catastrophes, (4) multiple equilibria and (5) oscillations of the thermohaline circulation in the simulations with OGCMs.

## 1. PRESENTATION OF THE DIFFERENT OGCMs

### 1.1. *The Bryan-Cox-Semtner model of GDFL*

The Bryan-Cox-Semtner (BCS) primitive equations model is probably the most widely used and well tested OGCM.

Using coarse resolution, the nonlinear terms in the equation of motion are neglected. This fully prognostic Boussinesq model is subject to the rigid-lid approximation ( $w=0$  at the surface), which eliminates external gravity waves. The bottom and lateral walls are assumed insulating (zero heat and salt fluxes). At the lateral walls a no slip condition ( $\vec{u} = 0$ ) is applied, at the bottom a free slip condition ( $\partial\vec{u}/\partial z = 0$ ) is imposed.

A convective adjustment scheme is used to remove static instabilities. The Standard GDFL scheme, based on the mixing of neighbouring levels in the case of static instability, does not guarantee the complete vertical stability of the water column. Marotzke & Willebrand (1991) developed and used the Complete Mixing scheme, which is based on the same principle but guarantee complete vertical stability. The IVD (implicit vertical diffusion) scheme treats convective overturn as vertical diffusion: in the case of static instability, the ordinary diffusion coefficient is replaced by a very high one.

The equation of state is a third order polynomial approximation to the UNESCO equation of state introduced by Bryan & Cox (1972).

Most authors use asynchronous integration, i.e. different time steps for integrating the momentum equation and the tracer equations. The accelerated convergence scheme (ACS) of Bryan (1984) is used too. This method consists in integrating the tracer equations with different time steps following the levels. The time step is much longer in the deep ocean, which evolves on longer time scales.

The flexible structure of the model allows its utilisation in many configurations, as seen in Annex III. For the ACS method, the ratio of the time step at the bottom on the time step at the top layer is precised.

### 1.2. *The LSG circulation model of Max Planck Institut Hamburg*

This model (LSG) has evolved from an original concept by Hasselmann (1982). As climate study is concerned with large spatial and times scales, it is possible to filter the fast modes and to retain only the slow modes represented by the prognostic temperature and salinity equations. The horizontal velocity field is diagnosed using geostrophy. In the present version of the model, the fast waves are filtered by integrating the complete system of primitive equations, except the nonlinear advection of momentum, by an implicit time integration method. The free surface is treated prognostically, without invoking a rigid-lid approximation.

The standard convective adjustment scheme is based on the interchange of water properties of neighbouring cells in case of static instability. If the two cells have not the same size, the water in the thinner layer is exchanged with an equal volume of water from the thicker layer. In the thicker layer, the newly injected water and the residual water are mixed. This

procedure is applied successively to all pairs of layers, once per time step. It does not assure a complete stability of the water column.

The equation of state is the full UNESCO formula, the coast lines are realistic. Topography and a one-layer thermodynamic sea ice model are included.

### 1.3. *Frictional geostrophic models*

Such a model (RFGM) is used by Winton and Sarachik (1993). The horizontal velocity is diagnosed from the momentum balance between Coriolis force, pressure gradient and Rayleigh friction terms. The convective adjustment scheme used is analogous to the IVD scheme. The equation of state is a third order polynomial approximation of the UNESCO formula.

Winton (1993) uses an analogous model, with bilaplacian (LFGM) instead of Rayleigh friction terms. He uses both the third order polynomial equation of state established by Cox and Bryan and a linear equation of state.

For each study, the domain and integration features are presented in Annex III.

### 1.4. *The surface boundary conditions*

The surface boundary conditions are supposed to represent the action of the atmosphere on the ocean. The forcing is provided by the interface exchange of momentum (i.e. the effect of wind), salt (i.e. the amount evaporation minus precipitation) and heat.

The momentum forcing is usually formulated as purely zonal and function of latitude only, reflecting the major features of the observed wind stress. It is applied as a body force to the top grid box (usually 50 m).

The formulation of the temperature forcing takes into account the strong feedback between the Sea Surface Temperature (SST) and its atmospheric forcing, through the surface temperature dependence of latent and sensible heat fluxes and long-wave radiation. The surface heat flux is parametrized by a Newtonian relaxation law of the type:

$$\frac{\partial}{\partial z} T = \lambda (T - T_*)$$

where  $T_*$  is a prescribed temperature. As this forcing could be seen as a restored SST towards  $T_*$  on a time scale of  $1/\lambda$ , the correct  $T_*$  must be an AST (Atmospheric Surface Temperature) (Haney (1971), Power & Kleeman (1993)).

In some studies, a climatological SST (Levitus Atlas (1982)) is used as  $T_*$ . This underestimates the action of the atmosphere and becomes a way to recall the system towards the present day SST. Moreover, the AST or the SST used is based on present observations and it has no sense in paleoclimatic studies, where the thermohaline circulation and the transports of heat can be very different from the present ones.

Surface salinity has negligible direct effects on evaporation and precipitation, which provide its surface forcing. Prescribing a salt (or freshening) flux at the surface independent of surface salinity seems physically justified.

There are very less observations of this flux and its variability. Many authors adopt a two stage method to determine which flux must be applied. In the first experiment, a Newtonian relaxation law is used for both temperature and salinity. When an equilibrium is reached, the surface salinity flux is diagnosed. In the following experiments, the Newtonian cooling law for temperature and the diagnosed salinity flux are applied as surface boundary conditions.

Weaver & Sarachik (1991a) specify that high latitude convection is always intermittent in OGCM, and thus a fully steady state is never reached. They diagnose the salinity flux during 52 years after a quite steady state is reached, and apply the average of this 52 fluxes as the boundary condition in the following experiments.

In some studies, the authors try to simulate the variability of the salinity flux by the addition of a stochastic term to the stationary part of the surface flux.

In Annex IV, a table indicates the type of surface boundary conditions adopted in the different studies cited here.

## 2. THE PRESENT THERMOHALINE CIRCULATION

### 2.1. A brief description

The two main masses of deep water in the world ocean are the AABW (AntArctic Bottom Water) produced in the Weddell Sea and the NADW (North Atlantic Deep Water). There are some other places of deep formation near the continents. Considering the world ocean, one can notice the lack of deep sinking in the Pacific Ocean.

This absence of deep water formation in the Pacific is not clearly understood. Several arguments are alleged to explain it. The Pacific basin is very wide and thus a very small fraction of its area is susceptible to incursions of dry cold continental air, which favour deep sinking. The Pacific has only a very shallow and narrow connection to the Arctic. It has no saline marginal seas. The stratification of the North Pacific is more stable than the North Atlantic's one, but this feature is as much a consequence as a reason of the lack of deep convection in the North Pacific.

The actual thermohaline circulation is characterised by a great sinking region at high latitudes in the Atlantic. The deep water flows through the equator and spreads in the South Atlantic, where one part rises. The other flows around the Antarctic continent, branching out into the Indian and Pacific Oceans as the *Conveyor Belt* proposed by Gordon (1986) and Broecker (1987, 1991). The meridional transport of heat is essentially northward in the Atlantic basin. In the Pacific Ocean, the thermohaline circulation is almost non-existent. The transport of heat is poleward, but very weak.



## 2.2. *Its modelling*

The different models described in the first section have shown their ability to reasonably reproduce the present day deep circulation. However, some deficiencies persist in long term simulations. They are related to the coarse resolution of the models, the parametrization of unresolved sub-grid processes, the boundary conditions imposed, ...

In the Bryan-Cox-Semtner model, some recurring problems appear. The thermocline is usually too deep and too diffuse, the poleward heat transport too weak, the western boundary currents too slow and too broad and the deep ocean too warm, too fresh and too homogeneous. However, a faithful representation of the global scale water masses is obtained by England (1993) with the Bryan-Cox-Semtner model. It is reached thanks to a systematic tuning of several parameters (boundary conditions, mixing coefficients, ...).

Using the Hamburg LSG OGCM, Maier-Reimer, Mikolajewicz & Hasselmann (1993) obtain a mean ocean circulation, which reproduces quite realistically the principal water mass properties and the large-scale transport features of the observed ocean circulation. The western boundary currents remain unrealistic. The Gulf Stream, for instance, is underestimated by a factor of 2. The model thermocline is relatively shallow and the absolute value of the heat transport is at the lower bound of observations. The model salinity is generally too high.

## 3. THE POLAR HALOCLINE CATASTROPHE

The study of the thermohaline circulation using full 3D OGCMs begins with Bryan (1986).

The model, in a single-hemisphere version, is first forced by two Newtonian relaxation laws for both temperature and salinity. When a steady state is reached, the surface salinity flux is diagnosed. In the two-hemispheres experiments, the temperature forcing and the equilibrium, used as initial condition, are reflected across the Equator. The diagnosed flux, reflected across the Equator, is applied as surface boundary condition. A *polar halocline catastrophe* occurs, i.e. the pre-existing polar halocline extends. The tongue of low salinity surface water spreads slowly equatorward and induces in a few decades the complete collapse of the thermohaline circulation.

The instability of the equilibrium after switching the boundary conditions is very surprising. Indeed the diagnosed flux is supposed to be the flux required to maintain the equilibrium.

One of the hypotheses used to explain such a phenomenon, is to suspect the steadiness of the equilibrium under restoring boundary conditions.

In fact, many authors (Marotzke (1990), Weaver & Sarachik (1991a), ...) have observed a similar change of equilibrium when the diagnosed salinity flux is applied, instead of the Newtonian relaxation law. The common explanation is that the restoring boundary condition in salinity prevents the model from following its own dynamics. Imposing the salinity flux is a less constraining condition and, thus, the model can follow its dynamics more freely.

#### 4. MULTIPLE EQUILIBRIA OF THE THERMOHALINE CIRCULATION

During his simulations, Bryan (1986) observes two interesting features of the thermohaline circulation:

- equatorially asymmetric circulations exist and are stable under equatorially symmetric surface forcing in a symmetric basin.
- multiple equilibria can exist under the same forcing if the initial conditions differ.

Adding a symmetric positive salinity anomaly to the initial state, prevents the polar halocline catastrophe to occur and a two cell stable equilibrium is obtained under mixed boundary conditions. Some asymmetric perturbation experiments are undertaken.

Adding a negative salinity anomaly of 1 psu to the surface layer poleward of  $45^\circ$  in the Southern Hemisphere induces an interruption of deep convection. The residence time of water parcels in the surface layer and, thus, the influence of the salt flux boundary conditions increase. At high latitudes, the forcing led to a freshening of the top layer. This *convective mechanism* provides a positive feedback on the initial anomaly and the meridional overturning collapses in the Southern Hemisphere. The interhemispheric salinity differences led to an enhanced overturning in the Northern Hemisphere. It rapidly spreads equatorward and a pole-to-pole circulation is reached within 50 years.

Adding a positive salinity anomaly of 2 psu to the Southern Hemisphere polar region induces an intensification of the meridional overturning, which spreads slightly across the equator and produces a net transport of saline surface water from the Northern Hemisphere to the Southern Hemisphere. The initial anomaly is thus reinforced by this *advective mechanism*. A pole-to-pole circulation can be established, but on a longer time scale than in the precedent case, i.e. about 500 years.

Marotzke & Willebrand (1991) undertake similar experiments to those of Bryan (1986), but in a very different configuration. The idealized model consists of two similar ocean basins connected in the south by a channel with specified transport. This geometry is supposed to reproduce the Pacific and the Atlantic Oceans coupled by the Antarctic Circumpolar Current. The presence of the southern channel induces an asymmetry between the two hemispheres. A spin-up of this model is done under two Newtonian relaxation boundary conditions for both salinity and temperature. The obtained circulation is highly asymmetric, with regions of deep sinking at high northern latitudes in each basin and a very weak and shallow circulation in the Southern Hemisphere. The diagnosed salinity flux for this equilibrium is equatorially asymmetric and the authors apply first a slightly different symmetric salinity flux in the mixed boundary conditions experiments. After performing many simulations, they observe using the same forcing four different equilibria:

- the northern sinking, with deep sinking in the two northern oceans. This equilibrium is the preferred solution of the model.

- the conveyor belt, close from the actual structure of the thermohaline circulation, with deep water formation only in the North Atlantic.
- the inverse conveyor belt, where the role of the two oceans are interchanged compared with the precedent solution.
- the southern sinking, with deep sinking occurring in the two southern oceans, north of the circumpolar current.

It can be observed that all these solutions exhibit equatorially asymmetry in each basin. This feature can be attributed to the presence of the channel. Moreover, they never show deep water formation at low latitudes. This is probably due to the presence of wind forcing, which induces such strong poleward salt transports that the low latitude salinity is always too fresh to allow sinking.

When the real asymmetric diagnosed flux is applied, a polar halocline catastrophe occurs. This flux shows such strong precipitation over the Northern Hemisphere that the northern sinking cannot exist. The conveyor belt solution is found again and the favoured equilibrium of the model is now the southern sinking. Such a change in preferred solution reveals how the model is sensitive to relatively small variations in the freshwater flux.

Hughes & Weaver (1992) extend the previous study to two asymmetric basins coupled via a full prognostic channel. They found as equilibria a conveyor belt and several southern sinking solutions. The northern sinking and the inverse conveyor belt circulations are excluded by the northward extension of the Pacific basin. The preferred equilibrium of the model is the conveyor belt. This is partly due to the action of the wind stress forcing.

## 5. VARIABILITY OF THE THERMOHALINE CIRCULATION

### 5.1. Decadal time scale variability

During the simulations in the “salinity dominant” case, Weaver & Sarachik (1991b) and Weaver *et al.* (1993) observe self-sustained oscillations of the thermohaline circulation between two states on the time scale of a decade or so. The mechanism invoked to explain this phenomenon is a feedback loop between advective processes and convective overturning. It is a 3D mechanism, which includes the transport of water masses by the mean flow from the mid-ocean to the eastern boundary.

The oscillation is linked to the presence of a local evaporative region in the mid-ocean, between the subpolar and subtropical gyres ( $54^{\circ}\text{N}$  in Weaver *et al.* (1993)).

When the thermohaline circulation is weak, surface waters, partly originating from the subsurface separated western boundary current and thus warm, slowly pass through this evaporative region and become more saline. The developing warm saline anomaly is advected by the mean flow to the eastern boundary near  $54^{\circ}\text{N}$ , where it sinks. The deep convection of these warm, saline waters sets up a pressure gradient from  $54^{\circ}$  to  $64^{\circ}$ , so that the sinking waters flow poleward in a boundary current. The deep saline and warm waters rise more and

more when they flow poleward, where the surrounding waters are colder, i.e. denser. At high latitudes, the warm waters induce convection and reach the surface, where they lose heat to the atmosphere and thus become heavier. They sink again, triggering high-latitude deep convection, which sets up a zonal pressure gradient that drives an intensified thermohaline circulation.

This strong thermohaline circulation reduces the time for passing through the evaporative region. The surface waters are less saline and the thermohaline circulation is driven by the freshening at high latitudes. The circulation slows down again and the whole process can repeat itself.

The time scale of this oscillation corresponds to the time required for the horizontally advection of salinity anomalies from mid-ocean to the eastern boundary and along this boundary. With realistic coast lines, one would expect a longer time for travelling this path, due to the increased distance.

This variability seems to be very robust. In Weaver *et al.* (1993), it still persists when the initial state is changed, when a stochastic term is added to the freshwater flux and when the vertical viscosity increases. Moreover, Myers & Weaver (1992) show that seasonally varying surface forcing do not substantially alter the results. In Weaver & Sarachik (1991b), this variability can occur in each hemisphere, independent of the other hemisphere. In the two asymmetric basin configuration, Hughes & Weaver (1992) observe such decadal/interdecadal variability in either the North Atlantic or Southern Oceans, i.e. the deep sinking locations.

## 5.2. Century time scale variability

Winton & Sarachik (1993) observe in both their 2D and 3D frictional models, an oscillation, whose period is the overturning time scale. They call it “loop oscillation”, because its mechanism can be explained with a very simple loop model. In this mechanism, a salinity anomaly passes through the circulation and can maintain itself and grow by its effect on the overturning.

The initial overturning is thermally direct (i.e. sinking near the poles and rising near the equator). If there is a positive salinity anomaly at low latitude, the circulation tends to slow. Thus the surface waters stay for a long time in the evaporative low-latitude region and become more saline. When this positive anomaly reaches the polar region, it tends to accelerate the circulation, and thus escapes from the freshening effect of the freshwater flux at high latitudes. The whole mechanism repeats itself when the salinity anomaly reaches again the surface at low latitudes.

In the 2D model, the period of the oscillations is very close to the period of the overturning and the anomalies pass uniformly through the deep circulation. In the 3D model, the period is somewhat shorter and the anomalies show a tendency to dissipate in the slower part of the circulation.

Using the LSG OGCM, Mikolajewicz & Maier-Reimer (1990) observe a similar mechanism.

A dipole of salinity anomalies is advected and interact with the mean thermohaline circulation of the Atlantic. The induced variability of the circulation exhibits a dominant period of 320 years, which is very close to the overturning time scale. In the simulation, the model is forced by a salinity flux, which includes a stationary term and a stochastic term. The dominant period can thus be seen as a normal mode period of the model.

### 5.3. Millenial time scale variability

In the simulations with a very strong freshwater flux at high latitudes, Marotzke (1990) and Weaver & Sarachik (1991a) observe the occurrence of *flushes*, i.e. short periods of very energetic overturning, which succeed long periods of collapsed circulation.

The mechanism proposed to explain these periodic events is essentially diffusive. After switching from restoring boundary conditions to mixed boundary conditions, the polar halocline catastrophe occurs and the circulation stays in the collapsed state for more than 2000 years (Weaver & Sarachik (1991a)) or in a quasi-steady weak inverse state for several thousand years (Marotzke (1990)). During the period of collapsed - or weak - circulation, there is no - or few - convective heat transport. In return, the ocean goes on absorbing atmospheric heat at low latitudes. The vertical diffusion acts to warm the water column at low latitudes and the horizontal diffusion acts to warm the whole deep ocean. The surface waters remain cold in the polar regions because of the atmospheric temperature forcing. The averaged temperature over the basin increases during the collapsed - or very weak - circulation state. If the deep water becomes sufficiently warm at high latitudes, the water column becomes statically unstable and deep convection sets in. The induced overturning is so violent, that the ocean loses in a few decades all the heat it stored during thousands of years. After this flush, the freshening effect at high latitudes dominates again and the circulation collapses once again. The whole scenario can repeat itself.

The diffusive mechanism exposed above is adapted to explain the occurrence of flushes in 2D zonally averaged models (Marotzke, Welander & Willebrand (1988), Wright & Stocker (1991)).

However, in 3D models, some other mechanisms can interfere, favouring the occurrence of flushes or the reestablishment of a steady circulation. During the collapsed phase of the circulation, the meridional transport of heat and salt results from the Ekman top circulation and the horizontal gyre circulation.

In Marotzke (1990), flushes do not appear when wind forcing is included. The wind-driven net poleward transport of salt is important enough to make the polar surface water sufficiently saline again, so that deep convection resumes.

In Weaver & Sarachik (1991a), flushes occur even under wind forcing. The strong high latitude freshening is not compensated by the wind-driven salt transport. The collapsed state of the thermohaline circulation lasts until a flush sets in.

The relative importance of the high latitude freshening and the strength of the momentum forcing is thus determining the occurrence of flushes in 3D models.

Winton & Sarachik (1993) observe analogous variability, they call *deep decoupling oscillations*. Each oscillation is composed of three different phases: a decoupled period with weak overturning, a flush and a coupled period with a reestablished circulation. Increasing the strength of the freshening flux, the decoupled phase becomes longer, the flush more energetic and the coupled phase shorter. The oscillations of Weaver & Sarachik (1991a) correspond to such a strong freshwater forcing, that the coupled phase does not exist anymore. Winton & Sarachik (1993) emphasize the role of 3D processes in restarting the overturning after the decoupled period.

During the decoupled phase, convection in the northeast part of the basin and associated intermediate water formation remain, increase and spread due to the poleward transport of saline waters by the subtropical gyres and the diffusive warming of the deep polar ocean. A cyclonic wind gyre inhabits the upper polar ocean and is trapped by the salinity-dominated stratification. It spreads with the convection. The western boundary current separates at progressively more northern locations to feed this gyre. The salinity advected by the currents can erode the halocline in the northwest corner of the basin and sinking can begin again.

Using Laplacian friction instead of Rayleigh friction, Winton (1993) found again deep decoupling oscillations.

## 6. SENSITIVITY STUDIES

### 6.1. Vertical resolution

Weaver & Sarachik (1990) studied the sensitivity of the thermohaline circulation to vertical resolution in the Bryan-Cox-Semtner model. Indeed, in many previous studies, some curious features had been observed at the equator in the solutions. In particular, an artificial cell driven by downwelling at the eastern boundary near the equator appeared. It was centered at a depth of around 3000m, countered to the primary cell driven by deep water formation at high latitudes and was of comparable magnitude to it. It was associated with much weaker cells of oscillating sense at shallower depths. The authors wanted to determinate if such features could be attributed to an insufficient vertical resolution.

Weaver & Sarachik (1990) performed a series of experiments with a various level number. A steady state is first reached with a 12 level simulation. It is then interpolated as an initial state on a finer grid of 19 levels. After integrating, a new steady state is obtained on the 19 level grid. It is interpolated as an initial state of the 33 level integration. A new steady state is obtained on the 33 level grid.

The three steady states are then compared. The spurious cell appears in the 12 level steady state, associated with a spurious downwelling at the eastern boundary near the equator. In this location, very unusual features are observed in the temperature and salinity fields, causing the instability of the water column. These anomalous features can not be attributed to the boundary condition at the equator, because a two-hemispheres simulation leads to the same solution. In the 19 level steady state, both the spurious downwelling and the anomalies in the temperature and salinity fields are eliminated. The increased vertical resolution also causes an increased basin mean temperature, a more realistic representation of the thermocline and

a smoother resolution of the meridional streamfunction. A strange cell subsists in the deep water near the equator. It does not exist any more in the 33 level steady state. The meridional overturning streamfunction is smooth everywhere in this solution.

The poleward heat transports of the higher resolution 19 and 33 level runs are close from the poleward heat transport midway through the 12 level experiment. As time progresses, the poleward heat transport drops significantly in the 12 level simulation over the middle latitudes. This is due to the presence of oscillating near-surface equatorial cells, which originate from a two grid point computational mode. To avoid the excitation of this computational mode in spatially centered difference numerical schemes, a sufficient condition is that the grid Peclet and Reynolds numbers are lower than two. The problem encountered in many studies are often due to higher vertical Peclet and Reynolds numbers. A criterion is here proposed.

## 6.2. *Realistic geometry and bathymetry*

Moore & Reason (1993) undertake experiments in a realistic configuration, i.e. the whole world ocean with realistic coast lines and bathymetry. They observe the instability of the spin-up state after switching from restoring to mixed boundary conditions, but none oscillation. Performing analogous experiments with a flat bottom model, they obtain near-decadal oscillations. These oscillations develop in the North Atlantic and Arctic Ocean and are driven by the advection of salinity and temperature anomalies. Their existence is linked to the presence of a deep reservoir of saline water, which is periodically advected to the surface by upwelling. The deep reservoir is fed by deep sinking near the Siberian coast. The realistic bathymetry is too shallow to allow such a sinking and the oscillations can not exist if the bottom topography is realistically reproduced.

## 7. CONCLUSION

Using OGCMs to study the thermohaline circulation can be very fruitful, as indicated by some results outlined in this review.

A good tuning of parameters allows a realistic simulation of the present oceanic circulation with an OGCM.

Phenomena such as polar halocline catastrophes, multiple equilibria, oscillations and flushes are observed in simulations performed with OGCMs. Studies with a 3D model are needed to explain all the mechanisms, which cause these phenomena. Indeed, the heat and salt transport by the horizontal gyres and the zonal advection of water masses are required for the occurrence of some types of variability. Moreover, it is necessary to undertake simulations with realistic models (geometry, bathymetry,...) because some mechanisms, which appear in simplified configurations, can be inhibited in the case of realistic model, as suggested by Moore & Reason (1993).

When the model is forced by a stochastic freshwater flux (Mikolajewicz & Maier-Reimer (1990), Weaver *et al.* (1993)), a strong variability occurs. Its period is very close to the overturning time scale, which can thus be seen as an eigenperiod of the model. Such oscillations

may be linked to the 350 years period variability found in the Cape Century ice core records of Dansgaard *et al.* (1970).

The surface boundary conditions constitute a very coarse modelisation of the interactions between ocean and atmosphere, which are in the reality neither stationary, nor stochastic. Moreover, the restoring boundary condition usually chosen for the temperature is based on the present-day observed climatology and becomes a way to recall the model towards it. It has no sense in the case of paleoclimatic studies. The use of coupled ocean-atmosphere models seems to be the best way to overcome these problems. In such models, the interface conditions evolve following the dynamics of the two components.

## Acknowledgements

Funding for this research is provided by the Commission of the European Communities through its MAST II Programme (MAS2-CT-92-0034).

## References

- W.S. Broecker (1987), "Unpleasant surprise in the greenhouse?", *Nature*, **328**, 123-127.
- W.S. Broecker (1991), "The great ocean conveyor", *Oceanography*, **4**, 79-89.
- F. Bryan (1986), "High-latitude salinity effects and interhemispheric thermohaline circulations", *Nature*, **323**, 301-304.
- K. Bryan and M.D. Cox (1972), "An approximate equation of state for numerical models of ocean circulation", *J. Phys. Oceanogr.*, **2**, 510-514.
- K. Bryan (1984), "Accelerating the convergence to equilibrium of ocean-climate models", *J. Phys. Oceanogr.*, **14**, 666-673.
- P. Cessi and W.R. Young (1992), "Multiple equilibria in two-dimensional thermohaline circulation", *J. Fluid Mechanics*, **241**, 291-309.
- T.C. Chamberlin (1906), *J. Geol.*, **14**, 363-373.
- W. Dansgaard, S.J. Johnson, H.B. Clausen and C.C. Langway (1970), In: *The late Cenozoic glacial ages* (Ed. K.K. Turekian), *Yale*, 37-56.
- M.H. England (1992), "On the formation of Antarctic intermediate and bottom water in ocean general circulation models", *J. Phys. Oceanogr.*, **22**, 918-926.
- M.H. England (1993), "Representing the global-scale water masses in ocean general circulation models", *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1523-1552.
- A.E. Gargett and G. Holloway (1992), "Sensitivity of the GFDL Ocean Model to different diffusivities for heat and salt", *J. Phys. Oceanogr.*, **22**, 1158-1177.
- A.L. Gordon (1986), "Interocean exchange of thermocline water", *J. Geophys. Res.*, **91**, 5037-5046.
- R.L. Haney (1971), "Surface thermal boundary condition for ocean circulation models", *J. Phys. Oceanogr.*, **1**, 241-248.



- 
- K. Hasselmann (1982), "An ocean model for climate variability studies", *Progress in Oceanogr.*, **11**, 69-92.
- S. Levitus (1982), "Climatological atlas of the world ocean", *NOAA Prof. Paper 13*, U.S. Dept. of commerce Washington DC.
- E. Maier-Reimer, U. Mikolajewicz and K. Hasselmann (1993), "Mean Circulation of the Hamburg LSG OGCM and its sensitivity to the thermohaline surface forcing", *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 731-757.
- J. Marotzke, P. Welander and J. Willebrand (1988), "Instabilities and multiple equilibria of the thermohaline circulation", *Tellus*, **40A**, 162-172.
- J. Marotzke (1990), "Instabilities and multiple equilibria of the thermohaline circulation", *Ph.D. Thesis*, Christian Albrechts University of Kiel.
- J. Marotzke (1991), "Influence of convective adjustment on the stability of the thermohaline circulation", *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 903-907.
- J. Marotzke and J. Willebrand (1991), "Multiple equilibria of the global thermohaline circulation", *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 1372-1385.
- U. Mikolajewicz and E. Maier-Reimer (1990), "Internal secular variability in an ocean general circulation model", *Clim. Dyn.*, **4**, 145-156.
- A.M. Moore and C.J.C. Reason (1993), "The response of a global ocean general circulation model to climatological surface boundary conditions for temperature and salinity", *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 300-328.
- P.G. Myers and A.J. Weaver (1992), "Low-frequency internal oceanic variability under seasonal forcing", *J. Geophys. Res.*, **97 - C6**, 9541-9563.
- S.B. Power and R. Kleeman (1993), "Multiple equilibria in a global ocean general circulation model", *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1670-1681.
- H. Stommel (1961), "Thermohaline convection with two stable regimes of flow", *Tellus*, **XIII2**, 224-230.
- O. Thual and J.C. McWilliams (1992), "The catastrophe structure of thermohaline convection in a two-dimensional fluid model and a comparison with low-order box models", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **64**, 67-95.
- A.J. Weaver and E.S. Sarachik (1990), "On the importance of vertical resolution in certain ocean general circulation model", *J. Phys. Oceanogr.*, **20**, 600-609.
- A.J. Weaver and E.S. Sarachik (1991a), "The role of mixed boundary conditions in numerical models of the ocean's climate", *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 1470-1493.
- A.J. Weaver and E.S. Sarachik (1991b), "Evidence for decadal variability in an ocean general circulation model: an advective mechanism", *Atmosphere-Ocean*, **29**, 197-231.
- A.J. Weaver and T.M.C. Hughes (1992), "Stability and variability of the thermohaline circulation and its link to climate", *Trends in Physical Oceanography, Council of Scientific Research Integration - Research Trends Series, Trivandrum India*, 56pp.

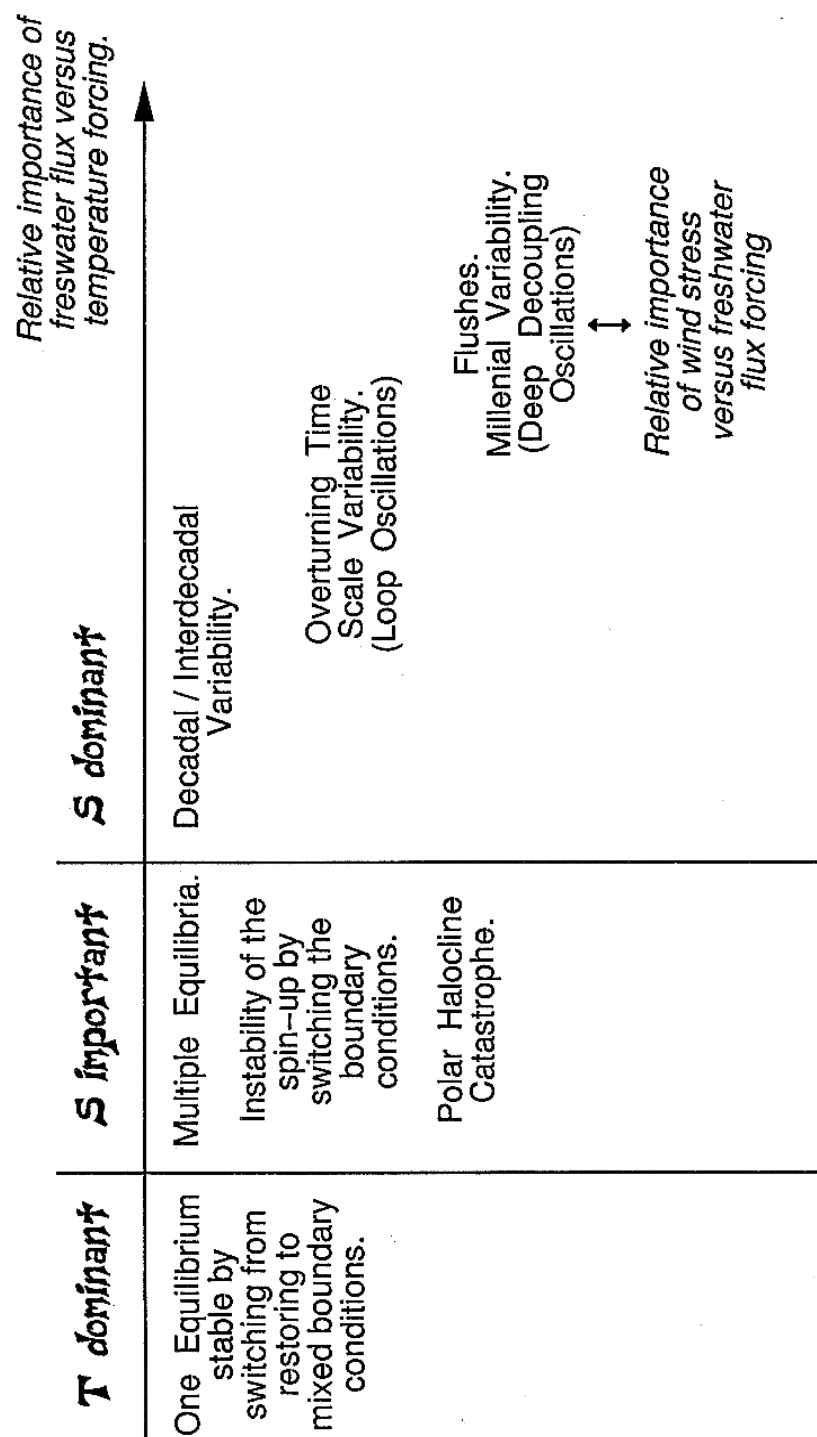
- A.J. Weaver, J. Marotzke, P.F. Cummins and E.S. Sarachik (1993), “Stability and variability of the thermohaline circulation”, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 39-60.
- P. Welander (1986), “Thermohaline effects in the ocean circulation and related simple models”, In: *Large-Scale transport processes in oceans and atmosphere* (Eds J. Willebrand and D.T.L. Anderson), *D. Reidel*, 163-200.
- M. Winton (1993), “Deep decoupling oscillations of the oceanic thermohaline circulation”, In: *Ice in the Climate System* (Ed W.R. Peltier), *Springer-Verlag*, 417-432.
- M. Winton and E.S. Sarachik (1993), “Thermohaline oscillations induced by strong steady salinity forcing of ocean general circulation models”, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1389-1410.
- F.L. Yin and E.S. Sarachik (1995), “Interdecadal thermohaline in a sector ocean general circulation model: advective and convective processes”, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 2465-2484.

## ANNEX I

| Authors                                 | Year         | Model | Domain                 | Observed Phenomena - Sensitivity Experiments                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------|--------------|-------|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Bryan                                   | 1986         | BCS   | 1 basin<br>2 hemis.    | - Polar halocline catastrophe<br>- Asymmetric equilibria under symmetric forcing and geometry<br>- Multiple equilibria                                                                                                                                                    |
| Weaver & Sarachik                       | 1990         | BCS   | 1 basin<br>1 hemis.    | Sensitivity to the vertical resolution                                                                                                                                                                                                                                    |
| Marotzke                                | 1990         | BCS   | 1 basin<br>1 hemis.    | - Polar halocline catastrophe<br>- Flushes                                                                                                                                                                                                                                |
| Marotzke<br>Marotzke & Willebrand       | 1990<br>1991 | BCS   | 2 basins<br>2 hemis.   | - Instability of the spin-up under mixed boundary conditions<br>- Multiple equilibria<br>- Sensitivity to minor changes in the freshwater forcing                                                                                                                         |
| Marotzke                                | 1991         | BCS   | 1 basin<br>1 hemis.    | Sensitivity to the convective adjustment                                                                                                                                                                                                                                  |
| Weaver & Sarachik                       | 1991<br>a, b | BCS   | 1 basin<br>1 or 2 hem. | - Polar halocline catastrophe<br>- Decadal variability<br>- Flushes                                                                                                                                                                                                       |
| Gargett & Holloway                      | 1992         | BCS   | 1 basin<br>1 hemis.    | Sensitivity to different diffusivities for heat and salt                                                                                                                                                                                                                  |
| Weaver, Marotzke,<br>Cummins & Sarachik | 1993         | BCS   | 1 basin<br>1 hemis.    | - Comparison between Weaver & Sarachik (91) and Marotzke (89, 90, 91)<br>- Sensitivity to the relative strength of forcings<br>- Polar halocline catastrophe<br>- Multiple equilibria<br>- Decadal variability<br>- Flushes<br>- Response to a stochastic freshwater flux |

| Authors                                 | Year | Model | Domain               | Observed Phenomena - Sensitivity Experiments                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------|------|-------|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Moore & Reason                          | 1993 | BCS   | 3 basins<br>2 hemis. | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Instability of the spin-up under mixed boundary conditions.</li> <li>- Influence of the surface boundary conditions</li> <li>- Influence of a realistic bathymetry (oscillations in case of a flat bottom only)</li> </ul> |
| England                                 | 1993 | BCS   | 3 basins<br>2 hemis. | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Reproduction of the present-day oceanic global circulation.</li> </ul>                                                                                                                                                     |
| Power & Kleeman                         | 1993 | BCS   | 3 basins<br>2 hemis. | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Multiple equilibria</li> <li>- Criticism of usually used mixed boundary conditions</li> </ul>                                                                                                                              |
| Yin & Sarachik                          | 1993 | BCS   | 1 basin<br>1 hemis.  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Interdecadal oscillations</li> </ul>                                                                                                                                                                                       |
| Mikolajewicz & Maier-Reimer             | 1990 | LSG   | 3 basins<br>2 hemis. | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Response to a stochastic freshwater forcing: overturning time-scale variability</li> </ul>                                                                                                                                 |
| Maier-Reimer, Mikolajewicz & Hasselmann | 1993 | LSG   | 3 basins<br>2 hemis. | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Simulation of a realistic circulation</li> <li>- Sensitivity to temperature and salinity surface boundary conditions</li> </ul>                                                                                            |
| Winton & Sarachik                       | 1993 | RFGM  | 1 basin<br>1 hemis.  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Deep decoupling oscillations (halocline catastrophe + collapsed state + flush + active circulation state)</li> <li>- Loop oscillations</li> </ul>                                                                          |
| Winton                                  | 1993 | LFGM  | 1 basin<br>1 hemis.  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Deep decoupling oscillations</li> </ul>                                                                                                                                                                                    |
| Weaver & Hughes                         | 1992 |       |                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Review article</li> </ul>                                                                                                                                                                                                  |

## ANNEX II



---

## ANNEX III

| Authors                                    | Year         | Model | Domain                                                                 | Resolution                        | Time Step                                                                                         | Conv. Adjust.                      |
|--------------------------------------------|--------------|-------|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| Bryan                                      | 1986         | BCS   | 60° wide<br>pole to pole<br>4 km depth                                 | 3.75° × 4.5°<br>12 levels         |                                                                                                   | Standard                           |
| Weaver &<br>Sarachik                       | 1990         | BCS   | 60° wide<br>70° S to Eq.<br>5 km depth                                 | 2° × 2°<br>12, 19 or<br>33 levels | asynchr. integr.<br>0.5 h for $\vec{u}$<br>ACS: 3                                                 | IVD                                |
| Marotzke                                   | 1990         | BCS   | 60° wide<br>Eq. to 64° N<br>4.5 km depth                               | 3.75° × 4°<br>15 levels           | asynchr. integr.<br>1 day for $\vec{u}$<br>2 h. for T and S                                       | Complete Mixing                    |
| Marotzke<br>Marotzke &<br>Willebrand       | 1990<br>1991 | BCS   | 2 basins + south channel<br>60° wide<br>64° S to 64° N<br>4.5 km depth | 3.75° × 4°<br>15 levels           | asynchr. integr.<br>1 day for $\vec{u}$<br>2 h. for T and S                                       | Complete Mixing                    |
| Marotzke                                   | 1991         | BCS   | 60° wide<br>Eq. to 64° N<br>4.5 km depth                               | 3,75° × 4°<br>15 levels           | asynchr. integr.<br>1 day for $\vec{u}$<br>2 h. for T and S                                       | Complete Mixing<br>Standard<br>IVD |
| Weaver &<br>Sarachik                       | 1991<br>a, b | BCS   | 60° wide<br>70° S to Eq.<br>or 70° S to 70° N<br>5 km depth            | 2° × 2°<br>12 or 33 levels        | asynchr. integr.<br>0.5h for $\vec{u}$<br>5h to 4 days for T, S<br>ACS: 3<br>and synch. int.: 5h. | IVD<br>or Standard                 |
| Gargett &<br>Holloway                      | 1992         | BCS   | 45° wide<br>Eq. to 66° N<br>5 km depth                                 | 3° × 3°<br>15 levels              | asynchr. integr.<br>ACS: 4                                                                        |                                    |
| Weaver, Marotzke,<br>Cummins &<br>Sarachik | 1993         | BCS   | 60° wide<br>Eq. to 64, 68 or 72 °<br>4.5 km depth                      | 3.75° × 4°<br>15 levels           | asynchr. integr.<br>2 h. for $\vec{u}$<br>5 days for T and S                                      | IVD<br>or Complete Mixing          |



| Authors                                 | Year | Model | Domain                                                 | Resolution                                                                                             | Time Step                                                                             | Conv. Adjust. |
|-----------------------------------------|------|-------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Moore & Reason                          | 1993 | BCS   | realistic world ocean (geom. and bath.) or flat bottom | grid R21<br>$5.625^\circ \times 3.185^\circ$ Eq.<br>$5.625^\circ \times 3.143^\circ$ Pol.<br>12 levels | asynchr. integr.<br>20 mn for $\vec{u}$<br>ACS: 8                                     | Standard ?    |
| England                                 | 1993 | BCS   | realistic world ocean (geom. and bath.)                | $3.75^\circ \times 4.5^\circ$<br>12 levels                                                             | asynchr. integr.<br>20 mn for $\vec{u}$<br>ACS: 5                                     | Standard      |
| Power & Kleeman                         | 1993 | BCS   | realistic world ocean (geom. and bath.)                | R21 grid<br>$5.625^\circ \times \sim 3.2^\circ$<br>12 levels                                           | asynchr. integr.<br>20 mn for $\vec{u}$<br>ACS: 8                                     | Standard ?    |
| Yin & Sarachik                          | 1993 | BCS   | 60° wide<br>14.5° N to 66.5° N<br>5 km depth           | $3.75^\circ \times 4^\circ$<br>12 levels                                                               | asynchr. integr.<br>1 h. for $\vec{u}$<br>6 days for T and S<br>and synch. int.: 6 h. | IVD           |
| Mikolajewicz & Maier-Reimer             | 1990 | LSG   | realistic world ocean (geom. and bath.)                | Arakawa E grid<br>$3.5^\circ \times 3.5^\circ$<br>11 levels                                            | implicit integration<br>method: 30 days                                               | Standard      |
| Maier-Reimer, Mikolajewicz & Hasselmann | 1993 | LSG   | realistic world ocean (geom. and bath.)                | Arakawa E grid<br>$3.5^\circ \times 3.5^\circ$<br>11 levels                                            | 30 days                                                                               | Standard      |
| Winton & Sarachik                       | 1993 | RFGM  | 60° wide<br>10° N to 70° N<br>4 km depth               | $3^\circ \times 3^\circ$<br>16 levels                                                                  | 1 week                                                                                | IVD           |
| Winton                                  | 1993 | LFGM  | 60° wide<br>10° N to 70° N<br>4 km depth               | $3.75^\circ \times 4^\circ$<br>16 levels                                                               |                                                                                       | IVD           |

## ANNEX IV

| Authors                                       | Year         | Wind Stress                              | Temperature Forcing                                                                        | Restoring Salinity Forcing                                                                         | Flux Salinity Forcing                                                                               |
|-----------------------------------------------|--------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Bryan                                         | 1986         | zonal                                    | $T_*$ : zonal mean SST<br>(all oceans, 2 hemis.)<br>$\lambda^{-1} = 25$ days               | first exp. with 1 hemis.<br>$S_*$ : zonal mean SSS<br>$\lambda^{-1} = 25$ days                     | diagnosed flux<br>reflected across Eq.                                                              |
| Weaver &<br>Sarachik                          | 1990         | zonal<br>f (lat.)                        | $T_*$ : Levitus SST<br>zon. aver. over Atlantic<br>$\lambda^{-1} = 25$ days                | $S_*$ : Levitus SSS<br>zon. aver. over Atlantic<br>$\lambda^{-1} = 25$ days                        |                                                                                                     |
| Marotzke                                      | 1990         | zonal<br>f (lat.)                        | $T_*$ : zonally invariant<br>cos (lat.); $\Delta T = 27^\circ$<br>$\lambda^{-1} = 30$ days | $S_*$ : zonally invariant<br>cos (lat.); $\Delta S = 2.5$ or $1.5$ psu<br>$\lambda^{-1} = 30$ days | diagnosed flux                                                                                      |
| Marotzke<br>Marotzke &<br>Willebrand          | 1990<br>1991 | zonal<br>f (lat.)                        | $T_*$ : zonally invariant<br>cos (lat.); $\Delta T = 27^\circ$<br>$\lambda^{-1} = 30$ days | $S_*$ : zonally invariant<br>cos (lat.); $\Delta S = 2.5$ psu<br>$\lambda^{-1} = 30$ days          | 2 diagnosed fluxes<br>- $\frac{\partial}{\partial z} S = f$ (lat.,lon.)<br>- 1bas.,1 hem.: f (lat.) |
| Marotzke                                      | 1991         | zonal<br>f (lat.)                        | $T_*$ : zonally invariant<br>cos (lat.); $\Delta T = 27^\circ$<br>$\lambda^{-1} = 30$ days | $S_*$ : zonally invariant<br>cos (lat.); $\Delta S = 2.5$ psu<br>$\lambda^{-1} = 30$ days          | diagnosed fluxes<br>in 3 cases                                                                      |
| Weaver &<br>Sarachik                          | 1991<br>a, b | zonal<br>f (lat.)                        | $T_*$ : Levitus SST<br>zonal average<br>$\lambda^{-1} = 25$ days                           | first exp. with 1 hem., 33 lev.<br>$S_*$ : Levitus SSS<br>$\lambda^{-1} = 25$ days                 | diagnosed flux aver.<br>52 years; if 2 hemis.<br>reflected across Eq.                               |
| Gargett &<br>Holloway                         | 1992         |                                          |                                                                                            |                                                                                                    |                                                                                                     |
| Weaver,<br>Marotzke,<br>Cummins &<br>Sarachik | 1993         | zonal<br>f (lat.)                        | $T_*$ : zonally invariant<br>cos (lat.); $\Delta T = 27^\circ$<br>$\lambda^{-1} = 30$ days | several $S_*$                                                                                      | diagnosed fluxes<br>aver. over 22 years<br>or instantaneous                                         |
| Moore &<br>Reason                             | 1993         | annual mean<br>Hellermann-<br>Rosenstein | $T_*$ : annual mean Levitus SST<br>$\lambda^{-1} = 20$ days<br>or climatological heat flux | $S_*$ : annual mean Levitus SSS<br>$\lambda^{-1} = 20$ days                                        | several $\frac{\partial}{\partial z} S$                                                             |

| Authors                                       | Year | Wind Stress                               | Temperature Forcing                                                                                       | Restoring Salinity Forcing                                                 | Flux Salinity Forcing                                     |
|-----------------------------------------------|------|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| England                                       | 1993 | annual mean<br>Hellermann-<br>Rosenstein  | $T_*$ : annual mean<br>Levitus SST<br>$\lambda^{-1} = 30$ days                                            | $S_*$ : annual mean or<br>seasonal Levitus SSS<br>$\lambda^{-1} = 50$ days |                                                           |
| Power &<br>Kleeman                            | 1993 | annual mean<br>Hellermann-<br>Rosenstein  | $T_*$ : annual mean<br>Levitus SST<br>$\lambda^{-1} = 20$ days<br>or Heat flux diagnosed<br>over 50 years | $S_*$ : annual mean<br>Levitus SSS<br>$\lambda^{-1} = 20$ days             | Salinity flux diagnosed<br>over 50 years                  |
| Yin &<br>Sarachik                             | 1993 | zonal<br>f (lat.)                         | $T_*$ : zonal aver. of<br>Levitus SST; $\Delta T = 23^\circ$<br>$\lambda^{-1} = 30$ days                  |                                                                            | Prescribed Flux                                           |
| Mikolajewicz &<br>Maier-Reimer                | 1990 | monthly mean<br>Hellermann-<br>Rosenstein | $T_*$ : monthly mean<br>AST - COADS<br>$\lambda^{-1} \sim 60$ days                                        | $S_*$ : annual mean<br>Levitus SSS<br>$\lambda^{-1} = 40$ days             | diagnosed flux<br>then diagnosed flux<br>+ random forcing |
| Maier-Reimer,<br>Mikolajewicz &<br>Hasselmann | 1993 | monthly mean<br>Hellermann-<br>Rosenstein | $T_*$ : monthly mean<br>AST - COADS<br>or observed SST<br>$\lambda^{-1} = 60$ or 30 days                  | $S_*$ : annual mean<br>Levitus SSS<br>$\lambda^{-1} = 40, 30$ or 1500 days |                                                           |
| Winton &<br>Sarachik                          | 1993 | zonal<br>f (lat.)                         | $T_*$ : zonally invariant<br>prescribed; $\Delta T = 26^\circ$<br>$\lambda^{-1} = 61$ days                |                                                                            | Flux prescribed<br>zonally invariant                      |
| Winton                                        | 1993 | zonal<br>f (lat.)                         | $T_*$ : zonally invariant<br>prescribed; $\Delta T = 27.6^\circ$<br>$\lambda^{-1} = 61$ days              |                                                                            | Flux prescribed<br>zonally invariant                      |

## **Annexe B**

Facteurs d'adimensionnement et paramètres  
de contrôle du modèle 2D de Boussinesq  
dans différentes études.



| Variable               | Thual & McWilliams<br>(1992)           | Quon & Ghil<br>(1992)   | Quon & Ghil<br>(1995)                | Dijkstra & Molemaker<br>(1997) | Cessi & Young<br>(1992)               |
|------------------------|----------------------------------------|-------------------------|--------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|
| largeur                | $d$                                    | $L$                     | $L$                                  | $d$                            | $L/\pi$                               |
| profondeur             | $d$                                    | $L$                     | $d$                                  | $d$                            | $d$                                   |
| temps                  | $2\pi d^3/L\kappa_T$                   | $1/(\kappa_T\nu)^{1/2}$ | $LH/(\kappa_T^{(H)}\nu^{(H)})^{1/2}$ | $d^2/\kappa_T$                 | $d^2/\kappa_T$                        |
| vitesse<br>horizontale | $L\kappa_T/2\pi d^2$                   | $(\kappa_T\nu)^{1/2}/L$ | $(\kappa_T^{(H)}\nu^{(H)})^{1/2}/H$  | $\kappa_T/d$                   | $L\kappa_T/\pi d^2$                   |
| vitesse<br>verticale   | $L\kappa_T/2\pi d^2$                   | $(\kappa_T\nu)^{1/2}/L$ | $(\kappa_T^{(H)}\nu^{(H)})^{1/2}/L$  | $\kappa_T/d$                   | $\kappa_T/d$                          |
| fonction<br>de courant | $L\kappa_T/2\pi d$                     | $(\kappa_T\nu)^{1/2}$   | $(\kappa_T^{(H)}\nu^{(H)})^{1/2}$    | $\kappa_T$                     | $L\kappa_T/\pi d$                     |
| température            | $\kappa_T\nu L^2/4\pi^2 g\gamma_T d^5$ | $\Delta T$              | $\Delta T$                           | $\Delta T$                     | $\kappa_T\nu L^2/\pi^2 g\gamma_T d^5$ |
| salinité               | $\kappa_T\nu L^2/4\pi^2 g\gamma_S d^5$ | $\Delta S$              | $\Delta S$                           | $\Delta S$                     | $\kappa_T\nu L^2/\pi^2 g\gamma_S d^5$ |

**Tableau B.1 :** Adimensionnement du modèle 2D de Boussinesq dans différentes études.

| Paramètre                        | Thual & McWilliams<br>(1992)                                  | Quon & Ghil<br>(1992)        | Quon & Ghil<br>(1995)                                                                 | Dijkstra &<br>Molemaker (1997) | Cessi & Young<br>(1992)         |
|----------------------------------|---------------------------------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| rapport d'aspect                 | $k = 2\pi d/L$                                                | $\delta = d/L$<br>$= k/2\pi$ | $\delta = d/L$<br>$= k/2\pi$                                                          | $A = L/d$<br>$= 2\pi/k$        | $\epsilon = \pi d/L$<br>$= k/2$ |
| intensité<br>forçage thermique   | $a = \frac{4\pi^2 g \gamma_T \Delta T d^5}{\nu \kappa_T L^2}$ | $Ra = (2\pi)^3 a/k^5$        | $Ra = \frac{g \gamma_T \Delta T L^3}{\nu^{(H)} \kappa_T^{(H)}}$                       | $Ra_T = a/k^2$                 | $a_{CY} = a/4$                  |
| intensité<br>forçage salin       | $b = \frac{4\pi^2 g \gamma_S \Delta S d^5}{\nu \kappa_T L^2}$ | $\gamma \lambda = b/a$       | $\gamma \lambda Ra = \gamma \frac{g \gamma_S \Delta S L^3}{\nu^{(H)} \kappa_T^{(H)}}$ | $\gamma \lambda = b/a$         | $b_{CY} = b/4$                  |
| nombre de Prandtl                | $\sigma_P = \nu/\kappa_T$                                     | $\sigma_P = \nu/\kappa_T$    | $\sigma_P = \nu^{(H)}/\kappa_T^{(H)}$                                                 | $\sigma_P = \nu/\kappa_T$      | $\sigma_P = \nu/\kappa_T$       |
| nombre de Lewis                  | $Le = \kappa_S/\kappa_T$                                      | $Le = \kappa_S/\kappa_T$     | $Le = \kappa_S^{(H)}/\kappa_T^{(H)}$                                                  | $\tau = 1/Le$                  | $Le = \kappa_S/\kappa_T$        |
| rap. anisotropie<br>viscosités   |                                                               |                              | $\delta_\nu = \nu^{(V)}/\nu^{(H)}$                                                    |                                |                                 |
| rap. anisotropie<br>diffusivités |                                                               |                              | $\delta_\kappa = \kappa_T^{(V)}/\kappa_T^{(H)}$<br>$= \kappa_S^{(V)}/\kappa_S^{(H)}$  |                                |                                 |

**Tableau B.2 :** Expression des paramètres adimensionnels du modèle 2D de Boussinesq dans différentes études.



| Variable                         | Thual & McWilliams<br>(1992)  | Quon & Ghil<br>(1992)                          | Quon & Ghil<br>(1995)                        | Dijkstra & Molemaker<br>(1997)                    |
|----------------------------------|-------------------------------|------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| rapport d'aspect                 | $k = 1$ or $0.4$              | $\delta = 0.2$ or $1$                          | $\delta = 0.01$                              | $A = 5, 10, 20$ or $40$                           |
| intensité<br>forçage thermique   | $0 \leq a \leq 2.10^3$        | $10^3 \leq Ra \leq 2.10^8$                     | $10^{10} \leq Ra \leq 10^{12}$               | $10^2 \leq Ra_T \leq 4.10^4$                      |
| intensité<br>forçage salin       | $0 \leq b \leq 1.2.10^3$      | $0.3 \leq \gamma \leq 1.4$<br>$\lambda = 0.32$ | $0.7 \leq \gamma \leq 3$<br>$\lambda = 0.32$ | $0 \leq \gamma\lambda \leq 2$<br>$\lambda = 0.32$ |
| nombre de Prandtl                | $\sigma_P \rightarrow \infty$ | $\sigma_P = 2.25$ or $7.1$                     | $\sigma_P = 2.25$                            | $\sigma_P = 2.25$                                 |
| nombre de Lewis                  | $Le = 1$                      | $Le = 1, 0.1$                                  | $Le = 1$                                     | $\tau = 1$                                        |
| rap. anisotropie<br>viscosités   | $\delta_\nu = 1$              | $\delta_\nu = 1$                               | $\delta_\nu = 0.01$                          | $\delta_\nu = 1$                                  |
| rap. anisotropie<br>diffusivités | $\delta_\kappa = 1$           | $\delta_\kappa = 1$                            | $\delta_\kappa = 0.01$                       | $\delta_\kappa = 1$                               |

**Tableau B.3 :** Intervalles de variation des paramètres du modèle 2D de Boussinesq dans différentes études.



# Bibliographie

- V. ARNOLD (1986) Catastrophe theory, *Springer Verlag*.
- A. BECKMANN, C. BÖNING, C. KÖBERLE ET J. WILLEBRAND (1994) Effects of increased horizontal resolution in a simulation of the North Atlantic ocean, *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 326–344.
- P. BERGÉ, Y. POMEAU ET C. VIDAL (1984) L'ordre dans le chaos, *Hermann*.
- G. BIRCHFIELD ET H. WANG (1992) Atmospheric water vapor flux, bifurcation of the thermohaline circulation and climate change, *Climate Dynamics*, **8**, 49–53.
- G. BIRCHFIELD, H. WANG ET J. RICH (1994) Century / millenium internal climate oscillations in an ocean-atmosphere-continental ice sheet model, *J. Geophys. Res.*, **99**, 12459–12470.
- G. BIRCHFIELD (1989) A coupled ocean-atmosphere climate model: temperature versus salinity effects on the thermohaline circulation, *Climate Dynamics*, **4**, 57–71.
- G. BIRCHFIELD (1992) Comments on "Two stable equilibria of a coupled ocean-atmosphere model", *J. Climate*, **6**, 175–177.
- W. BROECKER ET G. DENTON (1989) The role of ocean-atmosphere reorganizations in glacial cycles, *Geochim. Cosmochim. Acta*, **53**, 2465–2501.
- W. BROECKER, D. PETEET ET D. RIND (1985) Does the ocean-atmosphere system have more than one stable mode of operation, *Nature*, **315**, 21–26.
- W. BROECKER (1987) Unpleasant surprise in the greenhouse?, *Nature*, **328**, 123–127.
- W. BROECKER (1991) The great ocean conveyor, *Oceanography*, **4**, 79–89.
- F. BRYAN (1986) High-latitude salinity effects and interhemispheric thermohaline circulations, *Nature*, **323**, 301–304.
- W. CAI, R. J. GREATBATCH ET S. ZHANG (1995) Interdecadal variability in an ocean model driven by a small zonal redistribution of the surface buoyancy flux, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 1998–2010.

- W. CAI (1995) Interdecadal variability driven by mismatch between surface flux forcing and oceanic freshwater/heat transport, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 2643–2666.
- W. CAI (1996) Surface thermohaline forcing conditions and the response of the present-day global ocean climate to global warming, *J. Geophys. Res.*, **101 - C1**, 1079–1093.
- P. CESSI ET W. YOUNG (1992) Multiple equilibria in two-dimensional thermohaline circulation, *J. Fluid Mechanics*, **241**, 291–309.
- P. CESSI (1994) A simple box-model of stochastically forced thermohaline flow, *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 1911–1920.
- P. CESSI (1996a) Convective adjustment and thermohaline excitability, *J. Phys. Oceanogr.*, **26**, 481–491.
- P. CESSI (1996b) Grid-scale instability of convective-adjustment schemes, *J. Mar. Res.*, **54**, 407–420.
- C. CHAPMAN ET M. PROCTOR (1980) Nonlinear Rayleigh-Bénard convection between poorly conducting boundaries, *J. Fluid Mechanics*, **101**, 759–782.
- F. CHEN ET M. GHIL (1995) Interdecadal variability of the thermohaline circulation and high-latitude surface fluxes, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 2547–2568.
- D. CHEN, R. GERDES ET G. LOHMANN (1995) A 1-D atmospheric energy balance model developed for ocean modelling, *J. Theor. Appl. Clim.*, **51**, 25.
- D. CORMACK, L. LEAL ET J. IMBERGER (1974) Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Part 1. Asymptotic theory, *J. Fluid Mechanics*, **65 - 2**, 209–229.
- E. CORTIJO, J. REYNAUD, L. LABEYRIE, D. PAILLARD, B. LEHMAN, M. CREMER ET F. GROUSSET (1995) Etude de la variabilité climatique à haute résolution dans des sédiments de l'Atlantique Nord, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **321 - IIa**, 231–238.
- C. COVEY (1991) Chaos in ocean heat transport, *Nature*, **353**, 796–797.
- M. COX (1989) An idealized model of the world ocean. Part I: the global-scale water masses, *J. Phys. Oceanogr.*, **19**, 1730–1752.
- P. CUMMINS, G. HOLLOWAY ET A. GARGETT (1990) Sensitivity of the GFDL ocean circulation model to a parameterization of vertical diffusion, *J. Phys. Oceanogr.*, **20**, 817–830.
- T. DELWORTH, S. MANABE ET R. STOUFFER (1993) Interdecadal variations of the thermohaline circulation in a coupled ocean-atmosphere model, *J. Climate*, **6**, 1993–2011.
- M. DEPASSIER ET E. SPIEGEL (1982) Convection with heat flux prescribed on the boundary of the system. I - The effect of temperature dependance of material properties, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **21**, 167–188.

- 
- H. DIJKSTRA ET M. MOLEMAKER (1997) Symmetry breaking and overturning oscillations in thermohaline driven flows, *J. Fluid Mechanics*, **331**, 169–198.
- H. DIJKSTRA, M. MOLEMAKER, A. V. D. PLOEG ET E. BOTTA (1995) An efficient code to compute non-parallel steady flows and their linear stability, *Computers & Fluids*, **24**, 415–434.
- M. ENGLAND (1992) On the formation of Antarctic intermediate and bottom water in ocean general circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, **22**, 918–926.
- M. ENGLAND (1993) Representing the global-scale water masses in ocean general circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1523–1552.
- T. FICHEFET ET S. HOVINE (1993) The glacial ocean: a study with a zonally averaged, three-basin ocean circulation model, In: *Ice in the Climate System* (Eds W.R. Peltier), Springer-Verlag.
- T. FICHEFET, S. HOVINE ET J. DUPLESSY (1994) A model study of the Atlantic thermohaline circulation during the last glacial maximum, *Nature*, **372**, 252–255.
- S. GAFFIN, M. HOFFERT ET T. VOLK (1986) Nonlinear coupling between surface temperature and ocean upwelling as an agent in historical climate variations, *J. Geophys. Res.*, **91** - **C3**, 3944–3950.
- A. GARGETT ET G. HOLLOWAY (1992) Sensitivity of the GFDL Ocean Model to different diffusivities for heat and salt, *J. Phys. Oceanogr.*, **22**, 1158–1177.
- P. GENT ET J. MCWILLIAMS (1990) Isopycnal mixing in ocean circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, **20**, 150–155.
- A. GILL (1982) Atmosphere-ocean dynamics, *Academic Press*.
- A. GINZBURG ET K. FEDOROV (1979) On salinity and temperature contributions to convective instability during the evaporation of sea water, *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, **15** - **8**, 613–616.
- GMT-SYSTEM VERSION 2.1 (1992) P. Wessel and W.H.F. Smith, *Technical Reference and Cookbook*.
- A. GORDON (1986) Interocean exchange of thermocline water, *J. Geophys. Res.*, **91**, 5037–5046.
- R. J. GREATBATCH, G. LI ET S. ZHANG (1995) Hindcasting ocean climate variability using time-dependent surface data to drive a model: an idealized study, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 2715–2725.
- R. HANEY (1971) Surface thermal boundary condition for ocean circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, **1**, 241–248.

- L. HARVEY (1992) A two-dimensional ocean model for long-term climatic simulations: stability and coupling to atmospheric and sea ice models, *J. Geophys. Res.*, **97** - **C6**, 9435–9453.
- S. HOVINE ET T. FICHEFET (1994) A zonally averaged, three-basin ocean circulation model for climate studies, *Climate Dynamics*, **10**, 313–331.
- S. HOVINE (1993) Variabilité à long terme de la circulation océanique mondiale: une étude à l'aide d'un modèle en équations primitives à deux dimensions, *Thèse*, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.
- R. HUANG ET R. CHOU (1994) Parameter sensitivity study of the saline circulation, *Climate Dynamics*, **9**, 391–409.
- R. HUANG ET H. STOMMEL (1992) Convective flow patterns in an eight-box cube driven by combined wind stress, thermal, and saline forcing, *J. Geophys. Res.*, **97** - **C2**, 2347–2364.
- R. HUANG, J. LUYTEN ET H. STOMMEL (1992) Multiple equilibrium states in combined thermal and saline circulation, *J. Phys. Oceanogr.*, **22**, 231–246.
- R. HUANG (1993a) A two-level model for the wind- and buoyancy-forced circulation, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 104–115.
- R. HUANG (1993b) Real freshwater flux as a natural boundary condition for the salinity balance and thermohaline circulation forced by evaporation and precipitation, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 2428–2446.
- T. HUGHES ET A. WEAVER (1994) Multiple equilibria of an asymmetric two-basin ocean model, *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 619–637.
- S. JOUSSAUME (1993) Climat d'hier à demain, *CNRS Editions/CEA*.
- T. JOYCE (1991) Thermohaline catastrophe in a simple four-box model of ocean climate, *J. Geophys. Res.*, **96** - **C11**, 20393–20402.
- W. KELLOGG (1983) Feedback mechanisms in the climate system affecting future levels of carbon dioxide, *J. Geophys. Res.*, **88** - **C2**, 1263–1269.
- J. KENNETT ET L. STOTT (1991) Abrupt deep-sea warming, palaeoceanographic changes and benthic extinctions at the end of the Palaeocene, *Nature*, **353**, 225–229.
- P. LAGARDE (1995) Circulations thermohalines à l'aide d'un modèle planétaire géostrophique, *Projet de fin d'études ENSTA*.
- S. LEHMAN ET L. KEIGWIN (1992) Sudden changes in North Atlantic circulation during the last deglaciation, *Nature*, **356**, 757–762.
- G. LENDERINK ET R. HAARSMA (1994) Variability and multiple equilibria of the thermohaline circulation associated with deep-water formation, *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 1480–1493.

- 
- S. LEVITUS (1982) Climatological atlas of the world ocean, *NOAA Prof. Paper 13*, U.S. Dept. of commerce Washington DC.
- G. LOHMANN, R. GERDES ET D. CHEN (1994) Feedbacks mechanisms affecting the thermohaline circulation, *WCRP Conference on the dynamics of the Arctic climate system*, Gothenburg, Sweden.
- G. LOHMANN, R. GERDES ET D. CHEN (1995) Sensitivity of the thermohaline circulation in coupled oceanic GCM atmospheric EBM experiments, *Tech. Rep. 57*, AWI Bremerhaven.
- G. LOHMANN, R. GERDES ET D. CHEN (1995) Stability of the thermohaline circulation in an analytical investigation, *Tech. Rep. 58*, AWI Bremerhaven.
- E. MAIER-REIMER, U. MIKOLAJEWICZ ET K. HASSELMANN (1993) Mean Circulation of the Hamburg LSG OGCM and its sensitivity to the thermohaline surface forcing, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 731–757.
- S. MANABE ET J. K. BRYAN (1985)  $CO_2$ -induced change in a coupled ocean-atmosphere model and its paleoclimatic implications, *J. Geophys. Res.*, **90 - C6**, 11689–11707.
- S. MANABE ET R. STOUFFER (1988) Two stable equilibria of a coupled ocean-atmosphere model, *J. Climate*, **1**, 841–866.
- S. MANABE ET R. STOUFFER (1993) Century-scale effects of increased atmospheric  $CO_2$  on the ocean-atmosphere system, *Nature*, **364**, 215–218.
- S. MANABE ET R. STOUFFER (1994) Multiple-century response of a coupled ocean-atmosphere model to an increase of atmospheric carbon dioxide. Part I: Annual mean response, *J. Climate*, **7**, 5–23.
- S. MANABE, R. STOUFFER, M. SPELMAN ET K. BRYAN (1991) Transient responses of a coupled ocean-atmosphere model to gradual changes of atmospheric  $CO_2$ . Part I: Annual mean response, *J. Climate*, **4**, 785–818.
- J. MAROTZKE ET P. H. STONE (1995) Atmospheric transports, the thermohaline circulation, and flux adjustments in a simple coupled model, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 1350–1364.
- J. MAROTZKE ET J. WILLEBRAND (1991) Multiple equilibria of the global thermohaline circulation, *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 1372–1385.
- J. MAROTZKE, P. WELANDER ET J. WILLEBRAND (1988) Instability and multiple steady states in a meridional- plane of the thermohaline circulation, *Tellus*, **40A**, 162–172.
- J. MAROTZKE (1989) Instability and multiple steady states of the thermohaline circulation, In: *Oceanic circulation models: combining data and dynamics* (Eds D.T.L. Anderson and J. Willebrand ), *Kluwer Acad. Pub.*, 501–511.
- J. MAROTZKE (1990) Instabilities and multiple equilibria of the thermohaline circulation, *Thèse*, Christian Albrechts University of Kiel, Germany.

- J. MAROTZKE (1991) Influence of convective adjustment on the stability of the thermohaline circulation, *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 903–907.
- U. MIKOLAJEWICZ ET E. MAIER-REIMER (1990) Internal secular variability in an ocean general circulation model, *Climate Dynamics*, **4**, 145–156.
- M. MILANKOVIĆ (1941) Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eizeitenproblem, Ed. Sp. Acad. Royale Serbe - Belgrade, Translation: Canon of insolation and ice-age problem by *Israel program for scientific translation*. Published for U.S. Department of Commerce and the National Science Foundation. (1969).
- A. MOORE ET C. REASON (1993) The response of a global ocean general circulation model to climatological surface boundary conditions for temperature and salinity, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 300–328.
- P. MYERS ET A. WEAVER (1992) Low-frequency internal oceanic variability under seasonal forcing, *J. Geophys. Res.*, **97** - **C6**, 9541–9563.
- L. MYSAK ET S. POWER (1992) Sea-ice anomalies in the western Arctic and Greenland-Iceland Sea and their relation to an interdecadal climate cycle, *Climatological Bulletin*, **26** - **3**, 147–176.
- L. MYSAK, T. STOCKER ET F. HUANG (1993) Century-scale variability in a randomly forced, two-dimensional thermohaline ocean circulation model, *Climate Dynamics*, **8**, 103–116.
- D. PAILLARD ET L. LABEYRIE (1994) Role of the thermohaline circulation in the abrupt climate warming after Heinrich events, *Nature*, **372**, 162–164.
- D. PAILLARD (1995) Modèles simplifiés pour l'étude de la variabilité de la circulation thermohaline au cours des cycles glaciaire-interglaciaire, *Thèse*, Université Paris XI Orsay, Paris, France.
- J. PEDLOSKY (1987 - 2nd Edition) Geophysical fluid dynamics, *Springer Verlag*.
- G. PICKARD ET W. EMERY (1993 - 5th Edition) Descriptive physical oceanography – An introduction, *Pergamon Press*.
- R. PIELKE ET X. ZENG (1994) Long-term variability of climate, *J. Atmos. Sciences*, **51** - **1**, 155–159.
- D. W. PIERCE, T. P. BARNETT ET U. MIKOLAJEWICZ (1995) Competing roles of heat and freshwater flux in forcing thermohaline oscillations, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 2046–2064.
- V. POPOV ET Y. CHASHECHKIN (1979) On the structure of thermohaline convection in a stratified fluid, *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, **15** - **9**, 668–675.
- S. POWER ET R. KLEEMAN (1993) Multiple equilibria in a global ocean general circulation model, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1670–1681.



- 
- S. POWER ET R. KLEEMAN (1994) Surface heat flux parameterization and the response of ocean general circulation models to high-latitude freshening, *Tellus*, **46 A**, 86–95.
- S. POWER, A. MOORE, D. POST, N. SMITH ET R. KLEEMAN (1994) Stability of North Atlantic deep water formation in a Global ocean general circulation model, *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 904–916.
- C. QUON ET M. GHIL (1992) Multiple equilibria in thermosolutal convection due to salt-flux boundary conditions, *J. Fluid Mechanics*, **245**, 449–483.
- C. QUON ET M. GHIL (1993) Multiple equilibria and oscillations in two-dimensional thermohaline convection with and without rotation, *Ninth Conference on Atmospheric and Oceanic Waves and Stability*.
- C. QUON ET M. GHIL (1995) Multiple equilibria and stable oscillations in thermosolutal convection at small aspect ratio, *J. Fluid Mechanics*, **291**, 33–56.
- S. RAHMSTORF ET J. WILLEBRAND (1995) The role of temperature feedback in stabilizing the thermohaline circulation, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 787–805.
- S. RAHMSTORF, J. MAROTZKE ET J. WILLEBRAND (1996) Stability of the thermohaline circulation, In: *The warm water sphere of the North Atlantic Ocean* (Ed W. Krauss), Borntraeger.
- S. RAHMSTORF (1995) Multiple convection patterns and thermohaline flow in an idealized OGCM, *J. Climate*, **8**, 3028–3039.
- A. ROBERTS (1985) An analysis of near-marginal, mildly penetrative convection with heat flux prescribed on the boundaries, *J. Fluid Mechanics*, **158**, 71–93.
- C. ROTH (1982) Hydrology and ocean circulation, *Prog. Oceanog.*, **11**, 131–149.
- B. RUDDICK ET L. ZHANG (1989) The mythical thermohaline oscillator, *J. Mar. Res.*, **47**, 717–746.
- R. SALMON (1986) A simplified linear ocean circulation theory, *J. Mar. Res.*, **44**, 695–711.
- R. SARAVANAN ET J. MCWILLIAMS (1995) Multiple equilibria, natural variability and climate transitions in an idealized ocean-atmosphere model, *J. Climate*, **8**, 2296–2323.
- R. SCHMITT, P. BOGDEN ET C. DORMAN (1989) Evaporation minus precipitation and density fluxes for the North Atlantic, *J. Phys. Oceanogr.*, **19**, 1208–1221.
- A. SEN ET S. DAVIS (1982) Steady thermocapillary flows in two-dimensional slots, *J. Fluid Mechanics*, **121**, 163–186.
- M. SPALL (1993) Variability of sea surface salinity in stochastically forced systems, *Climate Dynamics*, **8**, 151–160.

- T. STOCKER ET L. MYSK (1992) Climatic fluctuations on the century time scale: a review of high-resolution proxy data and possible mechanisms, *Climatic Change*, **20**, 227–250.
- T. STOCKER ET D. WRIGHT (1991a) A zonally averaged ocean model for the thermohaline circulation. Part II: Inter-ocean circulation in the Pacific-Atlantic basin system, *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 1725–1739.
- T. STOCKER ET D. WRIGHT (1991b) Rapid transitions of the ocean's deep circulation induced by changes in surface water fluxes, *Nature*, **351**, 729–732.
- T. STOCKER, D. WRIGHT ET L. MYSK (1992) A zonally averaged, coupled ocean-atmosphere model for Paleoclimate studies, *J. Climate*, **5**, 773–797.
- H. STOMMEL ET W. YOUNG (1993) The average T-S relation of a stochastically forced box model, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 151–158.
- H. STOMMEL (1961) Thermohaline convection with two stable regimes of flow, *Tellus*, **XIII** - **2**, 224–230.
- H. STOMMEL (1962) On the smallness of sinking regions in the ocean, *Proc. Nat. Acad. Sci. Washington*, **48**, 766–772.
- H. STOMMEL (1993) A conjectural regulating mechanism for determining the thermohaline structure of the oceanic mixed layer, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 142–150.
- R. STOUFFER, S. MANABE ET K. BRYAN (1989) Interhemispheric asymmetry in climate response to a gradual increase of atmospheric  $CO_2$ , *Nature*, **342**, 660–662.
- K. TAYLOR, G. LAMOREY, G. DOYLE, R. ALLEY, P. GROOTES, P. MAYEWSKI, J. WHITE ET L. BARLOW (1993) The 'flickering switch' of late Pleistocene climate change, *Nature*, **361**, 432–436.
- O. THUAL ET J. MCWILLIAMS (1992) The catastrophe structure of thermohaline convection in a two-dimensional fluid model and a comparison with low-order box models, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **64**, 67–95.
- O. THUAL (1992) Zero-Prandtl-number convection, *J. Fluid Mechanics*, **240**, 229–258.
- O. THUAL (1993) Generic instabilities and nonlinear dynamics, In: *Astrophysical fluid dynamics* (Eds J.-P. Zahn and Zinn-Justin), *Elsevier Science Publishers B.V.*, 93–138.
- R. TOGGWEILER (1994) The ocean's overturning circulation, *Physics Today*, **Nov.**, 45–50.
- E. TZIPERMAN, J. TOGGWEILER, Y. FELIKS ET K. BRYAN (1994) Instability of the thermohaline circulation with respect to mixed boundary conditions: Is it really a problem for realistic models?, *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 217–232.
- A. VAN DER PLOEG (1992) Pre-conditioning techniques for non-symmetric matrices with application to temperature calculations of cooled concrete, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **35**.

- 
- M. VELLINGA (1996) Instability of two-dimensional thermohaline circulation, *J. Phys. Oceanogr.*, **26**, 305–319.
- G. WALIN (1985) The thermohaline circulation and the control of ice ages, *Palaeogeog. Palaeoclim. Palaeoecol.*, **50**, 323–332.
- H. WANG ET G. BIRCHFIELD (1992) An energy-salinity balance climate model: water vapor transport as a cause of changes in the global thermohaline circulation, *J. Geophys. Res.*, **97 - C2**, 2335–2346.
- W. WASHINGTON ET G. MEEHL (1989) Climate sensitivity due to increased  $CO_2$ : experiments with a coupled atmosphere and ocean general circulation model, *Climate Dynamics*, **4**, 1–38.
- R. WATTS ET M. MORANTINE (1991) Is the greenhouse gas-climate signal hiding in the deep ocean, *Climatic Change*, **18**, iii–vi.
- A. WEAVER ET T. HUGHES (1992) Stability and variability of the thermohaline circulation and its link to climate, *Trends in Physical Oceanography, Council of Scientific Research Integration - Research Trends Series, Trivandrum India*.
- A. WEAVER ET E. SARACHIK (1990) On the importance of vertical resolution in certain ocean general circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, **20**, 600–609.
- A. WEAVER ET E. SARACHIK (1991a) The role of mixed boundary conditions in numerical models of the ocean's climate, *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 1470–1493.
- A. WEAVER ET E. SARACHIK (1991b) Evidence for decadal variability in an ocean general circulation model: an advective mechanism, *Atmosphere-Ocean*, **29**, 197–231.
- A. WEAVER, J. MAROTZKE, P. CUMMINS ET E. SARACHIK (1993) Stability and variability of the thermohaline circulation, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 39–60.
- A. WEAVER, E. SARACHIK ET J. MAROTZKE (1991) Freshwater flux forcing of decadal and interdecadal oceanic variability, *Nature*, **353**, 836–838.
- P. WELANDER (1977) Thermal oscillations in a fluid heated from below and cooled to freezing from above, *Dyn. Atm. Oc.*, **1**, 215–223.
- P. WELANDER (1982) A simple heat-salt oscillator, *Dyn. Atm. Oc.*, **6**, 233–242.
- P. WELANDER (1986) Thermohaline effects in the ocean circulation and related simple models, In: *Large-Scale transport processes in oceans and atmosphere* (Eds J. Willebrand and D.T.L. Anderson), *D. Reidel*, 163–200.
- M. WINTON ET E. SARACHIK (1993) Thermohaline oscillations induced by strong steady salinity forcing of ocean general circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1389–1410.

- M. WINTON (1993) Deep decoupling oscillations of the oceanic thermohaline circulation, In: *Ice in the Climate System* (Eds W.R. Peltier), Springer-Verlag, 417–432.
- M. WINTON (1995a) Energetics of deep-decoupling oscillations, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**.
- M. WINTON (1995b) Why is the deep sinking narrow?, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 997–1005.
- D. WRIGHT ET T. STOCKER (1991) A zonally averaged ocean model for the thermohaline circulation. Part I: Model development and flow dynamics, *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 1713–1724.
- D. WRIGHT ET T. STOCKER (1992) Sensitivities of a zonally averaged global ocean circulation model, *J. Geophys. Res.*, **97 - C8**, 12707–12730.
- D. WRIGHT, C. VREUGDENHIL ET T. HUGHES (1995) Vorticity dynamics and zonally averaged ocean circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 2141–2154.
- J. YANG ET D. NEELIN (1993) Sea-ice interaction with the thermohaline circulation, *Geophys. Res. Letters*, **20 - 2**, 217–220.
- F. YIN ET E. SARACHIK (1994) An efficient convective adjustment scheme for ocean general circulation models, *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 1425–1431.
- F. YIN ET E. SARACHIK (1995) Interdecadal thermohaline oscillations in a sector ocean general circulation model: advective and convective processes, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 2465–2484.
- F. YIN (1995) A mechanistic model of ocean interdecadal thermohaline oscillations, *J. Phys. Oceanogr.*, **25**, 3239–3246.
- W. YOUNG (1994) The subinertial mixed layer approximation, *J. Phys. Oceanogr.*, **24**, 1812–1826.
- R. ZAHN (1992) Deep ocean circulation puzzle, *Nature*, **356**, 744–746.
- F. ZAUCKER ET W. BROECKER (1992) The influence of atmospheric moisture transport on the fresh water balance of the Atlantic drainage basin: general circulation model simulations and observations, *J. Geophys. Res.*, **97 - D3**, 2765–2773.
- S. ZHANG, R. GREATBATCH ET C. LIN (1993) A reexamination of the polar halocline catastrophe and implications for coupled ocean-atmosphere modeling, *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 287–299.
- S. ZHANG, C. LIN ET R. GREATBATCH (1995) A decadal oscillation due to the coupling between an ocean circulation model and a thermodynamic sea-ice model, *J. Mar. Res.*, **53**, 79–106.
- L. ZHANG (1991) , *M.Sc. Thesis*, Dalhousie University, Halifax, Nova Scotia.